

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**КАРА ІРИНА ДМИТРІВНА**

УДК 529.3

**ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ  
РІВНЯНЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У НАСИЧЕНИХ  
РІДИНОЮ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

05.23.17 – будівельна механіка

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Київ – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки та в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат технічних наук, доцент  
**Ворона Юрій Володимирович,**  
Київський національний університет будівництва і  
архітектури МОН України,  
професор кафедри будівельної механіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
**Жук Ярослав Олександрович,**  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
МОН України,  
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки.

– кандидат технічних наук, доцент  
**Андрусенко Олена Миколаївна,**  
Національний транспортний університет МОН України,  
доцент кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «14» травня 2021р. о 13 годині на засідання спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03037, м.Київ, Повітрофлотський проспект, 31, ауд. 319.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03037, м.Київ, Повітрофлотський проспект, 31.

Автореферат розісланий «12» квітня 2021р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
д.т.н., доцент



Д.В. Михайловський

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Пористі матеріали є досить розповсюдженими в природі, а тому знаходять широке використання в будівництві. Це насичені рідиною або газом ґрунти та гірські породи, пористі будівельні матеріали: цегла, пісок, пінобетон, газобетон, теплоізоляційні та звукоізоляційні матеріали. Останнім часом виникає необхідність розв'язувати на основі теорії пористих середовищ різні задачі, зокрема, досліджувати деформації та стабільність повністю або частково заповнених ґрунтових конструкцій (дамб, набережних, залізничних дамб) чи проблеми, що пов'язані з влаштуванням фундаментів та будівель.

Проектування підземних споруд, зокрема, резервуарів, розробка нафтових родовищ динамічними методами також вимагають знань явищ і процесів, які відбуваються в пористих середовищах, насичених рідиною або газом, при розповсюдженні пружних хвиль. Дослідження хвильових процесів в пружних пористих середовищах тісно пов'язані з сучасними задачами сейсмології, сейсморозвідки та проектування підземних споруд. Спеціалісти по геодинаміці, біодинаміці, інженери-будівельники зацікавлені у вивченні та розвитку механіки пористих матеріалів. Застосовуючи пористі матеріали, можна не лише зменшити масу та матеріаломісткість конструкції, але навіть збільшити їх міцність і надійність.

Дослідженню поропружних середовищ на сьогодні присвячена значна кількість праць. Це зумовлено тим, що велика кількість природних і штучних середовищ містить в своїй структурі пори, присутність заповнювача в яких вносить поправки в поведінку матеріалів. При дослідженні процесів розповсюдження хвиль в насичених матеріалах використання законів теорії пружності та в'язкопружного опису є грубим наближенням. Модель поропружного середовища є складнішою за відповідну однорідну пружну чи в'язкопружну моделі. Це викликано тим, що рідина, яка заповнює пори, може перетікати з однієї області відкритих пор до іншої. При поширенні пружних коливань в таких тілах, окрім поздовжньої та поперечної хвиль, виникають також деякі більш складні типи хвиль, що пояснюється різницею в поведінці та характеристиках твердої і рідкої фаз. В задачах про розповсюдження хвиль дуже важливо враховувати ці особливості. Саме тому для врахування пористості необхідна відповідна теорія.

Динамічна поведінка рідкого заповнювача в залежності від значення частоти коливань досить сильно впливає на напружено-деформований стан (НДС) всього тіла. Не зважаючи на введення деяких спрощень, таких як: відсутність температурних переходів та фазових ефектів, побудова універсальної загальноприйнятної моделі для розрахунку конструкцій з пористих насичених рідиною матеріалів є досить складною задачею будівельної механіки, яка на сьогодні є невирішеною.

Обчислити аналітично параметри НДС тіл загальної форми, виготовлених з пористих матеріалів, досить складно, особливо при дії динамічного навантаження. У випадках, коли об'єкт розрахунку займає нескінченну область, помітними стають переваги чисельних методів, побудованих на основі методу потенціалу. Одним із його різновидів є метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР), який дозволяє окремо розглянути залежності між граничними переміщеннями і напруженнями та співвідношення, які визначають дані параметри всередині розрахункової області. Застосування цих методів до розв'язання динамічних задач пружності почалося ще наприкінці минулого століття. При цьому в сучасних наукових джерелах присутні лише поодинокі гранично-елементні розв'язки відповідних задач. Тому дослідження процесів поширення хвиль та аналіз динамічного НДС пористих насичених рідиною тіл з використанням МГІР є актуальною задачею сучасної будівельної механіки, яка чекає на своє вирішення.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи полягає у розробці на основі методу граничних інтегральних рівнянь ефективної методики для дослідження процесів поширення пружних хвиль в пористих насичених рідиною середовищах під дією змінного в часі динамічного навантаження та застосування цієї методики для розв'язання прикладних задач.

**Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:**

- побудова на основі МГІР системи розрахункових співвідношень для ефективного розв'язання просторових динамічних задач про поширення хвиль в пружних середовищах, які насичені рідиною, під дією змінних у часі динамічних навантажень;
- розробка алгоритму дослідження динамічних полів переміщень і напружень та аналізу коливань в навантажених насичених пористих тілах;
- підтвердження ефективності розробленої методики шляхом порівняння результатів з аналітичними розв'язками;
- створення програмних засобів, що реалізують отримані алгоритми та орієнтовані на використання персональними комп'ютерами;

**Об'єктом дослідження** є процеси розповсюдження пружних хвиль у будівельних спорудах, вироблених з пористих насичених рідиною матеріалів.

**Предметом дослідження** є змінні у часі компоненти векторів переміщень та тензорів напружень при дії динамічного навантаження.

**Методи дослідження.** В даній роботі для розв'язання задач використовується МГІР, реалізований за допомогою нових розрахункових співвідношень, які дозволяють ефективно досліджувати динамічний НДС тривимірних пористих тіл. Застосування методу базується на розбитті поверхні тіла на граничні елементи заданої геометрії, причому вважається, що функції шуканих параметрів НДС змінюються в межах елементів за відомим законом. Зважаючи на залежність між переміщеннями та напруженнями в точках, що

знаходяться всередині розрахункової області, та їх значеннями в точках, що лежать на границі, спочатку розв'язується гранична задача, а потім обчислюються значення параметрів НДС у внутрішніх точках. Систему граничних інтегральних рівнянь (ГІР) відносно невідомих граничних значень функцій отримуємо після спрямування точки спостереження до точки на гладкій ділянці границі. Складовими ГІР, які еквівалентні диференціальним рівнянням, є поля переміщень і напружень, а також фундаментальні розв'язки задачі та їх узагальнені похідні. Алгебраїзація задачі здійснюється за колокаційною схемою методу граничних елементів, при цьому обчислення сингулярних частин граничних інтегралів по елементах, які містять полюс інтегрування, виконується аналітично з використанням отриманих в роботі виразів

**Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, результати яких наведені в дисертаційній роботі, виконані відповідно до плану наукової роботи кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА за пріоритетним напрямком розвитку науки і техніки в Україні «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави». Одержані наукові результати були використані при розробці проєктів: ЗДБ-2013 «Теорії і методи дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань та прогнозування динамічної поведінки пружних систем, що збуджуються стохастичними ударними впливами» (№ держ. реєстрації 0113U002290); 2ДБ-2016 «Теорії і методи аналізу динамічного деформування складних механічних систем під дією навантажень періодичного, стохастичного та ударного характеру» (№ держ. реєстрації 0116U000840); 2ДБ-2018 «Методи та алгоритми прогнозування критичних станів та катастроф у динамічних системах при дії навантажень ударного та стохастичного характеру» (№ держ. реєстрації 0118U002015); 2ДБ-2019 «Чисельні методи дослідження та прогнозування нелінійних коливань, динамічної стійкості та кризових явищ і хаотичної поведінки пружних систем» (№ держ. реєстрації 0119U002578). Автор був одним із виконавців зазначених наукових розробок. Результати дисертаційних досліджень були включені у звіти по даним НДР.

**Наукова новизна:**

- на основі МГІР створена ефективна методика розв'язання задач про коливання тривимірних пористих насичених рідиною тіл при дії динамічного навантаження;
- розроблений підхід на основі розвитку підінтегральних виразів в ряд Маклорена для визначення сингулярних граничних інтегралів, які описують

динамічний НДС масивних поропружних об'єктів; досліджена точність обчислення ядер інтегральних рівнянь в залежності від кількості утриманих членів ряду;

- виведені замкнені співвідношення для аналітичного визначення сингулярних частин граничних інтегралів для випадку, коли полюс розташований на плоскому елементі границі;
- отримані зручні для подальших перетворень та обчислень формули узагальненої похідної фундаментального розв'язку задачі тривимірної динамічної поропружності;
- за допомогою створеної методики розв'язана задача про динамічний НДС поропружного простору, послабленого двома сферичними отворами, границя одного з яких зазнає дії вибухового навантаження.

**Практична цінність** результатів роботи полягає у розробці та програмній реалізації ефективного гранично-елементного підходу для практичного аналізу хвильових процесів в пористих насичених рідиною тілах. Чисельна реалізація розробленого підходу отримала застосування при виконанні проєктів в Науково-дослідному інституті будівельної механіки КНУБА.

**Особистий внесок здобувача.** В дисертаційній роботі викладені результати досліджень, отримані автором особисто: проведений огляд основних методів розв'язання задач розповсюдження пружних хвиль в пористих середовищах [5, 6]; одержані розрахункові співвідношення МГПР з використанням фундаментальних розв'язків задачі про коливання просторових пористих тіл [2, 7]; отримані вирази для узагальнених похідних фундаментальних розв'язків задачі зв'язаної термопружності [1, 4]; розроблений новий алгоритм обчислення діагональних компонент алгебраїчного аналога системи інтегральних рівнянь, який використовує інтегрування ядер по круговій області [3, 4]; запропоновані чисельні співвідношення для обчислення параметрів НДС поропружних насичених рідиною тіл в широкому діапазоні частоти коливань [6]; отримані чисельні розв'язки тестових задач для перевірки достовірності розроблених підходів і алгоритмів та збіжності результатів [1, 2, 7].

**Апробація результатів.** Одержані в даній роботі основні наукові результати були представлені на вітчизняних та міжнародних науково-практичних конференціях: 75 науково-практичній конференції КНУБА (м.Київ, 2014 р.); Науковій конференції молодих вчених, аспірантів і студентів (м. Київ, КНУБА, 2014 р.); Першій всеукраїнській науково-практичній конференції «Буд-Майстер-Клас» (м. Київ, КНУБА, 2015 р.); Науково-методичній конференції «Сучасні проблеми будівельної механіки і теорії споруд» (м. Київ, КНУБА, 2016 р.); II Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (м. Київ, КНУБА, 2018 р.).

**Публікації.** Основні результати досліджень були опубліковані в 7 наукових роботах, серед яких: 5 статей у науковому фаховому виданні, яке включене до міжнародних науково-метричних баз, 1 стаття у науковому фаховому виданні та 1 публікація в збірнику тез наукової конференції.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури. Робота також містить 5 таблиць та 22 рисунки. Загальний обсяг дисертаційної роботи становить 137 сторінок машинописного тексту. Список використаних літературних джерел містить 208 джерел, які розміщені на 21 сторінці, додаток на двох сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми, сформульовані мета і головні завдання дослідження, дана загальна характеристика роботи.

У першому розділі проведений аналіз літературних джерел з питань сучасного стану проблематики роботи та наведені особливості розрахунку характеристик пружно-пористих насичених рідиною середовищ.

Основною і класичною теорією для розв'язання задач моделювання багатокomпонентних насичених рідиною чи газом пористих середовищ є теорія М.А.Віот. Базуючись на ній, питання розповсюдження хвиль в пористих тілах розглядали: В.Є.Донцов, Х.Х.Імомназаров, Ал.А.Ковтун, А.А.Ляпін, Е.А.Марфин, Л.Б.Маслов, В.Є.Накоряков, М.Н.Овчинников, К.Е.Сорокін, С.Т.Туйчиева, Я.І.Френкель, І.А.Аббас, А.Н.Абд-Алла, J.Geertsma, M.D.Sharma, D.C.Smit.

Великий вклад у розвиток МГЕ та МГІР внесли вітчизняні та закордонні науковці: Д.В.Вайнберг, Ю.В.Верюжський, Ч.В.Кионг, Г.Б.Ковнеристов, В.Д.Купрадзе, С.Г.Михлин, М.І.Мухелишвили, І.З.Ройтфарб, О.Л.Синявський, Ч.Д.Тінь, А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянський, Р.К.Банерjee, С.А.Вреbbia, R.Buterfield, S.L.Crouch, T.A.Cruse, M.Jaswon, D.Nardini, F.I.Rizzo, A.M.Starfield.

Застосуванню МГЕ та МГІР до вивчення проблем поропружності присвячені праці таких вчених як А.В.Аменицький, В.Г.Баженов, А.А.Белов, Л.А.Ігумнов, І.С.Карелін, С.Ю.Литвинчук, В.Albers, I.Ashayeri, T.Badmus, D.E.Beskos, G.Bonnet, А.Н.-D.Cheng, J.Dominguez, K.V.Nguyen, M.J.Sarahi. Розв'язком динамічних задач з використанням трифазної моделі поропружного середовища займалися M.Schanz, P.Li. Для побудови фундаментальних розв'язків та розв'язку систем диференціальних рівнянь вони застосовували інтегральне перетворення Лапласа.

Аналіз літературних джерел показує, що значна кількість досліджень присвячена питанням поропружності в двовимірній постановці. В більшості робіт досліджувались хвильові процеси в тілах простої геометричної форми і практично відсутні розробки, присвячені розв'язанню задач про коливання масивних елементів будівельних споруд.

В даній роботі розглядаються питання, пов'язані з аналізом в тривимірній постановці НДС пористих насичених рідиною тіл при дії динамічного навантаження. При дослідженні приймається, що по всьому об'єму тіла пори розподілені рівномірно. З точки зору механіки суцільного середовища насичена рідиною чи газом пориста область є, по суті, двофазним суцільним середовищем. До першої фази належать тверді часточки пористого каркасу, а до другої – елементи рідкого заповнювача. Це необхідно враховувати при вивченні особливостей поведінки пористих середовищ, які зумовлені різницею механічних властивостей обох фаз. Розбиття всіх складових часточок на два класи, по відповідності до кожної фази, необхідне ще і тому, що різниця в поведінці елементів одного класу набагато менш суттєва за різницю між часточками різних фаз. При такому поділі природним є припущення про те, що простір елементарного об'єму заповнений двома суцільними середовищами, які можуть взаємодіяти один з одним. Фундаментальною властивістю пружно-пористого насиченого середовища є можливість розповсюдження трьох типів хвиль, а саме: двох поздовжніх хвиль («швидкої та «повільної»), а також поперечної хвилі. Існування двох типів поздовжніх хвиль пов'язане з різною стисливістю пористого каркасу та рідкого заповнювача.

Оскільки в пружно-пористому насиченому середовищі компоненти різних фаз мають різні густини, при розрахунках необхідно враховувати усереднене значення густини. Загальна густина пружно-пористого елемента (щільність насиченого пористого матеріалу в цілому) виражається через густини каркасу  $\rho_s$  і рідкого заповнювача  $\rho_f$  та  $\beta$  – значення пористості матеріалу:

$$\rho = \rho_s + \beta(\rho_f - \rho_s) = \rho_1 + \rho_2 = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}. \quad (1)$$

Це співвідношення базується на припущенні про відсутність відносного руху між обома фазами.

Маса каркасу на одиницю об'єму всього тіла:

$$\rho_1 = \rho_s(1 - \beta). \quad (2)$$

Маса рідини на одиницю об'єму тіла:

$$\rho_2 = \beta \cdot \rho_f. \quad (3)$$

Часткові фазові (ефективні) щільності пористого насиченого середовища є рівними:

$$\rho_{11} = \rho_1 + \rho_a, \quad (4)$$

$$\rho_{22} = \rho_2 + \rho_a, \quad (5)$$

де  $\rho_a$  – щільність приєднаної маси, яка вводиться для опису взаємодії пружного скелету і рідини:

$$\rho_a = -\rho_{12} = c \cdot \beta \cdot \rho_f, \quad (6)$$

$c$  – коефіцієнт, який залежить від геометрії пор та від частоти збурення (параметр викривлення порових каналів).



Коефіцієнти  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{12}$  це динамічні коефіцієнти, при чому перші два з них мають бути додатними. Коефіцієнт  $\rho_{12}$  представляє собою параметр співвідношення мас між каркасом та рідиною. Ця величина завжди має від'ємне значення.

Ще однією особливістю пористого насиченого рідиною середовища є введені в теорії Біо модулі поропружного матеріалу  $Q$ ,  $R$ ,  $B$  і  $M$ , які виражаються через пористість  $\beta$ , коефіцієнт ефективних напружень Біо  $\alpha$  та модулі об'ємного стиснення неосушеного та осушеного пористого матеріалу  $K_u$  і  $K$ :

$$Q = \frac{\beta(\alpha - \beta)(K_u - K)}{\alpha^2}, \quad (7)$$

$$R = \frac{\beta^2(K_u - K)}{\alpha^2}, \quad (8)$$

$$B = \frac{\alpha M}{K + \alpha^2 M}. \quad (9)$$

$$M = \frac{R}{\beta^2}. \quad (10)$$

Коефіцієнт ефективних напружень Біо визначається:

$$\alpha = \frac{\beta(Q + R)}{R}. \quad (11)$$

Модулі об'ємного стиснення  $K_u$  і  $K$  визначаються лабораторним шляхом.

В другому розділі наведені вихідні співвідношення, ГПР та матриця фундаментальних розв'язків динамічної задачі тривимірної поропружності; отримані вирази узагальненої похідної фундаментальних розв'язків.

Деформований стан пружно-пористого насиченого середовища характеризується двома полями усереднених векторів переміщень. Вектор переміщень  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x_k, t)$  точок жорсткого пористого каркасу і вектор переміщень  $\mathbf{U}=\mathbf{U}(x_k, t)$  рідини в поровому просторі. Тут зовнішнім проявом деформації є поле переміщень  $\mathbf{u}$ , яке, наприклад, безпосередньо можуть зареєструвати прилади, та тиск рідини  $p$ . А от переміщення  $\mathbf{U}$  ніяк не вимірюється, проте може бути визначеним в результаті розв'язання відповідних математичних задач.

Рівняння поропружності, по своєму змісту, є відповідними до рівнянь для пружного середовища і складаються з рівнянь закону Гука та рівнянь стану загального середовища. Ці рівняння ускладнюються врахуванням дисперсії та дисипації. В однорідному середовищі основним ефектом дисипації є тертя між рідиною та скелетом на границях пор, так званий механізм в'язкої дисипації, що і призводить до необхідності включення додаткових параметрів в рівняння руху.

У випадку поширення гармонічних хвиль ГПР, отримане шляхом граничного переходу в інтегральному представленні для переміщень точок твердого каркасу, має вигляд:

$$c_{ij}u_i + \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_j^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{nj}^* d\Gamma + \int_{\Omega} (X_i u_i^* - X_i' U_{ij}^*) d\Omega, \quad (12)$$

а рівняння на основі представлення для напружень в заповнювачі виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} & \frac{c\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} + \int_{\Gamma} (t_{ij}^* u_i + \tau_j^* U_n) d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ t_i u_{ij}^* + \tau \left( U_{nj}^* + \frac{X_i^* n_i}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \right) \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ X_i u_{ij}^* + X_i' \left( U_{ij}^* + \frac{X_i^*}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

де  $i, j=1, 2, 3$  (індекс  $j$  визначає рядок фундаментального розв'язку);  $c_{ij}=\delta_{ij}$  для точок всередині тіла  $\Omega$ ,  $c_{ij}=0$  для точок ззовні,  $c_{ij}=0,5\delta_{ij}$  для граничних точок у випадку, коли границя є гладкою,  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до границі, символом \* позначені фундаментальні розв'язки;  $u_i, U_i$  – компоненти векторів переміщень в твердій та рідкій фазах;  $\tau_{ij}$  – напруження в твердій речовині;  $\tau$  – напруження в рідині, яке співвідноситься з тиском в рідині  $p$  наступним чином:

$$\tau = -\beta \cdot p, \quad (14)$$

$\omega$  – колова частота,  $X_i, X_i'$  – масові (об'ємні) сили,  $b$  – коефіцієнт дисипації.

Фізичні співвідношення поропружності:

$$\tau_{ij} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) \delta_{ij} e + 2\mu e_{ij} + Q\delta_{ij} \varepsilon, \quad (15)$$

$$\tau = Qe + R\varepsilon, \quad (16)$$

де  $e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$  є деформацією в пружному каркасі,  $\varepsilon = U_{i,i}$  і  $e = u_{i,i}$  є дилатацією в твердій та рідкій фазах відповідно.

Переміщення точок твердої та рідкої фаз, що входять до складу рівнянь, між собою є залежними. Переміщення в рідкому заповнювачі визначаються виразом:

$$U_i = \frac{\tau_{,i} + X_i' + (i\omega b + \omega^2 \rho_{12})u_i}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (17)$$

Аналогію між термопружністю та поропружністю для гармонічної в часі поведінки помітив ще G.Bonnet. Надалі еквівалентність використовував у своїх працях J.Dominguez.

Для тривимірної поропружності матриця фундаментальних розв'язків за аналогією з термопружністю може бути представлена у вигляді сукупності чотирьох частин, які записуються наступним чином:

– переміщення в напрямі осі  $x_k$  точок пружного простору від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі  $x_j$ :

$$U_{jk}^*(r, \omega) = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 a_m(\omega) [\delta_{jk} U_0(r, \omega, m) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m)], \quad k, j, l=1, 2, 3 \quad (18)$$

де  $r$  – це відстань між точкою, в якій визначається переміщення, та точкою, де діє зосереджена сила,

$$U_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [i\lambda_m(\omega)r - 1], \quad (19)$$

$$U_2(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2]. \quad (20)$$

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - k_1^2}{4\pi\rho^*\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_2(\omega) = \frac{k_1^2 - \lambda_1^2}{4\pi\rho^*\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_3(\omega) = -\frac{1}{4\pi\rho^*\omega^2}$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho^*\omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega\eta^*\gamma^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\rho^*\omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*},$$

$$\lambda_3^2(\omega) = -\frac{\rho^*\omega^2}{\mu}, \quad k_1^2(\omega) = -\frac{\rho^*\omega^2}{\lambda + 2\mu},$$

де  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – це в гармонічній поропружності хвильові числа двох видів поздовжньої хвилі, в той час як  $\lambda_3 \in$  хвильовим числом поперечної хвилі;

– напруження в рідині, яке виникає від дії тієї ж одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі  $x_j$ :

$$U_{4k}(r, \omega) = \frac{i\omega\eta^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)]; \quad (21)$$

– переміщення в напрямі осі  $x_k$  точок пружного простору від дії масових сил

$X_i^* = \left[ \frac{-1}{4\pi r} \right]_{,i}$  та  $X_i^* = \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} X_i^*$  що прикладені до рідкого заповнювача та

пружного скелету відповідно:

$$U_{j4}(r, \omega) = \frac{\gamma^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,j} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]; \quad (22)$$

– напруження в рідині, спричинене прикладеними до рідкого заповнювача та пружного каркасу масовими силами  $X_i^*$  та  $X_i^*$ :

$$U_{44}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)r} [(\lambda_2^2 - k_1^2)e^{i\lambda_2(\omega)r} - (\lambda_1^2 - k_1^2)e^{i\lambda_1(\omega)r}]. \quad (23)$$

Шляхом диференціювання отримуємо напруження в пружному середовищі на площинках з нормаллю  $\mathbf{n}$ .

– напруження від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі  $x_k$ :

$$\begin{aligned} T_{jk}(r, \omega) = & \frac{1}{4\pi} \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right) r \cdot U_0(r, \omega, 3) + \\ & + \sum_{m=1}^3 \left( \lambda \lambda_m^2 \alpha_m - i\omega \gamma^* \frac{Q}{R} \beta_m \right) r r_{,k} n_j U_0(r, \lambda_m) - \\ & - 2\mu \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right) \frac{1}{r} U_2(r, \lambda_m) - \sum_{m=1}^3 \alpha_m r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} T_3(r, \lambda_m) \right\} \end{aligned} \quad ; \quad (24)$$

— нормальне переміщення в рідині від дії одиничної зосередженої сили, прикладеної до пружного каркасу вздовж осі  $x_k$ :

$$T_{4k}(r, \omega) = \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12})U_{jk} n_j - \frac{\partial U_{4k}}{\partial n}}{(i\omega b + \omega^2 \rho_{22})}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{4k}(r, \omega)}{\partial n} = & \frac{i\omega \eta^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \{n_k [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)] + \\ & + r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]\} \end{aligned} \quad ; \quad (26)$$

— напруження в каркасі від дії масових сил, що прикладені до рідкого заповнювача  $X_i^*$  та пружного скелету  $X_i^*$ :

$$\begin{aligned} T_{j4}(r, \omega) = & \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)r} \left\{ \frac{n_j}{R} [e^{i\lambda_2(\omega)r} A(r, \omega, 2) - e^{i\lambda_1(\omega)r} A(r, \omega, 1)] + \right. \\ & \left. + 2\mu\gamma^* \left[ n_j [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)] - r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} [U_2(r, \omega, 1) - U_2(r, \omega, 2)] \right] \right\} \quad ; \quad (27) \\ A(r, \omega, m) = & \lambda_m^2 (R\gamma^* \lambda - Q\lambda - 2Q\mu) + Q\rho^* \omega^2 \end{aligned}$$

— нормальне переміщення в рідині, спричинене прикладеними до тіла масовими силами  $X_i^*$  та  $X_i^*$ :

$$T_{44}(r, \omega) = \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12})U_{j4} n_j - \frac{\partial U_{44}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}}{(i\omega b + \omega^2 \rho_{22})}. \quad (28)$$

$$\frac{\partial U_{44}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)r} \frac{\partial r}{\partial n} [(\lambda_2^2 - k_1^2)U_0(r, \omega, 2) - (\lambda_1^2 - k_1^2)U_0(r, \omega, 1)]. \quad (29)$$

В третьому розділі розробляються алгоритми розрахунку переміщень і напружень пористих елементів конструкцій під дію динамічного навантаження та проведена перевірка правильності і достовірності отриманої методики шляхом розв'язання тестових задач.

Здійснено порівняння значень параметрів напружено-деформованого стану точок границі кругового отвору в пружному та поропружному середовищах при розповсюдженні циліндричних хвиль. В якості вихідних даних взяті параметри матеріалу, характерні для піщаника: константи Ляме  $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu=6 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; коефіцієнт дисипації  $b=0.19 \cdot 10^9 \text{ кг/(с} \cdot \text{м}^3)$ , ефективні щільності середовища  $\rho_{11}=2418 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{22}=340 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{12}=-150 \text{ кг/м}^3$ .

Оскільки між системою диференціальних рівнянь для усталених гармонічних коливань двофазного поропружного середовища

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho^* \omega^2 u_j - \gamma^* \tau_{,j} = 0, \quad (30)$$

$$\tau_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa^*} \tau + i\omega \eta^* \dot{u}_{k,k} = 0, \quad (31)$$

та диференціальними співвідношеннями, які описують усталені коливання однорідного термопружного середовища за відсутності внутрішніх теплових джерел

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho \omega^2 u_j - \gamma \theta_{,j} = 0, \quad (32)$$

$$\theta_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa} \theta + i\omega \eta u_{k,k} = 0, \quad (33)$$

є подібність, при розв'язанні задачі доцільно використати загальну методику, розроблену W.Nowaski. Хоча фізичні співвідношення Дюгамеля-Неймана помітно відрізняються від рівняння (15), є можливість при дослідженні циліндричних хвиль скористатись методикою та проміжними результатами, отриманими при розв'язанні відповідної задачі термопружності.

Результати обчислення в точках границі нормованих параметрів НДС  $u_r \mu / a q_0$  та  $\sigma_{\theta\theta} / q_0$  відповідно при різних значеннях частоти коливань  $\omega$  наведені на рис. 1, 2.

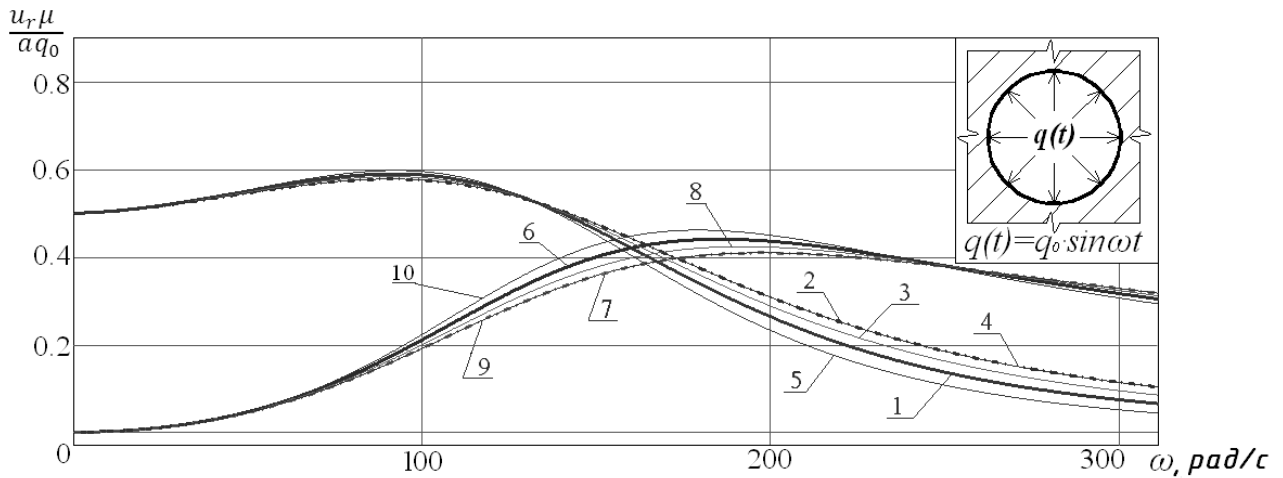


Рис. 1. Нормовані радіальні переміщення точок границі.

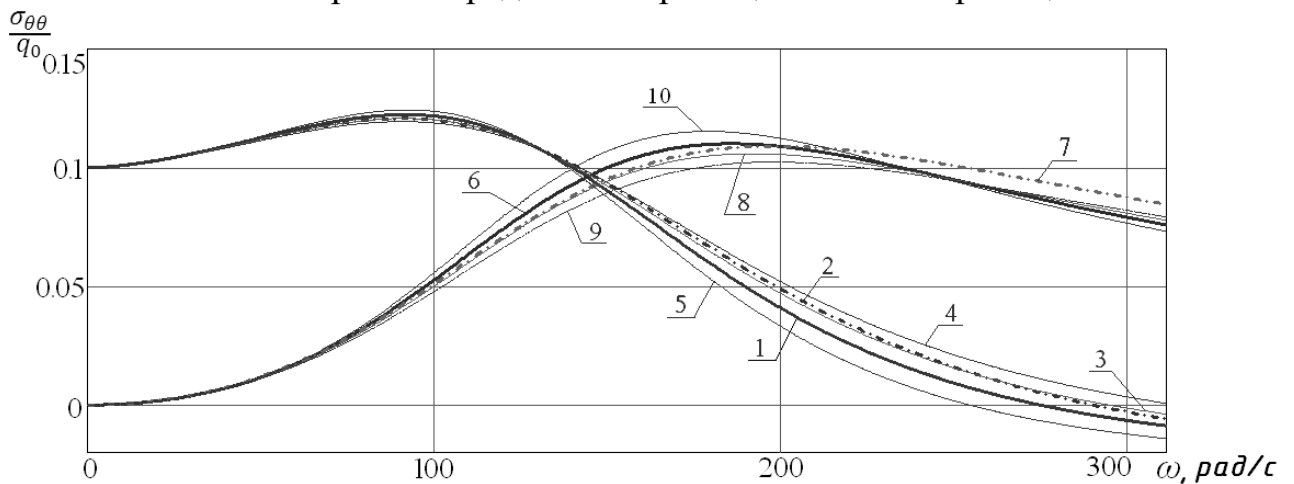


Рис. 2. Нормовані тангенціальні нормальні напруження на границі отвору.

На рисунках цифрами 1 і 6 позначені графіки дійсних і уявних частин відповідних параметрів НДС, обчислених за умови, що  $\beta=0,19$ ,  $Q/R=0,32$ . Цифрами 2 і 7 позначені криві, що відповідають параметрам НДС пружної області, в якій пори відсутні. Позначки 3 і 8 відповідають графікам, побудованим при  $\beta=0,1$ ,  $Q/R=5$ , а позначки 4 і 9 – при  $\beta=0,01$ ,  $Q/R=0,800$ . Нарешті, криві з позначками 5 і 10 отримані при значеннях параметрів  $\beta=0,4$ ,  $Q/R=0,32$ . Як бачимо, найбільший вплив пористість середовища справляє на дійсні частини параметрів НДС в діапазоні частот  $140 \div 200 \text{ рад/с}$ , а на уявні частини – при частотах коливань  $180 \div 280 \text{ рад/с}$ .

Розглянуті питання, пов'язані з обчисленням сингулярних інтегралів. Оскільки компоненти  $U_0$ ,  $U_2$ ,  $T_3$ ,  $T_0$ , що входять до складу фундаментальних розв'язків та їх узагальненої похідної задачі тривимірних термопружних та поропружних коливань, містять у знаменниках величини  $r^3$  та  $r^4$ , то безпосереднє чисельне інтегрування виразів (19), (20) та виразів:

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} \left[ \frac{\rho\omega^2}{2\mu} r^2 - \lambda_m^2 r^2 - i\lambda_m r + 1 \right]. \quad (34)$$

$$T_3(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4} \left[ -i\lambda_m^3 r^3 + 6\lambda_m^2 r^2 + 15i\lambda_m r - 15 \right], \quad (35)$$

$$\frac{U_2}{r}(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4} \left[ 3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2 \right]. \quad (36)$$

по граничним елементам, де розташований полюс, є неможливим. Для подолання цієї перешкоди було використано розкладання даних величин в ряд Маклорена. Оскільки величини  $U_0$ ,  $U_2$ ,  $T_3$  у виразах для фундаментального розв'язку множиться на відповідне  $\alpha_m(\omega)$ ,  $m=1,2,3$ , і всі три добутки складаються, причому  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ , то в результаті будемо мати:

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot r^{(n-2)}}{(n+1)!}, \quad (37)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot (n-2) \cdot r^{n-2}}{(n+1)!}, \quad (38)$$

$$U_{kj}(r, \omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot r^{n-2}}{(n+1)!} \left[ \delta_{kj} + (n-2)r_{,j} r_{,k} \right], \quad (39)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot r^{n-3}}{(n+1)!}. \quad (40)$$

Отримані вирази містять у знаменниках величини  $r$  у степені, не вищому за перший, а вираз (40) – у степені, не вищому за другий, тобто сингулярність цих виразів співпадає із особливостями відповідних ядер задачі статки, отже, їх інтегрування не становить труднощів.

В свою чергу у вираз для узагальненої похідної входить не просто  $T_0$ , а різниця  $[T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$ , представлення якої рядом Маклорена має вигляд:

$$T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1) = \sum_{n=1}^N [(i\lambda_1(\omega)r)^{(n+1)} - (i\lambda_2(\omega)r)^{(n+1)}] \cdot r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + \\ + 0.5(\lambda_3(\omega))^2 \sum_{n=1}^N [(i\lambda_1(\omega))^n - (i\lambda_2(\omega))^n] \cdot r^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \quad (41)$$

Результати обчислень безрозмірних величин  $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$ ,  $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m)$ ,  $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \mathcal{F}_3(r, \omega, m)$ ,  $r^3 [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$  за допомогою точних формул та отриманих наближених виразів (37), (38), (40), (41) при різній кількості членів ряду і різних значеннях безрозмірного параметра частоти  $\frac{\omega r}{C_2}$  наведені в таблицях 2-5. В процесі обчислень використовувались такі значення фізико-механічних характеристик:  $\lambda = \mu = 8 \cdot 10^{10}$  Па,  $\alpha_i = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 2 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{c}$ ,  $\lambda_0 = 30 \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $\rho = 7800 \text{кг}/\text{м}^3$ ,  $r = 0,5 \text{м}$ .

Таблиця 2 – Результати обчислень величини  $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(19),	(37) M=4	(37) M=8	(37) M=12	(19)	(37) M=4	(37) M=8	(37) M=12
0.4	0.053	0.053	0.053	0.053	0.0086	0.0086	0.0086	0.0086
1.2	0.047	0.047	0.047	0.047	0.025	0.026	0.025	0.025
2	0.037	0.036	0.037	0.037	0.038	0.043	0.038	0.038
6	-0.037	-0.106	-0.04	-0.037	0.033	0.129	0.04	0.033

Таблиця 3 – Результати обчислень величини  $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m)$

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(20)	(38) M=4	(38) M=8	(38) M=12	(20)	(38) M=4	(38) M=8	(38) M=12
0.4	-0.054	-0.054	-0.054	-0.054	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$
1.2	-0.06	-0.06	-0.06	-0.06	-0.0021	-0.0022	-0.0021	-0.0021
2	-0.068	-0.071	-0.068	-0.068	-0.0092	-0.0096	-0.0092	-0.0092
6	-0.038	-0.213	-0.05	-0.038	-0.128	-0.269	-0.134	-0.128

Таблиця 4 – Результати обчислень величини  $4\mu r^2 \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m)$ 

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(35)	(40) M=4	(40) M=8	(40) M=12	(35)	(40) M=4	(40) M=8	(40) M=12
0.4	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$
1.2	-0.335	-0.334	-0.335	-0.335	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$7.1 \cdot 10^{-12}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$
2	-0.362	-0.357	-0.362	-0.362	-0.003	$1.2 \cdot 10^{-11}$	-0.003	-0.003
6	-0.718	-0.641	-0.562	-0.715	-0.423	$1.22 \cdot 10^{-9}$	-0.356	-0.422

Таблиця 5 – Результати обчислень величини  $r^3 [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$ 

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(34)	(41) M=4	(41) M=8	(41) M=12	(34)	(41) M=4	(41) M=8	(41) M=12
0.4	1.013	1.013	1.013	1.013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
1.2	1.116	1.116	1.116	1.116	0.034	0.034	0.034	0.034
2	1.296	1.297	1.296	1.296	0.154	0.154	0.154	0.154
6	1.328	2.128	1.333	1.328	2.777	3.068	2.778	2.777

З таблиць видно, що при збільшенні кількості членів ряду до 8-и або 12-и значення вищенаведених величин, які отримані за допомогою виразів з використанням розкладу в ряд Маклорена, співпадають зі значеннями, отриманими за допомогою точних виразів. Це говорить про надійність одержаних даних.

У випадку, коли граничний елемент  $\Delta_n$  є плоским, для обчислення сингулярних частин інтегралів можна отримати досить компактні вирази:

$$\int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \frac{\delta_{jk}}{2i\lambda_3 \mu} (e^{i\lambda_3 R} - 1) - \pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left\{ \delta_{kj} \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 1) + n_j n_k \left[ \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right] \right\}. \quad (42)$$

$$\int_C T_{j4}(P, Q) d\Gamma = \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ e^{i\lambda_2 R} \left[ \frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_2} \right] - e^{i\lambda_1 R} \left[ \frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1} \right] + 0.5i\lambda_3^2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right\}, \quad (43)$$



$$\int_C \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma = \frac{i\omega\eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{e^{i\lambda_2 R} - e^{i\lambda_1 R}}{R} + i\lambda_1 - i\lambda_2 \right]. \quad (44)$$

Інтеграли по кругу від компонент фундаментального розв'язку  $U_{j4}$ ,  $U_{4k}$ ,  $\frac{\partial U_{44}}{\partial n}$  та узагальненої похідної  $T_{jk}$  дорівнюють нулю:

$$\int_C \frac{U_{k4}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = 0, \quad \int_C \frac{U_{4j}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = 0, \quad \int_C \frac{\partial U_{44}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = 0, \quad \int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = 0.$$

Наведені результати представляють собою систему співвідношень для визначення сингулярних частин інтегралів, за допомогою яких ефективно обчислюються діагональні компоненти алгебраїчного аналога системи інтегральних рівнянь гармонічних термопружних коливань.

Виконане визначення значень параметрів напружено-деформованого стану точок сферичної порожнини в термопружному середовищі при розповсюдженні гармонічних хвиль. Параметри середовища:  $\lambda = \mu = 8 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha_t = 1,5 \cdot 10^{-4}$  град<sup>-1</sup>,  $\lambda_0 = 30$  Вт/(м·град),  $\kappa = 2 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Радіус порожнини  $a = 3$  м.

Алгоритмічну основу для розв'язання задачі методом ГІР складають рівняння, які з урахуванням центральної симетрії можуть бути записані у вигляді:

$$u_R(a) \left[ \frac{1}{2} + \int_{\Gamma} n_k(P) n_j(Q) T_{jk}(P, Q) d\Gamma \right] - t_R \int_{\Gamma} n_k(P) n_j(Q) U_{jk}(P, Q) d\Gamma =$$

$$= \frac{\gamma}{i\omega\eta} \left[ \theta_a \int_{\Gamma} n_k(P) \frac{\partial U_{4k}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma - \frac{\partial \theta}{\partial n} \int_{\Gamma} n_k(P) U_{44}(P, Q) d\Gamma \right], \quad (45)$$

$$\theta_a \left[ \frac{1}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial U_{44}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma \right] - \frac{\partial \theta}{\partial n} \int_{\Gamma} U_{44}(P, Q) d\Gamma =$$

$$= -\frac{i\omega\eta}{\gamma} \left[ u_R(a) \int_{\Gamma} n_j(Q) T_{j4}(P, Q) d\Gamma - t_R \int_{\Gamma} n_j(Q) U_{j4}(P, Q) d\Gamma \right]. \quad (46)$$

На рис. 3 а) цифрами 1 і 2 відмічені графіки значень, які обчислені аналітично, дійсної та уявної частин нормованої функції граничних радіальних навантажень  $t_R^{norm} = \frac{t_R}{\mu m \theta_a} \cdot 10^5$ , цифрами 3 і 4 – нормальної похідної температури

$\frac{\partial \theta_R^{norm}}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{a}{\theta_a} \cdot 10^{-4}$ , в залежності від безрозмірного параметру частоти

$p = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$  у випадку, якщо на границі порожнини заданий рівномірний розподіл температури та відсутні переміщення:  $u_R(a) = 0$ ,  $\theta(a) = \theta_a$ .

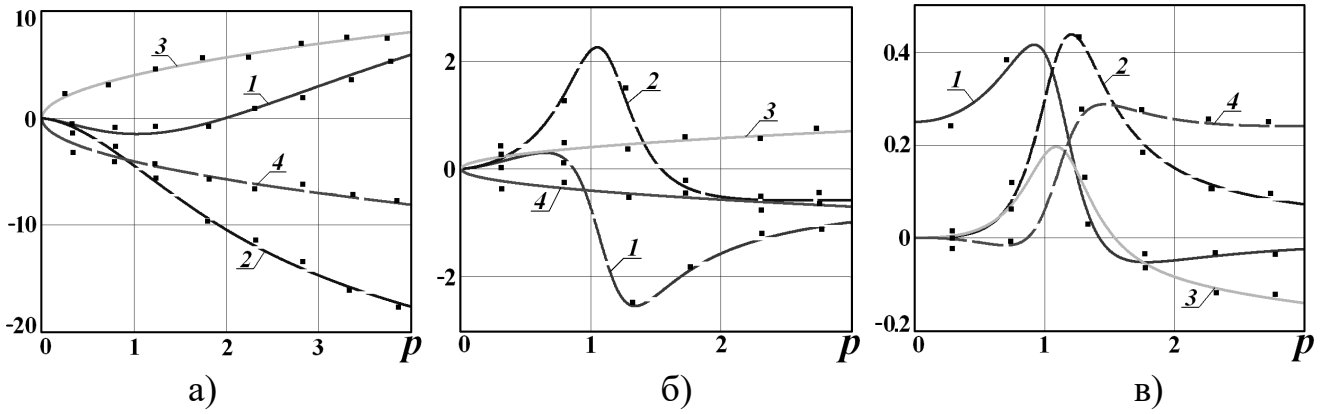


Рис. 3. Графіки зміни нормованих значень параметрів НДС

Графіки нормованих значення амплітуд граничних переміщень  $u_R^{norm} = \frac{u_R(a)}{a m \theta_a} \cdot 10^5$  та нормальної похідної температури  $\frac{\partial \theta^{norm}}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{a}{\theta_a} \cdot 10^{-4}$ ,

наведені на рис. 3б), відповідають випадку, коли у всіх точках границі амплітуди температури однакові і дорівнюють  $\theta_a$ , а силові навантаження відсутні ( $t_R=0$ ). Якщо ж на границі порожнини відсутні коливання температури, а амплітуди радіальних силових навантажень мають в усіх точках границі однакові значення,

то графіки нормованих величин  $u_R^{norm} = \frac{u_R(a) \mu}{a t_R}$  та  $\frac{\partial \theta^{norm}}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\mu n}{t_R} \cdot 10^{-5}$  мають вигляд, представлений на рисунку 3в).

Значення, отримані за допомогою МГР, позначені на графіках точками. Збіжність значень, отриманих з використанням двох різних способів, свідчить про коректність всіх проміжних і остаточних результатів застосування МГР.

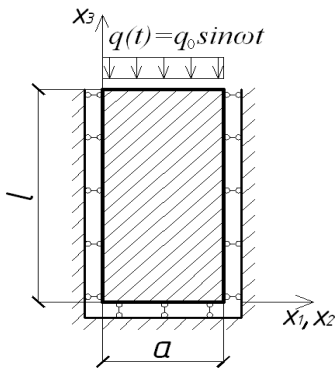


Рис. 4.

Розглянуто задачу про гармонічні коливання поропружного шару з піщаника при дії рівномірно розподіленого навантаження (рис. 4). Вихідні дані:  $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu=6 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ;  $\beta=0.19$ ,  $\rho_{11}=2418 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{22}=340 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{12}=-150 \text{ кг/м}^3$ ,  $Q=1.399 \text{ Па}$ ,  $R=0.444 \text{ Па}$ ,  $b=0.19 \cdot 10^9 \text{ кг/(с} \cdot \text{м}^3)$ . Система диференціальних рівнянь для усталених гармонічних коливань має вигляд (30)-(31). Рівняння МГР для динамічної задачі тривимірної лінійної поропружності при дії нульових об'ємних сил матимуть вигляд:

$$c_{ij} u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_j^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{nj}^* d\Gamma, \quad (47)$$

$$\frac{c\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} + \int_{\Gamma} (t_{ij}^* u_i + \tau_j^* U_n) d\Gamma = \int_{\Gamma} [t_i u_{ij}^* + \tau U_{nj}^*] d\Gamma. \quad (48)$$

За заданих умов закріплення та навантаження у колоні не виникають переміщення  $u_1, u_2, U_1, U_2$ , а переміщення  $u_3$  та компоненти напруженого стану  $\sigma_{ij}, \tau$  є функціями лише координати  $x_3$ .

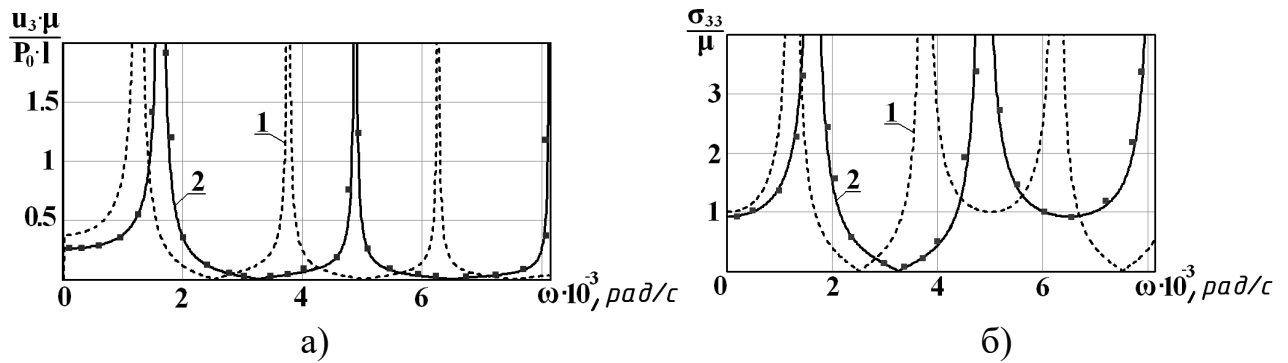


Рис. 5. Графіки залежності значень переміщень та напружень від частоти  $\omega \cdot 10^3$ .

На рисунках 5а) і 5б) представлені графіки зміни значень переміщень  $u_3$  та напружень  $\sigma_{33}$  в точках границі колони в та пружній області (крива з позначкою 1) та пружному каркасі поропружної області (крива з позначкою 2) в діапазоні частоти  $\omega$  від 0 до  $5\omega_1$ , де  $\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E_u}{\rho}}$ ,  $E_u = \frac{2\mu(1-\nu_u)}{(1-2\nu_u)}$ ,  $l$  – висота шару у випадку:

$$u_3(0) = 0, U_3(0) = 0, \sigma_{33}(l) = -P_0, \tau(l) = 0_0.$$

За інших граничних умов:  $u_3(0) = U_0$ ,  $U_3(0) = -m\omega^2 U_0(\rho_{12} + \rho_{22})$ ,  $\sigma_{33}(l) = 0$ ,  $\tau(l) = 0$  графіки зміни значень переміщень  $u_3$  та напружень  $\sigma_{33}$  в пружній області (1) та пружному каркасі поропружної області (2) в аналогічному діапазоні частоти  $\omega$  наведені на рисунку 6а) та 6б).

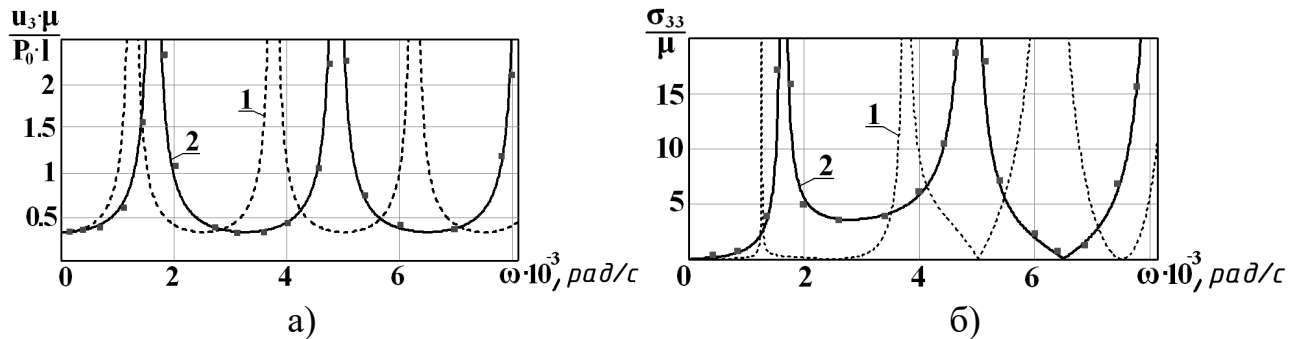


Рис. 6. Графіки залежності значень переміщень та напружень від частоти  $\omega \cdot 10^3$ .

З рисунків видно, що графіки переміщень та напружень в пружній області та пружному скелеті поропружної області мають однаковий характер, але відрізняються значеннями в залежності від величини частоти коливань  $\omega$ . Це свідчить про те, що тіло, в якому містяться пори, не можна моделювати як суцільне однорідне пружне середовище, а необхідно застосовувати двофазну модель та рівняння поропружності. Ці особливості слід враховувати при проєктуванні споруд з пористих матеріалів та при моделюванні реальної поведінки споруд в умовах експлуатації. Точками на графіках зображені значення, отримані за допомогою МГІР. Значення, отримані різними способами, добре узгоджуються.

В четвертому розділі проведено апробацію можливостей розробленого алгоритму на прикладі задачі про еволюцію напружено-деформованого стану в точках границі підземних нафтових резервуарів, спричинену вибухом в одному зі сховищ.

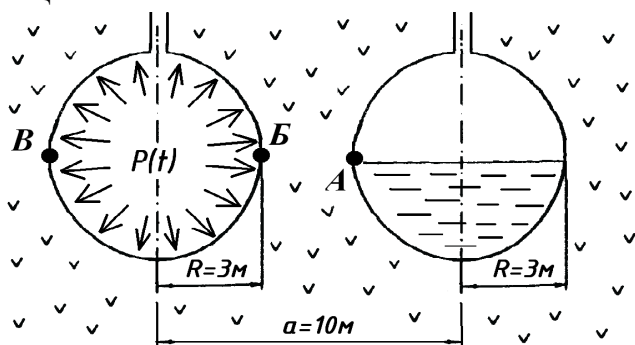


Рис.7. Два сферичних резервуари, в одному з яких відбувається вибух

Обидві ємності сферичної форми радіусом  $R=3\text{м}$  розташовані в покладах піщаника з параметрами:  $\lambda=4\cdot 10^9\text{Па}$ ,  $\mu=1,3\cdot 10^9\text{Па}$ ,  $\nu_u=0.31$ ;  $\alpha=0,65$ ;  $\rho_s=2360\text{кг/м}^3$ ,  $\rho_f=1000\text{кг/м}^3$ . Відстань між центрами порожнин становить 10 м (рис. 7).

Залежність від часу тиску на границю ємності, в якій стався вибух моделюється функцією:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ A \cdot t \cdot \exp(-\beta t^2) & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (49)$$

Параметри  $A=5,83\cdot 10^{11}\text{ Па/с}$ ;  $\beta=4,5\cdot 10^5\text{ с}^{-2}$  отримані експериментальним шляхом.

Функцію навантаження можна представити відрізком ряду Фур'є:

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{\pi k}{l} t + b_n \sin \frac{\pi k}{l} t \right), \quad (50)$$

де коефіцієнти  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  визначаються за формулами:

$$a_0(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l P(t) dt,$$

$$a_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l P(t) \cos \frac{\pi k t}{l} dt,$$

$$b_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l P(t) \sin \frac{\pi k t}{l} dt.$$

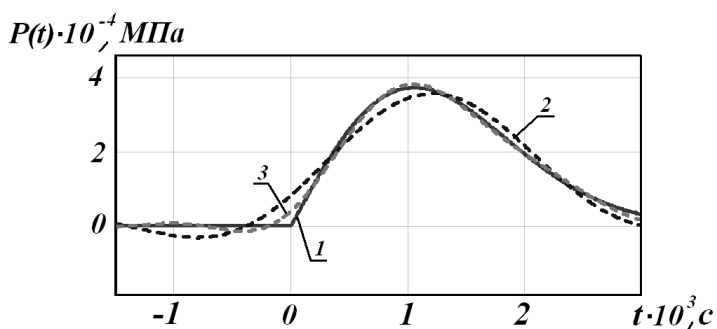


Рис.8. Графіки функції навантаження  $P(t)$ .

На рисунку 8 зображені графіки функції навантаження  $P(t)$ , які побудовані з використанням точної формули (49) – крива з позначенням 1, та за допомогою виразу (50) при кількості членів ряду 2 і 4 (криві з позначеннями 2 і 3 відповідно).

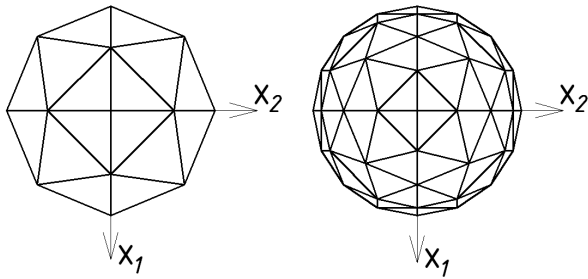


Рис.9. Граничноелемента сітка.

При чисельному дослідженні задачі за загальною граничноелементною методикою поверхні обох порожнин подаються як сукупність тридцяти двох та ста двадцяти восьми (при згущенні сітки) плоских не викривлених трикутників (рис. 9).

Частиною сховища, яка стосується свердловини, нехтуємо при проведенні розрахунків, оскільки її діаметр набагато менший за діаметр самої ємності. Відповідно, надалі розглядається лише сферична частина резервуару.

В результаті розв'язання задачі були отримані дані про зміну значень параметрів НДС в характерних точках А, Б та В (рис. 7). Точка А є граничною точкою сферичної ємності, переміщення та напруження в якій змінюються від дії вибуху в сусідньому сховищі; точка Б належить порожнині, в якій відбувається вибух; точка В розташована на границі резервуару, в якому відбувається вибух, та є більш віддаленою від другої ємності, ніж точка Б, на відстань  $2R=6\text{м}$ .

Чисельні результати показали, що найбільших значень переміщення та напруження в граничних точках набувають із деяким запізненням по відношенню до моменту, коли досягає максимуму вибуховий тиск. Графіки зміни значень радіальних переміщень  $u_r$  у характерних точках, одержані з використанням 128-елементної граничноелементної сітки, в часовому діапазоні від  $3 \cdot 10^{-4}\text{с}$  до  $3,7 \cdot 10^{-3}\text{с}$  наведені на рисунках 10а), 11а), 12а). Криві під номером 1 позначають переміщення в пористому насиченому середовищі при дії вибуху в лівій ємності, крива 2 – аналогічні переміщення в пружній області (без урахування пористої структури матеріалу). На рисунках 10б), 11б), 12б) представлені графіки зміни значень кільцевих нормальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в часовому діапазоні від  $5 \cdot 10^{-4}\text{с}$  до  $3,7 \cdot 10^{-3}\text{с}$ , які виникають у вищевказаних характерних точках в результаті дії вибуху в лівій ємності в пружно-пористій насиченій породі (крива з позначкою 1) та в пружному середовищі (крива з позначкою 2).

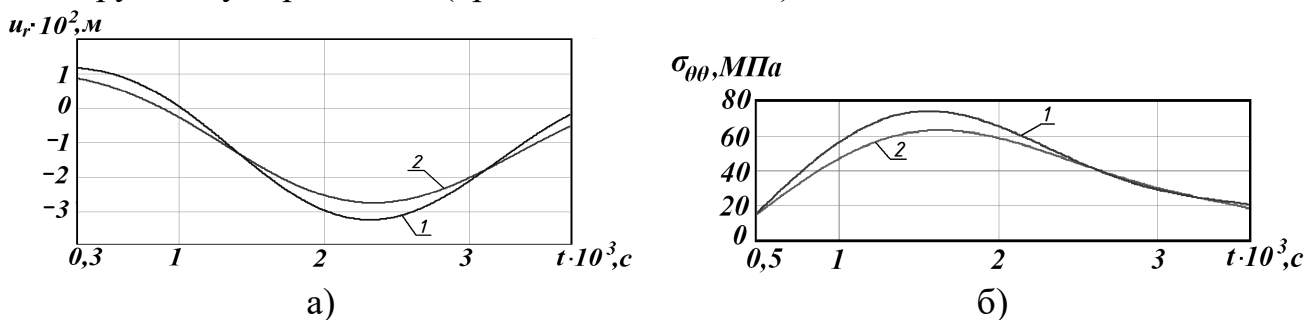


Рис.10. Графіки зміни значень граничних радіальних переміщень  $u_r$  та кільцевих нормальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в точці А.

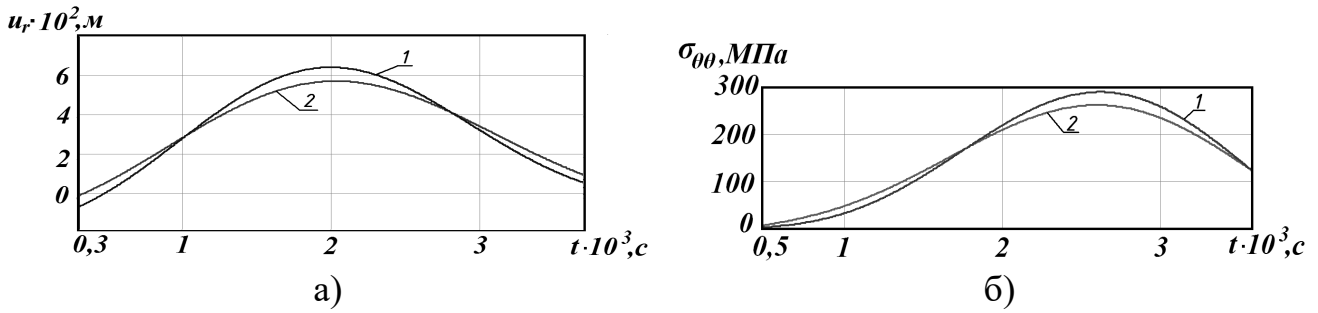


Рис.11. Графіки зміни значень граничних радіальних переміщень  $u_r$  та кільцевих нормальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в точці Б.

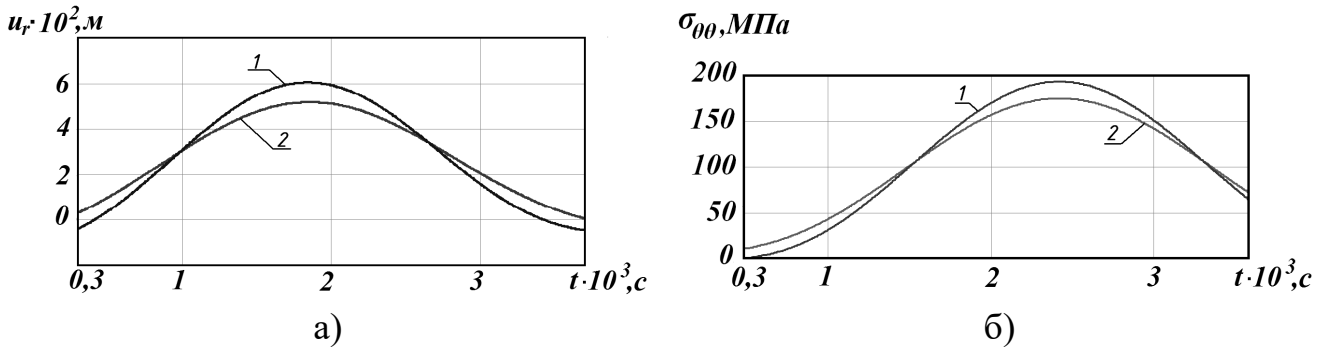


Рис.12. Графіки зміни значень граничних радіальних переміщень  $u_r$  та кільцевих нормальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в точці В.

Аналіз представлених чисельних результатів показує, що наявність пор в матеріалі та присутність в них рідкого заповнювача сприяють збільшенню амплітудних значень параметрів НДС радіальних переміщень та кільцевих нормальних напружень в граничних точках підземних резервуарів в середньому на 10% для точок порожнини, в якій відбувається вибух та на 20% для точки, яка належить другій порожнині.

## ВИСНОВКИ

1. На основі методу граничних інтегральних рівнянь розроблено ефективну методику аналізу і дослідження хвильових процесів в пружно-пористих насичених рідиною масивних тілах складної форми.

2. В процесі виконання дослідження були отримані наступні результати роботи:

- побудовані на основі методу граничних інтегральних рівнянь розрахункові співвідношення для розв'язування просторових динамічних задач про поширення хвиль в поропружних насичених рідиною середовищах, які забезпечують високу точність результатів при мінімальних обчислювальних витратах

- отримано нові вирази для визначення узагальненої похідної фундаментальних розв'язків тривимірної поропружності, які входять до складу граничних інтегральних рівнянь;

- розроблено та реалізовано чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання поропружних об'єктів;

- для випадку розташування полюсу інтегрування на плоских елементах границі виведені вирази для обчислення сингулярних частин граничних інтегралів;

- проведено апробацію запропонованого алгоритму визначення параметрів динамічного напружено-деформованого стану пористих насичених рідиною середовищ шляхом співставлення результатів розрахунку тестових задач з аналітичними розв'язками;

- отримано розв'язок практичної задачі про еволюцію динамічних полів переміщень та напружень в поропружному просторі, який містить дві сферичні ємності для зберігання вуглеводнів; встановлений вплив пористості та заповнювача на зміну значень параметрів напружено-деформованого стану в граничних точках, коли в одній з ємностей стається вибух.

3. Ефективність та достовірність розробленої методики підтверджена розв'язанням задач при різних граничних умовах та зовнішніх навантаженнях. Запропонований підхід реалізований у вигляді програмного засобу, орієнтованого на використання персональними комп'ютерами.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

а) *статті, що включені до наукових періодичних видань інших держав, та у наукових фахових виданнях України, що включені до міжнародних наукометричних баз:*

1. Ворона Ю.В. Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання динамічних задач термопружності / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 96. – С. 74-87.
2. Kara I.D. Numerical solution of the problem of porous solids vibration // Strength of Materials and Theory of Structures. – К.: KNUBA, 2017. – № 99. – P. 193 – 202.
3. Ворона Ю.В. Граничноелементна методика дослідження коливань пружних масивів з урахуванням випадкового характеру констант матеріалу / Ворона Ю.В., Кара І.Д., Щербій В.І. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 59-70.
4. Ворона Ю.В. Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.
5. Kara I.D. Peculiarities of wave propagation processes in poroelastic media // Strength of Materials and Theory of Structures. – К.: KNUBA, 2020. – Issue 105. – P. 247-254.

б) *статті в наукових фахових виданнях України:*

6. Ворона Ю.В. Розповсюдження циліндричних хвиль у поропружному середовищі / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 93. – С. 146-152.

в) *публікації по доповідям на міжнародних та вітчизняних конференціях:*

7. Кара І.Д. Методика дослідження коливань поропружних об'єктів за методом граничних інтегральних рівнянь / І.Д. Кара // Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: II Міжнародна науково-практична конференція, 26-27 вересня 2018 р.: програма та тези доповідей – К.: 2018. – С. 54-56.



## АНОТАЦІЯ

**Кара І.Д. Чисельна реалізація методу граничних інтегральних рівнянь для аналізу хвильових процесів у насичених рідиною пористих середовищах. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. Київський національний університет будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України, Київ, 2021 р.

На основі методу граничних інтегральних рівнянь розроблено новий алгоритм для аналізу коливань та напружено-деформованого стану пористих насичених рідиною середовищ з урахуванням дії змінного в часі динамічного навантаження.

В роботі на основі здійсненого аналітичного огляду наукових праць, пов'язаних з напрямом дослідження, наведені особливості розрахунку пружно-пористих насичених рідиною середовищ. За базис для моделювання процесів усталених гармонічних коливань поропружних тіл взяті співвідношення теорії Біо для двофазного насиченого середовища, де тверді елементи пористого скелету відносяться до першої фази, часточки рідкого флюїду – до другої фази. В роботі наведені вихідні співвідношення, граничні інтегральні рівняння теорії поропружності, матриця фундаментальних розв'язків. Виведені співвідношення узагальненої похідної фундаментальних розв'язків для тривимірної гармонічної поропружності. Отримані з використанням розвитку в ряд Маклорена співвідношення для визначення сингулярних частин інтегралів по колу, які входять до складу фундаментальних розв'язків. Розроблені алгоритми розрахунку переміщень і напружень пористих елементів конструкцій під дію динамічного навантаження та проведена перевірка правильності і достовірності отриманої методики шляхом розв'язання тестових задач.

Проведена програмна реалізація та апробація розробленого підходу на прикладі прикладної задачі. Отримані нові результати дослідження зміни динамічного напружено-деформованого стану точок стінок підземних резервуарів для зберігання вуглеводнів в результаті вибуху в одному із сховищ; встановлений вплив пористості та заповнювача на зміну значень параметрів напружено-деформованого стану в граничних точках ємностей.

**Ключові слова:** пористе середовище, динамічне навантаження, коливання, метод граничних інтегральних рівнянь, напружено-деформований стан, фундаментальні розв'язки, узагальнена похідна, сингулярність, розвиток в степеневий ряд.

## ABSTRACT

**Kara I.D. Numerical realization of the Boundary Integral Equations Method for analysis of wave processes in fluid-saturated porous media. – The qualifying paper manuscript copyright.**

The thesis for candidate of technical sciences degree on specialty 05.23.17 – structural mechanics. Kyiv National University of Construction and Architecture of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2021.

Using as the basis the boundary integral equations method the new algorithm for analyzing of the vibrations and the stress-strain state of the porous fluid-saturated media with account of the time-changed dynamic force is developed.

Peculiarities of numerical research of the elastic porous fluid-saturated media on the bases of the analytical literature review in the field of investigation are presented. The basis for modeling of the established harmonic vibrations processes of the poroelastic bodies are used Biot's interrelations for the two-phased saturated media where the porous solid's elements are belong to the first phase and the fluid's elements – to the second phase. The primary interrelations, the boundary integral equations of the poroelastic theory and the fundamental solutions matrix are presented. The interrelations of the fundamental solutions generalized derivative for the three-dimensional harmonic poroelasticity are obtained. The formulas for the singular parts of the circular integrals calculation which comprised to the fundamental solutions using the expansion in a Maclaurin series are derived. The algorithm for the displacements and stresses calculation of the porous structures elements under the dynamic force is developed; the checking of the correctness and credibility of the received technique during the test problems solving is done.

The software realization and approbation of the developed algorithm with the applied example were provided. The new results of the calculation of the dynamic stress-strain state of the underground reservoirs for the hydrocarbon storage warning elements after the burst in one of the reservoir were obtained; the influence of the porosity and the fluid filler to the quantities of the reservoirs boundary dots stress-strain state parameters was established.

**Keywords:** porous media, dynamic force, vibrations, boundary integral equations method, stress-strain state, fundamental solutions, generalized derivative, singularity, expansion in a power series.

**КАРА ІРИНА ДМИТРІВНА**

**ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ  
РІВНЯНЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У НАСИЧЕНИХ  
РІДИНОЮ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

05.23.17 – будівельна механіки

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Відповідальний за випуск  
д.т.н., доцент Михайловський Д.В.