

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

На правах рукопису

КОЗАК АНДРІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ПРО НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ
ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ**

05.23.17 – Будівельна механіка

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник: Ворона Юрій Володимирович,
кандидат технічних наук, доцент.

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Козак А.А. Чисельна реалізація методу граничних інтегральних рівнянь у задачах про нестационарні коливання пружних елементів конструкцій.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2021.

Зміст анотації

У першому розділі на підставі огляду літературних джерел надана оцінка теперішнього стану досліджень методу граничних інтегральних рівнянь та обґрунтовано напрямки досліджень.

В другому розділі розглянуті нестационарні коливання масивів з отворами. Отримані розв'язувальні співвідношення методу гранично-часових інтегральних рівнянь (МГЧІР) та побудовано алгоритм чисельного розв'язання задачі про розповсюдження в пружному середовищі зсувних хвиль. На основі побудованого алгоритму розроблена і програмно реалізована методика чисельного аналізу параметрів динамічного напружено-деформованого стану. Шляхом розв'язання тестових задач підтверджена достовірність чисельних результатів. Отримані співвідношення для дослідження нестационарних коливань масивних елементів конструкцій, які знаходяться в стані плоскої деформації. Розроблені і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження динамічних полів переміщень і напружень в таких об'єктах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи співвідношення МГЧІР, а друга базується на переході в частотну область. Для реалізації другого підходу запропонована та реалізована нова чисельно-аналітична методика до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів. Методика оснований на наближеному представленні компонент ядер інтегральних рівнянь відрізком степеневого ряду, причому перший член цього представлення має найсильнішу особливість і співпадає з відповідною компонентою статичного ядра,

інтегрування якої не становить труднощів.

В третьому розділі наведені результати застосування розроблених методик до розв'язання модельних задач про коливання простору з послабленнями. Отримано новий розв'язок задачі про нестационарні зсувні коливання простору, послабленого двома циліндричними отворами. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами. В стані плоскої деформації з використанням обох підходів проведений аналіз взаємного впливу двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження. Розглядалась реакція на дію імпульсів параболічного, трикутного та трапецеїдального вигляду. Співставлення результатів, отриманих за двома розробленими підходами, підтвердила їхню достовірність. Також була встановлена однакова ефективність обох підходів.

В четвертому розділі розв'язана прикладна задача про динамічний напружено-деформований стан пружного масиву, на який спирається трубопровід. Масив знаходиться в стані плоскої деформації, а ділянки його поверхні зазнають дії напівсинусоїдальних імпульсів. Встановлено, що в результаті прикладеного динамічного навантаження технологічні умови функціонування трубопроводу не порушуються.

Науковий новизна полягає в розробленні на основі теоретичного апарату методу потенціалу і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи ГЧІР, а друга використовує перехід в частотну область. Встановлена однакова ефективність обох підходів. Запропоновано та реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об'єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані. Отримані розв'язувальні співвідношення та побудовано алгоритм дослідження з використанням ГЧІР нестационарних зсувних коливань масивів з отворами. Отримані результати використано в Науково-дослідному інституті будівельної

механіки КНУБА при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в проектно-конструкторських та наукових установах у різних галузях народного господарства для визначення динамічного НДС відповідальних деталей та елементів конструкцій при нестационарному динамічному навантаженні.

Ключові слова: нестационарні коливання, зсувні деформації, плоско-деформовані пружні масиви, гранично-часові інтегральні рівняння, сингулярність, імпульсне навантаження.

Список публікацій здобувача

а) статті в наукових фахових виданнях України:

1. Ворона Ю.В. Граничноелементна методика дослідження динамічного НДС пружних масивів / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С // Опір матеріалів і теорія споруд. –2014. – Вип.93. С. 27-36.
2. Ворона Ю.В. Дослідження двовимірних нестационарних коливань пружних масивів з отворами / Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип.91. С. 133-146.
3. Ворона Ю.В. Двовимірний НДС пружного масиву з двома отворами при імпульсному навантаженні / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд. –2012 – Вип.90. С. 117-123.
4. Ворона Ю.В. Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з тріщинами / Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А // Опір матеріалів і теорія споруд. –2012 – Вип.89. С. 158-164.
5. Ворона Ю.В. Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд –2011 – Вип.88. С. 83-96.
6. Ворона Ю.В. Коливання двовимірних масивних тіл, послаблених тріщинами нормального відриву / Ворона Ю.В., Гончаренко М.В.,

Черненко О.С., Козак А.А // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2011 – Вип.87 С. 131-143.

б) статті, що включені в наукових періодичних видань інших держав, та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

7. Vorona Yu.V. Boundary element approaches to the problem of 2-D non-stationary elastic vibrations / Yu.V. Vorona, A.A. Kozak // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – К.: KNUBA, 2020. – Issue 104. – P. 321-327.

в) основні публікації по доповідям на міжнародних та вітчизняних конференціях

8. Козак А.А. Методика дослідження за методом граничних елементів динамічного напруженого стану масивів / А.А. Козак / Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, 1–3 листопада 2011 р: тези доповідей. – в 2х частинах. – ч.1. – К.: КНУБА, 2011 С.42-43.

9. Козак А.А. Методика дослідження нестационарних коливань двовимірних елементів конструкцій / А.А. Козак / Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, 6–8 листопада 2012 р: тези доповідей. – в 2х частинах. – ч.1. – К.: КНУБА, 2012 С.45.

10. Козак А.А. Розповсюдження пружних хвиль від циліндричного отвору при імпульсному навантаженні/ А.А. Козак / Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА, 7–8 листопада 2013 р: тези доповідей. – К.: КНУБА, 2013 С.43.

11. Ворона Ю.В. Исследование колебаний двумерных массивов с трещинами с помощью метода граничных элементов / Ю.В. Ворона, Е.С. Черненко, А.А. Козак // Математичні проблеми технічної механіки – 2012: міжнар.

наук. конф., 16–19 квітня 2012 р.: матеріали конф. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2012. – С. 111

12. Ворона Ю.В. Граничноэлементные подходы к задаче о двумерных нестационарных колебаниях упругих массивов / Ю.В. Ворона, А.А. Козак, Е.С. Черненко // Тр. VII Всероссийской (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. - Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. Т.1. – С. 139 – 143.

ЗМІСТ

Вступ.....	9
Розділ 1. Постановка і методи вирішення завдань динаміки масивних тіл.....	15
1.1 Основні співвідношення і рівняння динаміки континууму...	15
1.2. Аналітичні і чисельні методи розрахунку. Динамічне навантаження елементів конструкцій.....	23
Розділ 2. Методика застосування методу потенціалу для розв'язання задач про нестационарні коливання масивів з ослабленнями	42
2.1. Динамічний стан антиплоскої деформації.....	42
2.1.1. Фундаментальний розв'язок.....	43
2.1.2. Гранично-часове інтегральне рівняння.....	45
2.2. Задача про деформований стан пружного масиву, навантаженому одиничним імпульсом. Перехід в частотну область.....	51
2.3 Плоска деформація. Розповсюдження циліндричних пружних хвиль від кругової порожнини при імпульсному навантаженні. Чисельно-аналітичний розв'язок.....	56
2.4. Дослідження НДС лінійно пружних масивів при дії параболічного імпульсу.....	66
Розділ 3. Дослідження хвильових процесів в пружному середовищі з послабленнями.....	69
3.1. Скінченний елемент для моделювання пружнопластичних коливань просторових тіл	69
3.2. Плоска деформація. Двовимірні нестационарні коливання пружного простору з двома круговими циліндричними отворами один з яких піддається імпульсному навантаженні.....	71

3.3. Динамічна реакція двовимірного масиву, послабленого двома круговими отворами.....	77
3.4. Нестационарні коливання пружного простору з двома круговими циліндричними отворами. Перехід в частотну область.....	79
3.5. Взаємний вплив двох циліндричних порожнини при імпульсному навантаженні параболічної форми.....	84
3.6. Розв'язання задачі про взаємний вплив двох циліндричних отворів при імпульсному навантаженні трапецеїдальної симетричної форми в частотній області.....	88
Розділ 4. Застосування граничноелементної методики до дослідження динамічного НДС масивів під трубопроводом...	94
4.1 Загальні положення.....	94
4.2. Уточнення методики розрахунку.....	96
4.3 Задача про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення двома плоскими поверхнями.....	103
Висновки.....	109
Список використаних джерел.....	111
Додаток.....	129

ВСТУП

Дослідження хвильових процесів в пружних середовищах тісно пов'язані із сучасними задачами сейсмології, сейсморозвідки та проектування підземних споруд. При цьому задачі про деформацію пружних елементів складної форми вимагають для свого розв'язання залучення методів чисельного аналізу.

Найбільш широко розповсюдженим чисельним методом є метод скінченних елементів, що базується на представленні області, яку займає об'єкт розрахунку, сукупністю дискретних елементів простої структури. За допомогою цього методу в наш час проводиться переважна більшість чисельних розрахунків складних інженерних систем будь-якої вимірності.

Актуальність теми. Одним з ефективних методів розв'язання крайових і початково-крайових задач будівельної механіки, які описуються лінійними рівняннями з частинними похідними, є зведення їх до інтегральних рівнянь. Такий метод (він має назву метод потенціалу або метод граничних інтегральних рівнянь) є потужним теоретичним засобом, який широко застосовується для дослідження питань щодо існування та єдиності розв'язків крайових задач. Разом з тим, цей метод виявився ефективним засобом чисельного аналізу пружних об'єктів, особливо в тих випадках, коли необхідно дослідити параметри напружено-деформованого стану (НДС) лише на границі та в обмеженій зоні поблизу границі розрахункової області. Головна перевага методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) полягає в зниженні на одиницю розмірності задачі. При чисельній реалізації методу дискретизації піддається тільки границя, що особливо важливо, коли об'єкт розрахунку займає нескінченну область. Це зумовило широке застосування методу для розв'язання різних, головним чином, статичних та квазістатичних задач будівельної механіки. Зауважимо, що існує значна кількість важливих інженерних об'єктів, таких як довгі циліндричні тунелі, динамічне навантаження на які досить повільно змінюється по довжині. Динамічний НДС таких об'єктів варто розглядати саме в двовимірній постановці.

Аналіз літературних джерел виявив, з одного боку, недостатню кількість доступних публікацій, пов'язаних із застосуванням методу ГР до аналізу нестационарних коливальних процесів в пружних об'єктах, а з іншого боку, важливість вказаного напрямку досліджень для інженерної практики. Тому розробка ефективних засобів чисельної реалізації методу ГР у задачах про нестационарні коливання пружних елементів конструкцій є актуальною проблемою будівельної механіки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) і Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА (НДІБМ КНУБА) за темами ЗДБ-2013 «Теорії і методи дослідження стаціонарних та нестационарних коливань та прогнозування динамічної поведінки пружних систем, що збуджуються стохастичними та ударними впливами» (2013-2015 рр. № держ. реєстрації 0113U002290), 2ДБ-2016 «Теорія і методи аналізу динамічного деформування складних механічних систем під дією навантажень періодичного, стохастичного та ударного характеру» (2016-2018 рр. № держ. реєстрації 0116U000840), 2ДБ-2019 «Чисельні методи дослідження та прогнозування нелінійних коливань, динамічної стійкості та кризових явищ і хаотичної поведінки пружних систем» (2019-по т.ч. № держ. реєстрації 0119U002578). Автор брав безпосередню участь у виконанні цих науково-дослідних робіт як співвиконавець.

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у розробці чисельної методики, яка спирається на співвідношення методу граничних інтегральних рівнянь і орієнтована на дослідження вимушених нестационарних коливань пружних елементів конструкцій у двовимірній постановці, реалізацію розробленої методики у вигляді обчислювального комплексу і розв'язання з його допомогою прикладних задач.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

– отримання розв'язувальних співвідношень методу ГР для дослідження

нестационарного динамічного НДС пружних елементів конструкцій;

– розробка алгоритмів чисельного дослідження у двовимірній постановці нестационарних хвильових процесів, як за допомогою гранично-часових інтегральних рівнянь (ГЧІР), так і шляхом переходу в частотну область;

– розробка програмного забезпечення для чисельного розв’язання за методом ГР задач про нестационарні коливання масивних елементів конструкцій, які знаходяться у плоскому деформованому стані;

– аналіз достовірності результатів розв’язання контрольних задач, отриманих за допомогою розроблених методик, шляхом їх порівняння з еталонними;

– чисельне розв’язання прикладних задач про динамічну реакцію плоско-деформованих масивних елементів конструкцій.

Об’єктом дослідження є змушені нестационарні коливання пружних масивних елементів конструкцій, які знаходяться у плоскому деформованому стані.

Предметом дослідження є двовимірні динамічні поля переміщень і напружень, що виникають при нестационарному навантаженні пружних масивів.

Методи дослідження. Чисельне розв’язання означеного класу задач виконане за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Послідовно реалізуються і порівнюються два підходи, перший з яких пов’язаний із застосуванням гранично-часових інтегральних рівнянь, а другий базується на переході в частотну область за допомогою розкладання навантаження в ряд Фур’є. Розглядаються задачі про зсувні нестационарні коливання пружних масивів з циліндричною границею, а також хвильові процеси в пружних масивах з послабленнями, які знаходяться в стані плоскої деформації. Алгебраїзація задачі здійснюється за колокаційною схемою методу граничних елементів, при цьому інтегрування за часовою координатою за припущенням про кусково-лінійний характер зміни невідомих виконується аналітично. Також з використанням аналітичних виразів, отриманих в роботі, обчислюються сингулярні частини граничних інтегралів по елементам, які містять полюс інтегрування.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

– отримані розв’язувальні співвідношення та побудовано алгоритм дослідження з використанням ГЧІР нестационарних зсувних коливань масивів з отворами. На основі побудованого алгоритму розроблена і програмно реалізована методика чисельного аналізу параметрів динамічного НДС.

– отримано новий розв’язок задачі про нестационарні зсувні коливання простору, послабленого двома циліндричними отворами. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами;

– на основі теоретичного апарату методу потенціалу розроблені і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи ГЧІР, а друга використовує перехід в частотну область. Встановлена однакова ефективність обох підходів;

– запропоновано та реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об’єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані;

– отримані нові розв’язки задачі про взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження;

– розв’язана прикладна задача про двовимірний динамічний НДС пружного масиву, ділянки поверхні якого зазнають дії напівсинусоїдальних імпульсів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у реалізації розроблених гранично-елементних підходів до аналізу нестационарних коливань плоско-деформованих масивів з послабленнями у вигляді програмного забезпечення з високим рівнем автоматизації обробки результатів розрахунку. Отримані результати використано в Науково-дослідному інституті будівельної механіки КНУБА при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в проектно-конструкторських та наукових установах у різних галузях народного господарства для визначення динамічного НДС відповідальних деталей та елементів

конструкцій при нестационарному динамічному навантаженні.

Особистий внесок здобувача. В дисертаційній роботі викладені такі наукові результати, отримані особисто автором. Отримані розв'язувальні співвідношення, розроблена і програмно реалізована методика дослідження з використанням ГЧП нестационарних зсувних коливань масивів [4, 5, 6]. Отримано новий розв'язок задачі про нестационарні зсувні коливання простору, послабленого двома циліндричними отворами. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами [5]. З використанням ГЧП розроблена і програмно реалізована методика чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах [2]. Реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об'єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані [2, 7]. Досліджено взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження [2, 3]. Розв'язана прикладна задача про двовимірний динамічний НДС пружного масиву, поверхня якого зазнає дії напівсинусоїдальних імпульсів [1].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались та обговорювались: на 72-75 науково-практичних конференціях Київського національного університету будівництва і архітектури (м. Київ, 2011-2014 рр.), на конференціях молодих вчених, аспірантів та студентів Київського національного університету будівництва і архітектури (м. Київ, 2011-2013 рр.), на Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпродзержинськ, 2012 р.), на VII Всероссийской (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. (Ростов-на-Дону, 2013р).

У повному обсязі дисертація доповідалась на міжкафедральному семінарі Київського національного університету будівництва і архітектури (Київ, 2020 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 12 наукових працях, з них: у фахових наукових журналах і збірниках – 7; у публікаціях

матеріалів міжнародних і вітчизняних конференцій – 5.

Подяки. Автор вважає за необхідне виразити глибоку подяку науковому керівнику професору кафедри будівельної механіки КНУБА, науковому співробітнику НДІБМ, кандидату технічних наук, доценту Вороні Юрію Володимировичу, а також завідувачу кафедри будівельної механіки КНУБА, директору НДІБМ, доктору технічних наук, професору Баженову Віктору Андрійовичу за консультації і надану допомогу.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА І МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ДИНАМІКИ МАСИВНИХ ТІЛ

1.1 Основні співвідношення і рівняння динаміки континууму.

У даній роботі розглядаються питання, пов'язані з вивченням лінійного напружено-деформованого стану однорідних ізотропних тіл при динамічних навантаженнях в тривимірній постановці в рамках наступних припущень: речовина ідеального пружного тіла безперервно розподілена за його обсягом; за відсутності зовнішніх сил пружному тілу властиво мати визначену форми [110] Вживаних тут позначень, в основному, співпадають з прийнятими в [95]: Ω ,

Γ - область, зайнята тілом і її межа у момент часу t ;

$x = \{x_i\}$, $x^t = \{x_i^t\}$, $i = 1, 2$ відповідно декартові координати середовища,

що знаходиться в полі, і у момент часу t : $u(x, t) = x^t - x \equiv \{u_i(x, t)\}$, $i = 1, 2$ - вектор зсувів у момент часу t .

$$e_{ij}(x, t) \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right], \quad i, j = 1, 2 \quad (1.1)$$

-компоненти тензора деформацій (у точці x у момент часу t), $\sigma_{ij}(x, t)$ - складові тензора напруження, пов'язана з $e_{ij}(x, t)$ залежностями:

$$\sigma_{ij}(x, t) = \lambda \delta_{ij} \sum_k e_{kk}(x, t) + 2\mu e_{ij}(x, t); \quad i, j = 1, 2 \quad (1.2)$$

де δ_{ij} - символ Кронекера λ і μ - коефіцієнти Ляме.

Модуль пружності E , коефіцієнт Пуассона ν , модуль всестороннього стиснення κ , пуассоново число m пов'язані з постійними Ляме таким чином:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\nu)}{\lambda + \mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, m = \frac{1}{\nu}$$

В точках межі компоненти вектора напружень $\tau(x, t) = \{\tau_i(x, t)\}$, $i = 1, 2$ пов'язані з складовими тензора напружень на координатних майданчиках співвідношенням:

$$\tau_{ij}(x, t) = \sum_{i=1}^2 \sigma_{ij}(x, t)n_i, \quad j = 1, 2.$$

Зв'язок між компонентами векторів переміщень і напружень на майданчику з нормаллю n встановлюється співвідношенням

$$\tau(x, t) = \Pi_n u(x, t) \quad (1.3)$$

де Π_n - оператор напружень

$$\Pi_n = 2\mu \frac{\partial}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} + \mu(n \operatorname{rot}) \quad (1.3a)$$

Рух однорідного ізотропного пружного тіла описується системою диференціальних рівнянь в переміщеннях:

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{i,jj} + C_2^2 u_{j,ii} + \Phi_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}; \quad i, j = 1, 2 \quad (1.4)$$

де

$$u_{i,jj}(x, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, 2;$$

C_1, C_2 - швидкості розповсюдження хвиль розширення і хвиль спотворення, пов'язані з постійними співвідношеннями Ляме

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$

$C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$, ρ - щільність пружного середовища; Φ_j - компоненти вектора масових сил $\Phi(x, t)$ віднесених до одиниці маси.

Динамічне завдання теорії пружності для тривимірного тіла в загальному випадку може бути сформульована таким чином: визначити вектор зсувів $u(x, t)$, що задовольняє в області Ω рівнянню (1.4), а також граничить і початковим умовам вигляду:

$$u_i(x, t) = q_i(x, t), \quad x \in \Gamma_u \quad (1.5)$$

$$\tau_i(x, t) = h_i(x, t), \quad x \in \Gamma_\tau$$

$$u_i(x, 0) = u_i(x), \quad \frac{\partial u_i(x, 0)}{\partial t} = u_{i0}(x), \quad x \in \Omega + \Gamma \quad (1.6)$$

де Γ_u - частина поверхні, на якій заданий вектор переміщень $\Gamma_\tau = \Gamma - \Gamma_u$ - решта частини поверхні, на якій відомий вектор напружень.

Формулювання динамічного завдання у формі сукупності рівнянь (1.4), граничних (1.5) і початкових умов (1.6) використовується при дослідженні

неперіодичних процесів. Цей клас завдань моделює важливі з погляду додатків нестационарні режими вантаження, такі, як механічний удар, імпульсний додаток розподілених дій, миттєва перебудова граничних умов, вплив сейсмічних або акустичних хвиль, і так далі. Загальне рішення такої задачі зазвичай розшукують у вигляді суми приватного рішення і рішень задачі про власні коливання. Побудова кожній з цих компонент сумарного рішення в загальному випадку є самостійним достатньо складним завданням. У літературі такий підхід називається модальним.

Іншим, більш традиційним способом рішення нестационарної задачі теорії пружності є застосування перетворення Лапласа по змінній t , що дозволяє всякій функції від t поставити у відповідність функцію параметра S

$$\tilde{u}_i(x, t) = L\{u_i(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u_i(x, t) dt, \quad (1.7)$$

а її похідній по t - алгебраїчну суму

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_i(x, s)}{\partial t^2} = L\left\{\frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2}\right\} = s^2 \tilde{u}_i(x, s) - S u_{i0}(x) - \dot{u}_{i0}(x) \quad (1.8)$$

Це дає можливість перейти від розгляду початково-краєвого завдання для системи рівнянь (1.4) до рішення краєвої задачі для системи еліптичних рівнянь вигляду:

$$(C_1^2 - C_2^2) \tilde{u}_{ij} + C_2^2 u_{j,ii} - S^2 \tilde{u}_j = -F_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.9)$$

де

$$\tilde{F}_j = \tilde{F}_j(x, s) = \tilde{\Phi}_j(x, s) + su_{i0}(x) + \dot{u}_{i0}(x)$$

Векторна форма запису рівняння (1.9) має вигляд

$$A\tilde{u}(x, s) \equiv \Delta^* \tilde{u}(x, s) - s^2 \tilde{u}(x, s) = -F(x, s) \quad (1.10)$$

$$\text{де } \Delta = \frac{1}{\rho} [\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{graddiv}], \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Важливим класом динамічних завдань є завдання про вимушені коливання масивних тіл під впливом граничних чинників, що періодично змінюються, виражених силовими або кінематичний параметрами. Застосування розкладання в ряд Фур'є зовнішньої дії приведе до розгляду одночастотного режиму, найбільш вивченого для тих приватних конфігурацій області, які допускають розділення просторових змінних.

Якщо на тіло діємо гармонійна масова сила

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x) \cos \omega t + \Phi_2(x) \sin \omega t, \quad (1.11)$$

одна частина його межі Γ_u піддається гармонійним зсувам

$$q(x, t) = q_1(x) \cos \omega t + q_2(x) \sin \omega t, \quad (1.12)$$

а решта частини межі Γ_τ силовим діям

$$\hbar(x, t) = \hbar_1(x) \cos \omega t + \hbar_2(x) \sin \omega t, \quad (1.13)$$

то в пружному тілі також спостерігаються гармонійні коливання з такою ж частотою ω , тобто

$$u(x, t) = u_1(x) \cos \omega t + u_2(x) \sin \omega t, \quad (1.14)$$

Ввівши в розгляд комплексні величини

$$\Phi^*(x) = \Phi_1(x) + i\Phi_2(x)$$

$$q^*(x) = q_1(x) + iq_2(x)$$

$$\hbar^*(x) = \hbar_1(x) + i\hbar_2(x) \quad (1.15)$$

$$u^*(x) = u_1(x) + iu_2(x)$$

$$\tau^*(x) = \tau_1(x) + i\tau_2(x),$$

Отримаємо

$$\Phi(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \Phi^*(x) e^{-i\omega t} \right\}$$

$$q(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ q^*(x) e^{-i\omega t} \right\}$$

$$\hbar(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hbar^*(x) e^{-i\omega t} \right\} \quad (1.16)$$

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ u^*(x) e^{-i\omega t} \right\}$$

$$\tau(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \tau^*(x) e^{-i\omega t} \right\}$$

Підстановка (1.6) в (1.4) дає систему еліптичних рівнянь

$$\Delta^* u^*(x) + \omega^2 u^*(x) = -\Phi^*(x) \quad (1.17)$$

а підстановка в (1.5) – умови

$$\begin{aligned} u^*(x) &= q^*(x), & x \in \Gamma_u \\ \tau^*(x) &= \hbar^*(x), & x \in \Gamma_\tau \end{aligned} \quad (1.18)$$

В цьому випадку коливання вважаються сталими, тому, природно, не ставляться початкові умови.

Система (1.17) разом з умовами (1.18) утворюють краєве завдання щодо комплексної амплітуди $u^*(x)$ вимушених коливань при заданій частоті ω . На підставі (1.16) без зусиль отримуємо дійсні величини коливань із знайденого рішення задачі (1.17).

Якщо частота ω вимушених коливань відрізняється від власних частот, то завдання має єдине рішення [95]. Коли ω рівна одній з власних частот, передбачається, що виконана умова вирішуваної завдання, приведена в [95].

У завданні про вимушені коливання необмеженого континууму умови на "зовнішньому" контурі замінюються умовами вилученнями

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_p^* = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u_p^*}{\partial r} - ik_1 u_p^* \right) = 0 \quad (1.19)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_s^* = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u_s^*}{\partial r} - ik_2 u_s^* \right) = 0$$

що встановлюють асимптотику вирішень рівняння (1.14) при видаленні на нескінченність. Величини u_p^* і u_s^* представляють відповідно безвихорову і соленоїд складові u^* .

Збіг в головних рисах постановок завдань для рівнянь (1.7) і (1.14) дозволяє розглядати їх як одне завдання, що описується системою рівнянь

$$\Delta^* \vartheta(x) - \rho^2 \vartheta(x) = -F(x), \quad (1.20)$$

і граничними умовами

$$\vartheta(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_u \quad (1.21)$$

$$\zeta(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_\tau$$

де $\zeta(x) = \Pi_n \{ \vartheta(x) \}$, а Π_n визначений по (1.3а). Крім того $f(x), q(x)$ є відомими вектор-функціями, заданими відповідно на частинах Γ_u і Γ_τ граничній поверхні Γ ; ρ є параметром, взагалі кажучи, комплексним; $\vartheta(x)$ є невідома комплексно значена вектор-функція. Рішення задачі полягає в знаходженні функції $\vartheta(x)$, задовольняючій системі рівнянь (1.20) усередині області Ω і граничними умовами (1.21). У приведенному формулюванні узагальненого краєвого завдання можна інтерпретувати ϑ як вектор "узагальнених переміщень"; ζ - вектор "узагальненої напружені", а F - вектор "узагальнених масових сил". Додатково до сказаного вище з питання про формулювання завдань динаміки відмітимо наступне.

Як видно із запису рівнянь динамічної рівноваги, в них не враховане демпфування в тому або іншому ступені властиве будь-якому динамічному процесу. Підстави для цього полягають в наступному.

Згідно сталим уявленням про фізичну природу ефекту поглинання

енергії матеріалом при коливаннях цей чинник може бути кількісно описаний виразом, пропорційним швидкості руху в рамках моделей, що відносяться до руху стрижнів, пластин і оболонок. У масивних тілах при розгляді докритичної області частот демпфування не належить до чинників першорядної ваги, а в тих випадках, коли його облік виявляється необхідним, математичний запис відповідних членів рівнянь істотно відрізняється від згадуваної вище для пластин і оболонок.

1.2. Аналітичні і чисельні методи розрахунку. Динамічне навантаження елементів конструкцій

Систематичне вивчення динамічних явищ в пружних тілах почалося в середині XIX століття. Дослідження з цієї проблеми з'явилися безпосереднім розвитком ідей і методів, запропонованих раніше для опису хвильових властивостей світла, вірніше, динамічних властивостей особливого середовища - ефіру, механічні коливання якого ототожнювалися з розповсюдженням світла.

Значний період в розвитку науки про коливання пружного тіла пов'язаний з виявленням закономірностей розповсюдження хвиль в нескінченному середовищі, в напівпросторі, в шарі, в просторі, що містить порожнину або область, в якій розташовано джерело обурення. Коротка характеристика історії розвитку досліджень по динаміці пружних тіл дана у вступі до [61], де початок вивчення хвильових явищ зв'язується з роботами таких учених як Релей, Лоренц, Лемб, Ляв.

До недавнього часу до рішення задачі про розповсюдження хвиль застосовувалися аналітичні методи. При цьому круг даних об'єктів через складність тривимірного динамічного завдання був обмеженим. У монографії А.М. Гузя, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко [64] детально розглянуто задачі про дифракцію пружних хвиль на сферичній порожнині або включенні. Можливість отримання рішення забезпечувалася в цьому

випадку за допомогою природного для такого об'єкту вибору сферичної системи координат, що дозволяє провести розділення змінних. У разі, коли форма порожнини або включення дещо відрізнялася від сферичної, А. М. Гузем [68] застосовувався метод збурення форми границі, що зводить вихідну задачу до ряду послідовних наближень, що уточнюють граничні умови на сфері. Поступальний і обертальний рух жорсткого сферичного включення вивчалася в статті А. Е. Ковшова, І. Е. Симонова.

У роботі Дж. А. Шарпа [158] розглянута задача про нестационарне розповсюдження центрально симетричних хвиль розширення, обумовлених тиском, що стрибкоподібно змінюється в часі усередині сферичної порожнини. У статті Е. Е. Панасюка [115] досліджувалася нестационарна концентрація напружень біля сферичної порожнини в пружному середовищі при дії плоскої ступінчастої хвилі розширення. Вирішення хвильового рівняння в обох випадках може бути отримане за допомогою перетворення Лапласа за часом. Різні аспекти нестационарної динамічної задачі про деформацію простору в околі сферичної порожнини вивчені в монографії Л. Л. Слепяна.

У книзі А. М. Гузя і Е. Т. Головчана [65] вирішені задачі про дифракцію пружних хвиль на декількох сферичних перешкодах. Розглянуті також періодичні, двояко- і троякоперіодические задачі.

Багато робіт, присвячених розв'язанню просторової задачі еластодинаміки, пов'язані з дослідженням так званої проблеми Лемба про дію на поверхні пружного напівпростору локалізованого динамічного навантаження. Одній з перших робіт в цьому напрямі була стаття Є. Е. Єругіна [73], в якій на основі методу функціонально-інваріантних рішень були визначені результати для довільного гармонійного навантаження, прикладеного до плоскої поверхні напівпростору.

Застосування методу інтегральних перетворень дозволило Г. І. Петрашеню [118] вирішити ту ж задачу для випадку, коли межа напівпростору мала складний контур. Якщо кривизна граничної поверхні

рівна нулю, то рішення, отримані за допомогою цього методу, співпадають з результатами, отриманими методом функціонально-інваріантних рішень. Загальний вид інтегральних перетворень, який дозволяє отримати рішення динамічної задачі для пружного напівпростору, приведений М.М. Бородачевим [27]. Рішення задачі на основі методу контурних інтегралів було отримане в роботі К. Л. Перекиса і Х Ліфсона [156].

Деякі окремі випадки динамічної задачі за допомогою методу контурних інтегралів розглянуті в роботах Я.У. Саатова, Т. М. Абдулаєва, Я. У. Саатова, Т. У. Артикова [88]. Різні модифікації динамічної задачі для напівпростору досліджувалися в роботах П.Ф. Сабодаша, І.Г. Філіппова [127], І. В. Жігаловського [75], Л.Н. Сретенського [133], Х. Р. Аггарвала, С.М. Аблоу [141], К.К. Чао [145].

Значне число публікацій присвячене рішенням контактної задачі про коливання пружного напівпростору, що вимушуються динамічною дією штампю. У роботах О.Я. Шехтер вирішені питання про коливання одиночних і здвоєних круглих в плані фундаментів. Коливання круглого штампю з довільною поверхнею основи розглянуті в статті Е.Е. Закорко і Е.А. Ростовцева [77]. Чисельні результати рішення задачі про коливання круглого штампю отримані за допомогою інтегральних перетворень в роботах М.М. Бородачева [25, 26]. У його роботі [27] дано наближене рішення задачі про вертикальні коливання штампю з плоскою підставою довільного контура.

Нестационарне динамічне завдання для квадратного штампю на пружному напівпросторі розглядалося в роботі В. А. Ільчева [78]. Це ж завдання для прямокутного штампю досліджувалося в монографії В. М. Сеймова [129].

У вказаних дослідженнях аналітичні методи застосовувалися до рішення динамічної задачі для нескінченних і напівнескінченних областей. Як видно з наявних оглядів літератури ([61] і ін.), аналітичні вирішення задач динаміки для тіл кінцевої протяжності вичерпуються випадками

сфери, циліндра і прямокутної призми при деяких частинних варіантах постановки граничних умов, що, безумовно, свідчить про складність проблеми динамічного розрахунку в просторовій постановці.

Аналітичні методи вивчення динаміки циліндрів і призм (товстих пластин) ґрунтуються переважно на властивостях нормальних мод в нескінченному шарі і нескінченному циліндрі. Це, в першу чергу, метод однорідних рішень, що заснований на ідеях А. І. Лур'є і отримав розвиток стосовно динамічних завдань просторової теорії пружності в роботах У.К. Нігула, О. К. Аксент'ян і Т. Н. Селезневої [5], В. А. Стояна. У статті В.К. Махсми и М.А. Шленева досліджуються цим методом сталі гармонійні коливання круглих товстих пластин. Спектр власних частот товстих круглих і кільцевих плит аналізується в роботі Е. А. Моїсеєнко, Ю. У. Мисовського, Е. В. Юргельовіча [104]. Дослідження неосесиметричних вимушених коливань проведені Т. Н. Селезневою [130].

Іншим методом, широко використовуваним при вивченні динамічної поведінки товстих плит, є метод суперпозиції, що зводить, як правило, початкове завдання до нескінченних систем рівнянь. Дослідження сталих коливань циліндрів за допомогою цього методу проводилися О. А. Головіним і В. Д. Прокоповим [55].

Властивості нескінченних систем, що отримуються на основі методу, всесторонньо вивчені В. Т. Грінченко [68], що дозволило досліджувати такі складні динамічні явища, як красивий резонанс в круглому короткому циліндрі і прямокутній призмі (В.Т. Грінченко, В.В. Мелешко [61]). Нестационарні динамічні процеси в круглих циліндрах вивчалися в роботі В. Т. Грінченко, А. Р. Улитко [62]. Дослідження плит складнішого контура із застосуванням аналітичних методів, видно, практично важко здійснено.

У тих випадках, коли поверхню розрахункової області має складний просторовий контур, стає необхідним застосування чисельних методів, серед яких для вирішення динамічних завдань найчастіше використовуються метод кінцевих різниць, метод кінцевих елементів і метод характеристик.

При цьому засновані на таких методах алгоритми розробляються в основному стосовно плоскої і осесиметричної задач.

У роботі І. Г. Белухиной [22] розглянуті різницеві схеми для плоских задач еластодинаміки і доведені їх збіжність і стійкість. Н. М. Горським запропонований різницевий аналог системи рівнянь для двовимірного завдання в напрузі і швидкостях зсувів [58]. У роботі Н. О. Румарза [157] приведена різницева схема рішення динамічної задачі в осесиметричній постановці.

Вирішення задач сейсмостійкості гідротехнічних споруд в плоскій постановці отримано по методу кінцевих різниць в роботах В. Н. Ломбардо, В. Н. Островерха [113] і В. М. Сеймова, В. Н. Островерха, А. І. Ермоленко [128].

Аналогічні задачі досліджувалися методом скінченних елементів. У роботі С. В. Толкачника, Я. І. Нотаріуса, Г. А. Лешкевіча виконане дослідження впливу податливості підстави на частоти і форми власних коливань гравітаційної дамби. У статті Н. С. Моцонелідзе проведений аналіз сейсмостійкості масивно-контрфорсної дамби шляхом розрахунку за МСЕ напруженого стану дамби, навантаження якої здійснювалося з урахуванням реальної акселерограми.

МСЕ-розв'язок задачі про дію на напівплощину випадкового локалізованого навантаження отримане в роботі Е. А. Вернера і Е. Б. Бекера.

Останніми роками істотний розвиток отримали звичайно-елементні дослідження завдань динаміки тонкостінних конструкцій пластин, оболонок і складених з них просторових систем. Число публікацій, присвячених таким дослідженням, дуже велике. Частина робіт базується на сумісному використанні МСЕ і перетворення Лапласа. У інших роботах активно використовується звичайно-елементне представлення вирішуючих функцій в чотиривимірному просторі, що є об'єднанням узагальненого паралелепіпеда, в якому змінюються параметри криволінійної системи координат простору, і відрізання тимчасової координати. Застосовується пряме чисельне

інтегрування за часом. Альтернативою цьому є модальний підхід, що полягає в попередній побудові деякої сукупності власних форм скінченно-елементної моделі і зведенні завдання до системи диференціальних одновимірних рівнянь по часовій координаті на основі методу Бубнова-Галеркіна [86].

До сказаного про скінченно елементні підходи стосовно аналізу динамічних процесів додамо, що у зв'язку з високою обчислювальною складністю реалізації цього методу рекомендовано використання прийому "конденсації", що полягає в тому, що спочатку конструюється розрахункова схема з великим числом вузлів для аналізу статичної рівноваги системи, а потім шляхом перерозподілу інерційних сил число вузлів, забезпечених масами, істотно скорочується і, таким чином, знижується порядок системи уравнений, що визначає протікання динамічного процесу.

Чисельні приклади реалізації вказаних вище модифікацій звичайно-елементного алгоритму відносяться виключно до аналізу поперечних коливань тонких пластин і оболонки в двовимірній постановці.

Значні успіхи при вивченні динамічного деформування об'єктів призматичної та кільцевої форми були досягнуті в роботах В.А.Баженова, О.І. Гуляра, О.С. Сахарова, О.Г. Топора, С.О. Пискунова, І.І.Солодея, М.О. Вабіщевича [12-16, 111, 112]. В цих роботах використано новий підхід до чисельного аналізу широкого кола задач механіки суцільного середовища, який ґрунтується на використанні ефективної модифікації методу скінченних елементів напіваналітичного МСЕ (НМСЕ). Розглянуто задачі статичного деформування при тривалому статичному і циклічному навантаженні та задачі стаціонарних і нестаціонарних процесів динамічного деформування для фізично і геометрично неоднорідних просторових тіл. Проведений аналіз достовірності і ефективності розроблених підходів і методик, наведені приклади їх застосування до розв'язання практичних задач моделювання напружено-деформованого стану відповідальних об'єктів енергетичного та транспортного машинобудування, будівництва, інших

галузей промисловості.

Для вивчення напруженности товстих плит успішно застосовується метод скінченних інтегральних перетворень, який дозволяє за допомогою проекційної процедури знизити розмірність вихідної динамічної задачі. Розроблений В.К. Чибіряковим варіант методу використовує в якості ядер інтегральних перетворень поліноми Лежандра [140], причому інтегрування виконується по точних формулах.

У статті К.Е. Бойко і В.К. Чибірякова [24] ця методика застосовувалася до вивчення стаціонарних коливань в постановці осесиметричної і плоскої задачі теорії пружності.

Робота С. В. Потапова і В. К. Чибірякова [121] присвячена дослідженню перехідних процесів в товстих пластинах змінної товщини в просторовій постановці.

Близькою до цього алгоритму є запропонована в статті Т. Бурієва і М.М. Расульмухамедова методика вирішення тривимірних динамічних задач теорії пружності в криволінійних ортогональних координатах [30].

Слід зазначити, що на основі методу скінченних інтегральних перетворень може бути знайдено точне рішення осесиметричної динамічної задачі, якщо відомі форми вільних коливань об'єкту, як це зроблено в роботі Ю.Е. Сеніцкого.

Поширення і видозміни фронтів хвиль сильних розривів досліджувались в роботах В.І.Гуляєва, Г.М. Іванченка та їх співавторів [69-71, 80-84, 147] за допомогою методів геометричної оптики і зокрема з використанням підходів, створених на основі нульового наближення променевого методу.

При довільній формі поверхні масивного тіла побудова ефективних різницевих схем є достатньо складним завданням. Різницеві схеми для вирішення в переміщеннях динамічного завдання із змішаними граничними умовами розглядалися в роботі Б. А. Батурова [18]. Питання реалізації методу скінченних різниць при формулюванні динамічного задачі в

напруженнях досліджувалися в роботах Н.М. Горського і А. Е. Коновалова [58, 59]. До рішення нестационарної динамічної задачі П. Ф. Сабодаш і Р.А. Чередніченко застосували метод просторових характеристик.

Повніші відомості про роботи по застосуванню методів, що використовують заміну динамічних параметрів, що безперервно змінюються, кінцевим числом їх значень у вузлах деякої просторової сітки, що апроксимує розрахункову область, можна знайти в статті [93]. Оскільки розшукувані функції в цьому випадку піддаються дискретизації як усередині області, так і на її межі те реалізація таких методів на ЕОМ при загальному виді поверхні досліджуваного об'єкту стикається, як правило, із значними обчислювальними труднощами, пов'язаними з високим порядком аналога алгебри початкової системи. За ситуації, коли межа розрахункової області має складний контур, ці труднощі можуть стати непереборними.

З погляду чисельної реалізації у разі просторового завдання теорії пружності раціональним представляється використання підходів, що дозволяють роздільний розгляд залежностей між граничними переміщеннями і напругою і співвідношень, що визначають вказані параметри усередині розрахункової області. Можливість реалізації такого підходу закладена в методі потенціалу.

До порівняно недавнього часу метод потенціалу, що базується на складному математичному фундаменті, не розглядався унаслідок цієї обставини як алгоритмічна основа для проведення чисельних розрахунків, а використовувався для доказу теорем існування і єдиності розв'язків краєвих задач. Значний прогрес в цьому напрямі був досягнутий завдяки роботам В.Д. Купрадзе [96], С. Г. Міхліна [102], Н. І. Мусхелішвілі [106], В.З. Партонна, П. І. Перліна [116], І.К. Ліфанова [97] і інших учених.

Досить часто процедуру чисельної реалізації методу потенціалу називають методом граничних інтегральних рівнянь або методом граничних елементів (МГЕ). Відомості щодо бібліометричного аналізу робіт по МГЕ можна знайти в публікації А. Н.-D. Cheng, D. T. Cheng [46]. Бібліометричний

аналіз показує, що методи і підходи, що об'єднуються під термінологією «граничні інтегральні рівняння» (ГІР) і «методи граничних елементів» (МГЕ), знаходяться в стадії становлення, при цьому вони по затребуваності впевнено займають третю позицію (після методу скінченних елементів (МСЕ) і методу скінченних різниць (МСР)) серед чисельних методів. Число публікацій по МГЕ і ГІР досягло рівня 700-800 робіт в рік, по МСЕ їх близько 5000, а по МСР - 1400 робіт в рік. В даний час про МГЕ написано понад 250 монографій, а на їх основі створено понад 150 розрахункових програм, при цьому тільки 5 програм, що використовують МГЕ, можна придбати на ринку. Є журнали, активно публікують роботи за методом ГІР і МГЕ.

З історичним становленням методів ГІР і МГЕ можна познайомитися в роботах [23, 28, 31, 41, 90, 95, 162]. МГЕ в його нинішньому вигляді вперше з'явився в роботі Н.І. Мухелішвілі в 1937 р, а потім в 1940 р в роботі А.Я. Горгідзе і А. К. Рухадзе. У 1940 р Ц. О. Левіна і С. Г. Михлин також використовували комплексні ГІР для чисельних розрахунків.

Термін МГЕ має два сенсу: вузький і широкий. У вузькому сенсі МГЕ - це чисельна методика, заснована на методі зважених нев'язок. Використовувана функція нев'язок - фундаментальне рішення вихідного рівняння (С.А. Vrebbia (1978)). Можна також розглядати МГЕ як чисельне рішення ГІР, засноване на формулі Гріна, в якій кусково-елементна концепція МСЕ використовується для дискретизації [144]. Більш широко МГЕ використовується як універсальний термін для різноманітних чисельних методів, які використовують граничну або подібну граничної дискретизацію.

Термін «потенціальна функція» був запропонований Дж. Гріном в 1828 р. С. Пуассон і Дж. Грін ввели поняття гармонічного потенціалу простого шару. У роботах Дж. Гріна і К. Гаусса закладаються основи сучасної теорії потенціалу. Ріманом доведено існування функції Гріна, вперше строго встановлені властивості цієї функції.

Головна особливість і перевага МГЕ, МГІР полягає у зниженні розмірності простору в запису інтегрального рівняння. Це призводить до більш ефективної чисельної дискретизації. Найбільш відома методика такого типу - теорема про дивергенцію, формула Гаусса-Остроградського, а також теорема Стокса. Але найбільш важливий результат становлення методу потенціала являють собою три тотожності Гріна.

Г. Гельмгольц вперше ввів поняття потенціалу подвійного шару і встановив найпростіші його властивості. Р. Ліпшиц узагальнив теорему Діріхле про гармонійні потенціали на випадок потенціалу подвійного шару, К. Нейман створив теорію гармонійних потенціалів подвійного шару. Модифікаціями методу Неймана є методи Г. Робена і Г. Р. Кірхгофа. Е.І. Фредгольма поклав початок методу інтегральних рівнянь. Г. Гельмгольц розширив теорію потенціалу на хвильові рівняння, а Е. Матьє - на рівняння теплопровідності.

Розвиток теорії сингулярних інтегральних рівнянь почався завдяки введенню понять сингулярних і гіперсингулярних інтегралів. Ідея інтерпретації сингулярного інтеграла була запропонована О. Л. Коші в 1814 р. Такий інтеграл називається існуючим в сенсі «головного значення за Коші». Гіперсингулярний інтеграл існує в сенсі «скінченної частини за Адамаром» [1]. Це поняття було введено Ж. С. Адамаром в 1908 р. Дослідження одновимірного сингулярного інтегрального рівняння (з ядром Коші) було закладено в роботах Д. Гільберта і Ж.А. Пуанкаре.

У термінології МГЕ методи потенціалів простого і подвійного шару називаються непрямыми методами. Чисельний метод, заснований на третій тотожності Гріна, називається прямим методом.

Для теорії пружності важливий крок до отримання формули Гріна був зроблений Е. Бетті в 1872 р, коли він ввів теорему взаємності. Релей надалі застосував теорему до стаціонарних пружнодинамічних задач. К. Сомільяна отримав інтегральне уявлення для переміщень, яке є варіантом формули Гріна. В. Вольтерра (1907) представив методом потенціалу подвійного шару розв'язок задачі теорії пружності при наявності дислокації. Аналогом методу

потенціалу простого шару є відповідне інтегральне рівняння Сомільяни для розриву напружень. Перші інтегральні рівняння другого роду в задачах теорії пружності були отримані Е. І. Фредгольма і К. Лаурічеллой при вирішенні першого крайової задачі для ізотропного пружного тіла. В якості ядер інтегральних операторів в цих рівняннях використовувалися звуження потенціалу подвійного шару на несучі поверхні. При цьому використовувався оператор псевдонапружень. Застосування оператора псевдонапружень дозволило отримати ГІР другого роду з ядрами, що мають інтегровану особливість. Комплексні інтегральні представлення в теорії пружності сформулював Г.В. Колосов (1909), подальший розвиток пов'язаний з іменами таких вчених, як М. І. Мусхелішвілі, С. Г. Міхлін і Д.І. Шерман.

З точки зору розробки наближених методів важливою була робота В. Рітца в 1908 р. Метод Рітца з'явився попередником методу скінчених елементів [358]. Ідея Рітца полягає в інтегруванні рішення по області. Грунтуючись на ідеях Рітца, Е. Треффтц (1926) запропонував граничний метод, відомий тепер як метод Треффтца. У методі використовуються пробні функції, які задовольняють основним диференціальним рівнянням, але не обов'язково граничним умовам. Зараз методом Треффца називають спосіб вирішення варіаційної задачі в досліджуваній області на класі функцій, що задовольняють оператору всередині області. На основі ідеї методу Треффца з використанням фундаментальних рішень як тестових функцій будується метод фундаментальних рішень. Застосування методу Треффца до рівняння Лапласа здійснений С. Г. Міхліним (1964), до бігармонічному рівнянні - К. Ректорісом (1977), до теорії пружності - В. Д. Купрадзе (1979). Систематичний аналіз методу міститься в роботах Зелінського і Еррери (J. Herrera) [163].

Н.І. Мусхелешвілі не тільки вивів і досліджував нові комплексні рівняння в 1934 р, але і вказав, як їх вирішувати чисельно. Його ідея в 1940 р. була реалізована А.Я. Горгідзе і А. К. Рухадзе. Вони використовували всі

атрибути методу, який нині відомий як МГЕ. Роботи Н. І. Мухелішвілі і А. Я. Горгідзе, А.К. Рухадзе є першими роботами по МГЕ. У тому ж 1940 р. Ц. О. Левіна і С.Г. Міхлін також використовували ГІР для чисельних розрахунків.

Метод, заснований на принципі підсумовування напруженодеформованих станів, що викликаються дією різного роду розподілених джерел, першим став застосовувати Б. Г. Коренев для розрахунку балок, плит і пластин на пружній основі; невідомі щільності, мають сенс розподілених сил або моментів, стали називатися компенсуючими навантаженнями. В роботі Б. Г. Коренева [88] проведено аналіз цього методу, названого методом «компенсуючих навантажень», і з'ясована його зв'язок з варіаційним методом Треффтца.

Теорія Фредгольма дала теорії потенціалу задач теорії пружності початкову математичну базу. Роботи Н. І. Мухелішвілі, І.М. Векуа, Н.П. Векуа, В.Д. Купрадзе і С. Г. Міхліна забезпечили обґрунтування теорії векторних пружних потенціалів через вивчення сингулярних інтегральних рівнянь. Для знаходження наближеного рішення рівнянь теорії пружного потенціалу для статичних та динамічних задач В.Д. Купрадзе [96, 95] використовував «метод функціональних рівнянь», який допускає кілька формулювань. Методику В.Д. Купрадзе розміщення полюсів фундаментальних розв'язків на зовнішній допоміжній границі розглядають як основу методу фундаментальних рішень. Метод фундаментальних рішень може розглядатися і як спеціальний випадок методу функціональних рівнянь, і як незалежно створений Е.Р.А. Oliveira (1968). Аналогічно методам В.Д. Купрадзе кілька варіантів формулювань допускає такий підхід, коли шукається рішення задачі мінімізації квадратичного функціоналу на границі. Цей підхід пов'язаний з дослідженнями М. Пікон щодо застосування узагальнених рядів Фур'є для розв'язання крайових задач. Інший тип задач, який традиційно використовував граничні методи, являють собою задачі з розривами (типу тріщин, зсуву кристалічних структур, взаємодії між

несхожими матеріалами та ін.). Розриви можуть моделюватися розподілом сингулярних рішень типу дислокацій Вольтерра і Сомільяни з фізичної поверхні, що, як показали F. Erdogan і G.D. Gupta, призводить до інтегральних рівнянь. Починаючи з 1970-х років зріс інтерес до нових форм комплексних рівнянь, що містять в якості невідомих фізичні величини (див., наприклад роботу Г. Б. Ковнерістова [122]). Історично першими стали розроблятися непрямі. Кількість робіт з чисельних рішень ГІР стало помітно зростати починаючи з робіт F. J. Rizzo (1967). Він використовував формулу Сомільяни для пружних статичних задач. Послідовником F. J. Rizzo в знаходженні чисельних рішень став Т. А. Cruse (1968). F. J. Rizzo і D. J. Shippy першими намагалися вирішити задачу теорії пружності з включеннями (1968), задачі для плоских анізотропних тіл (1970). Використовуючи перетворення Лапласа і чисельного зворотного обернення, вони вирішували завдання теплопровідності (1970) і квазістатичні вязкоупружні задачі (1971). Т.А. Cruse в 1968 р опублікував дві статті з результатами по ГІР в еластодинаміці і по тривимірним задачам руйнування. Спочатку ГЕ-програми використовували кусково-постійні елементи. У 1972 р Р. Riccardella зробив перший крок в аналізі задачі плоскої деформації з використанням лінійних елементів. Надалі Т. А. Cruse (1974) узагальнив цю модель для випадку тривимірного пружного аналізу напружень.

Cruse назвав методи, які використовують потенціали простого і подвійного шару із щільностями, що не мають фізичного змісту «непрямими методами потенціалу», а методи, які використовували формулу Гріна (типу третього тотожності Гріна та інтеграла Сомільяни) - «прямим методом потенціалу». Однак «прямий метод потенціалу» пізніше став називатися «метод ГІР». У 1977 р. С. А. Brebbia розв'язуючи системи ГІР, став використовувати термін «граничні елементи». Термінами ГІР і МГЕ відповідні підходи зобов'язані роботам Т.А. Cruse (1973), Р.К. Benerjee, С. А. Brebbia R. Butterfield, J. Domingues (1977). Робота J.C. Lachat і J.O. Watson (1976) є першою роботою, яка переносить ідеї МКЕ та МГЕ. В 1984 р С. А. Brebbia заснував журнал

«Engineering Analysis - Innovations in Computational Techniques». У ньому публікувалися роботи, що використовують граничний елемент. У 1989 р журнал був перейменований в «Engineering Analysis with Boundary Elements» і став спеціалізованим журналом по МГЕ.

ГІР змішаної задачі теорії пружності, що містять внеінтегральний член на всій поверхні, були запропоновані А. Г. Угодчиковим і Н. М. Хуторянський [136, 138]. Рівняння в непрямій формулюванні незалежно були запропоновані N.J. Altiero, S.D. Gavazza в роботах [142, 143].

Отримане В. Д. Купрадзе фундаментальне рішення для просторової задачі про сталі коливання дозволило застосувати апарат теорії потенціалу до завдань динаміки [95, 96].

З розвитком потужностей обчислювальної техніки з'явилася можливість використовувати метод потенціалу не тільки для доказу існування рішення, але і для його чисельного відшукування. Вперше такою можливістю скористався, ймовірно, Ф. Дж. Ріццо [101] стосовно плоскої задачі теорії пружності. Варіант методу потенціалу, реалізований в цій роботі, базувався на граничному аналогу формули Соміліани, і надалі за ним закріпилася назва "Метод граничних інтегральних рівнянь" (МГІУ). Характерною особливістю такого формулювання на відміну від так званого непрямого підходу є її універсальність по відношенню до типу граничних умов.

Чисельне рішення просторової статичної задачі по методу ГІУ було здійснене Т. А. Крузом [101]. Безліч досліджень, що послідувала услід за цим, по чисельній реалізації різних варіантів методу потенціалу стосовно задач статички знайшла достатньо повне віддзеркалення в оглядах, що містяться в роботах П. Бенерджі, Р. Баттерфілда [23], К. Бреббії, Ж. Теллеса, Л. Вроубела [29], Ю. В. Верюжського, А. І. Вусатюка, В.В. Савіцького [40, 41], В.З. Партона, П.І. Перліна [116] і інших авторів.

Питання, пов'язані з розв'язністю нелінійних інтегральних рівнянь односторонніх контактних задач теорії пружності розглянуті Б.О. Галановим

[53]. Ним також розроблений метод регуляризації інтегрального рівняння першого роду з гіперсингулярним ядром [54].

Декілька пізніше почалося застосування чисельних гранично-інтегральних процедур до вирішення динамічних завдань. Рішення нестационарної динамічної задачі за допомогою перетворення Лапласа за часом розглядалася в статтях [3, 126].

Детальне дослідження граничних сингулярних інтегральних уравнениий для другого основного завдання двовимірної еластодинамики в просторі зображень Лапласа проведено в статті Ш М. Айталієва, Л А. Алексєєвої, Н Б. Жанбирбаєва [4]. Авторами вивчені граничні властивості потенціалів, показано існування і єдиність вирішення в класі функцій з нульовими початковими умовами, обговорені питання побудови хвильових фронтів.

Розробці математичного апарату методу потенціалу для вирішення двовимірних стаціонарних задач і побудові на його основі ефективних чисельних алгоритмів присвячені роботи Тю В'є Кионга, С. Кобаяши.

У роботі А. І. Цейтліна, Д. Р. Атаджанова, А. Г. Саркисяна побудована функція Гріна для однорідної ізотропної пружно-в'язкої напівплощини з вільною межею. При цьому передбачалося, що матеріал середовища володіє внутрішнім тертям, для опису якого придатна модель не-залежного відносного демпфування. Встановлений зв'язок отриманого незамкнутого виразу з відомим вирішенням Лемба. У статті Ю. Г. Плотникова и Д. Р. Атаджанова [120] за допомогою переходу к.подвижной системі координат вказане рішення поширене на випадок внутрішнього навантаження, рухомого з постійною швидкістю.

Значна частина робіт радянських і зарубіжних авторів присвячена вирішенню за допомогою методу потенціалу проблеми власних частот. У роботах Е. І. П'ятігорської і І. З. Ройтфарба [123, 124], Й. Ниви, С. Кобаяши, М. Китахари пропонується досліджувати кроковим методом залежність визначника системи, що отримується по методу потенціалу, від параметра

частоти. Слід відмітити, що реалізація такого підходу зв'язана із значними обчислювальними труднощами.

Д. Нардіні і К. А. Бреббія запропонували процедуру отримання власних частот коливань конструкцій за допомогою зведення завдання до проблеми алгебри власних чисел [29]. При цьому для того, щоб позбавитися від об'ємних інтегралів, проводиться проектування невідомих переміщень усередині області на штучним чином підбрану систему функцій. Характерний, що рекомендацій по вибору опорних функцій автори не дають, а приведені чисельні ілюстрації включають тільки двовимірні завдання.

Намагаючись обійти вказані труднощі, Ю. В. Верюжський і Тю В'є Кионг розробили методику формування матриці податливості на основі рішення статичної задачі теорій пружності. Матриця має формується по дискретній моделі, що, приводить до проблеми алгебри власних чисел. Проте, мабуть, для якісного визначення компонент матриці податливості необхідно знаходити переміщення в достатньо представницькій множині внутрішніх крапок, причому при описі вищих форм коливань число внутрішніх крапок може перевершувати число граничних полюсів, що, у свою чергу, може негативно позначитися на ефективності чисельних розрахунків. З іншого боку, неможливість створення універсального алгоритму лише підкреслює складність завдання тривимірної динаміки.

Обчислювальні аспекти сумісного застосування чисельного апарату методу потенціалу і перетворення Лапласа в просторових завданнях розглянуті в роботі І. З. Ройтфарба і Чу В'єт Кионга [126], де, зокрема, вказаний спосіб обчислення сингулярних інтегралів граничного завдання за допомогою виділення круговій області з центром в полюсі. Приведені замкнуті вирази, що визначають значення інтегралів по кругу від еластодинамічних ядер.

Стаціонарна задача еластодинаміки розглядалася Н. М. Хуторянським, який запропонував схему рішення, засновану на зведенні початкового краєвого завдання до нескінченної системи лінійних функціональних

співвідношень, що отримуються за допомогою розкладання ядер В. Д. Купрадзе за системою сферичних функцій. Проте в обчислювальному плані така схема, очевидно, важко реалізується. Інші автори використовують, як правило, коллокаційну процедуру відшукування наближеного рішення з використанням як розрахункове співвідношення граничного аналога формули Соміліани. У роботі Ж. Домінгеса [29] отримане рішення задачі про визначення динамічної жорсткості підстави, розглянуті випадки дифракції хвиль на включеннях, знайдена сейсмічна реакція квадратного в плані фундаменту, що спирається на пружний напівпростір.

С. Гомес-Лера, Е. Аларкон, Ж. Домінгес запропонували оригінальну методику рішення осесиметричної стаціонарної динамічної задачі по методу потенціалу з використанням фундаментального вирішення В. Д. Купрадзе [29], стверджуючи при цьому, що інтегрувати таке ядро по всій поверхні вигідніше, ніж виконувати операції над виразом, який виходить в результаті інтеграції просторового фундаментального рішення по окружній координаті.

З точки зору складності математичного апарату, що застосовується, особливо слід зазначити роботу Ш. М. Айталієва із співавторами [3], в якій в області зображень Лапласа побудовані тензори Гріна для напівпростору з вільною і жорстко закріпленою денною поверхнею. Приведені в роботі граничні властивості потенціалів дозволяють припустити, що не дивлячись на надзвичайно складний вид тензорів Гріна, робота по чисельній реалізації методики близька до завершення.

Значне число робіт останнім часом присвячується вивченню перехідних процесів в пружних тілах на основі вирішення Стоксу про точковий імпульс в нескінченному просторі [125]. Властивості гранично-тимчасових інтегральних рівнянь і нестаціонарних динамічних потенціалів теорії пружності з великим ступенем подробиці вивчені в роботах А. Р. Угодчикова, Н. М. Хуторянського [136, 138, 139]. Н. М. Хуторянському вдалося отримати точні вирази для інтегралів від ядер Стоксу по часовій координаті при довільній поліноміальній залежності, що значно спростило

побудову чисельного алгоритму.

Різні обчислювальні аспекти методики, заснованої на використанні потенціалів, що запізнюються, розглядалися в роботах Д. М. Коула, Д. Д. Кослоффа, Ж. Б. Мінстера [29], Р. Д. Маноліса, С. Ахмада, П. К. Бенерджі [23] і інших авторів.

Різні аспекти задачі про вимушені усталені гармонічні коливання та поширення хвиль у пружних масивних елементах конструкцій були розглянуті за допомогою МГПР в роботах Ю.В. Ворони [45-50]. Серед інших були досліджені питання, пов'язані з визначенням динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень масивних тіл в стані плоскої деформації.

На завершення огляду методів чисельного вирішення динамічних завдань механіки відзначимо, що на відміну від дослідження в інженерній практиці статичної деформації, для якої використовується велике число розвинених програмних комплексів, як вітчизняних, так і адаптованих зарубіжних, на вирішення динамічних завдань в просторовій постановці орієнтовані лише небагато з них. Принципова можливість виконання динамічних розрахунків масивних тіл передбачена в обчислювальному комплексі "Міцність" [131]. Проте в [131] не приведені приклади таких розрахунків і відсутні зведення про параметри цих обчислювальних систем, динаміки, що відносяться до завдань.

У [136] приведені вирішення ряду тестових і модельних завдань, що дозволяють зробити вивід про конкурентоспроможність і перспективність програмних продуктів, розроблених на основі співвідношень методу потенціалу для дослідження динамічної навантаженості масивних плоскодеформованих елементів конструкцій.

Отже, підсумовуючи, можемо сказати, що задачі про динамічну деформацію пружних елементів складної форми вимагають для свого розв'язання залучення методів чисельного аналізу, зокрема методу граничних інтегральних рівнянь. Головна перевага цього методу полягає в зниженні розмірності задачі, що особливо важливо, коли об'єкт розрахунку

займає нескінченну область. Це зумовило широке застосування методу для розв'язання різних, головним чином, статичних та квазістатичних задач будівельної механіки. У той самий час існує значна кількість важливих інженерних об'єктів, таких як довгі циліндричні тонелі, динамічне навантаження на які досить повільно змінюється по довжині. Напружено-деформований стан таких об'єктів варто розглядати саме в двовимірній постановці. Важливість вказаного напрямку дослідження при відносно невеликій кількості доступних публікацій, пов'язаних із застосуванням методу потенціалу до аналізу нестационарних коливань, дозволяє вважати тему дисертації актуальною.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МАСИВІВ З ПОСЛАБЛЕННЯМИ

Існує два способи розв'язання задачі динаміки. Перший з них полягає в безпосередньому вирішенні задачі з певним часовим кроком, а другий базується на представленні реакції системи суперпозицією гармонічних станів. Застосування другого способу доцільно тоді, коли зовнішні навантаження є періодичним. Хоча при неперіодичному навантаженні перехід в частотну область за допомогою відповідного перетворення також є можливим, але перешкодою на шляху практичної реалізації тут стає трудомісткість зворотного перетворення. Також може виникнути необхідність детального дослідження параметрів динамічного стану в початковій фазі перехідного процесу. Якщо при цьому навантаження, а разом з ним і напружено-деформований стан стрімко змінюється з часом, то розв'язання задачі в часовій області є набагато більш ефективним.

2.1 Динамічний стан антиплоскої деформації

Стан антиплоскої деформації реалізується в циліндричному тілі при навантаженні, рівномірно розподіленому та спрямованому вздовж твірної. Єдиною відмінною від нуля компонентою вектора переміщень буде $u_3(x_1, x_2, t)$, причому вісь циліндра співпадає з віссю x_3 . Будемо вважати, що масові сили відсутні. Тоді динамічний деформований стан тіла можна описати наступним диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Для коректної постановки початково-крайової задачі необхідно, щоб були відомими початкові значення переміщень $u_0(x_1, x_2)$ та швидкостей $\dot{u}_0(x_1, x_2)$. Крім того на частині границі Γ_u кожної миті мають бути задані переміщення, а на іншій частині границі Γ_q - напруження $q(y_1, y_2, t)$; $\vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$. Далі в першій частині цього розділу основними невідомими, відносно яких формулюється задача, являються виключно переміщення в напрямку осі x_3 , а переміщення $u_1(x_1, x_2)$ та $u_2(x_1, x_2)$ дорівнюють нулю. Тому надалі в цій частині будемо опускати нижній індекс “3” і позначати це переміщення просто як $u(x_1, x_2, t)$.

2.1.1 Фундаментальний розв’язок

Якщо досліджується еволюція НДС поблизу відомого концентратора (отвору, включення, тощо), то суттєві переваги мають алгоритми, побудовані на основі співвідношень методу потенціалу. Для побудови гранично-часового інтегрального рівняння необхідно отримати спочатку фундаментальний розв’язок фундаментальний розв’язок задачі $U(\vec{x}, \vec{y}, t)$, тобто поле переміщень в момент часу t , яке відповідає дії в точці $\vec{x}\{x_1, x_2\}$ безмежної двовимірної області зосередженого миттєвого одиничного імпульсу, що мав місце в момент часу $t_0=0$. Таке поле динамічних переміщень задовольняє рівнянню

$$\Delta U(\vec{x}, \vec{y}, t) + \delta(t)\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Для тривимірного хвильового рівняння, яке відрізняється від (2.1) тільки тим, що в ньому диференціальний оператор має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

фундаментальний розв’язок (загаяний потенціал одиничного імпульсного

точкового джерела [108]) має вигляд

$$U^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{1}{4\pi R} \delta\left[t - \left(\frac{R}{C}\right)\right] = \frac{C}{4\pi R} \delta(Ct - R), \quad (2.3)$$

де

$$R(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} = \sqrt{r^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Розв'язок рівняння (2.2) може трактуватись як такий, що відповідає дії в тривимірному пружному просторі миттєвого імпульсного навантаження, рівномірно з одиничною інтенсивністю розподіленого вздовж прямої, яка проходить через т. $\vec{x}\{x_1, x_2\}$ паралельно осі x_3 . Відповідно, такий розв'язок може бути отриманий за допомогою інтегрування виразу (2.3):

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} U^{(3)} dx_3 = \frac{C}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(Ct - R)}{R} dx. \quad (2.4)$$

Згідно з [144] після інтегрування вираз (2.4) перетворюється на

$$U(r, t) = \frac{C}{2\pi(C^2 t^2 - r^2)^{1/2}} H(Ct - r), \quad (2.5)$$

де $H(Ct - r)$ - функція Хевісайда. Її наявність у виразі (2.5) пояснюється тим, що при $Ct < r$ функція $U(r, t)$ повинна дорівнювати нулю, оскільки збурення, викликане дією миттєвих одиничних імпульсів, що мали місце в точці \vec{y} в моменти часу $t_0 < \frac{r}{C}$, ще не дійшли до точки \vec{x} в момент часу t .

Необхідно підкреслити різницю між тривимірним фундаментальним розв'язком (2.3) та двовимірним, визначеним виразом (2.5). Згідно першому у тривимірному просторі збурення, викликане дією миттєвого імпульсу, що мав місце в точці \vec{y} в момент часу $t_0=0$, відчувається в точці \vec{x} тільки в момент

часу $t = \frac{r}{C}$. У двовимірному випадку завдяки тому, що навантаження є розподіленим вздовж прямої, яка перпендикулярна до площини, збурення, викликане дією миттєвого імпульсу, що мав місце в точці \vec{y} в момент часу $t_0=0$, відчувається в точці \vec{x} в будь-який момент часу, більший за $\frac{r}{C}$. Вказана різниця суттєво впливає на процедуру інтегрування за часом.

2.1.2 Гранично-часове інтегральне рівняння

Граничне інтегральне рівняння зазвичай отримують за допомогою граничного переходу в інтегральному представленні для переміщення у внутрішній точці. Таке представлення (аналог формули Софіліани) можна отримати, якщо скористатись теоремою про взаємність робіт для двох динамічних станів, один з яких відповідає дії миттєвого одиничного імпульсу:

$$u(\vec{x}, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \quad (2.6)$$

де $q = \frac{\partial u}{\partial n}$, $T = \frac{\partial U}{\partial n}$, $t^+ = t + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Знову скористаємось допоміжною підобластю, показаною на рис. 2.1 ,

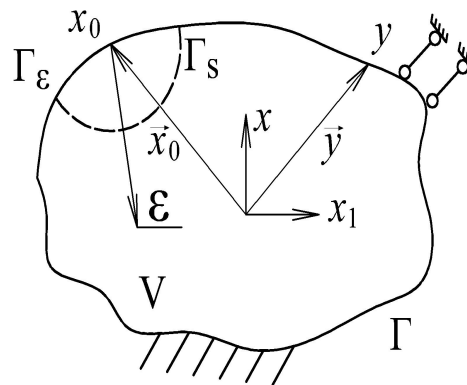


Рис. 2.1. Утворення допоміжної підобласті

І запишемо для точки \vec{x}_0 , яка розташована поза межами новоутвореної допоміжної границі, тотожність

$$\int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} U(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y \right] d\tau - \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} T(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y \right] d\tau = 0, \quad (2.7)$$

Дослідимо сингулярні частини інтегралів (інтегрування проводиться по частині границі Γ_s). Перш за все відмітимо, що сингулярність підінтегральних виразів (наприклад, $[C^2(t - \tau)^2 - r(\vec{x}, \vec{y})^2]^{-1/2}$) має місце, коли співпадають моменти часу t і τ , а також точки \vec{x} і \vec{y} . При цьому можемо вважати, що за фізичним змістом виразу (2.5) завжди справедлива нерівність $C(t - \tau) > r(\vec{x}, \vec{y})$, оскільки в іншому випадку множник $H[C(t - \tau) - r]$ дорівнює нулю. Припустимо, що поблизу розглядуваної точки на часовій осі навантаження є постійною величиною. Тоді інтегрування за часом першого з інтегралів в правій частині (2.7) може бути виконано аналітично:

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau &= \int_{\Gamma} q(\vec{y}, t) \int_0^{t^+} \frac{C}{2\pi[C^2(t - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} q(\vec{y}, t) \ln \left[\frac{Ct}{r} + \sqrt{\left(\frac{Ct}{r}\right)^2 - 1} \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Далі, вважатимемо що поблизу точки \vec{x}_0 граничні напруження можна п одати у вигляді $q(\vec{y}, t) = q(\vec{x}_0, t) + O(r)$. Тоді

$$\int_{\Gamma_s} q(\vec{y}, t) \ln \left[\frac{Ct}{r} + \sqrt{\left(\frac{Ct}{r}\right)^2 - 1} \right] d\Gamma = [q(\vec{x}_0, t) + O(\varepsilon)] \int_{\Gamma_s} \ln \left[\frac{Ct}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{Ct}{\varepsilon}\right)^2 - 1} \right] d\Gamma =$$

$$= \pi\varepsilon[q(\vec{x}_0, t) + O(\varepsilon)] \ln \left[\frac{Ct}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{Ct}{\varepsilon}\right)^2 - 1} \right]. \quad (2.9)$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon[q(\vec{x}_0, t) + O(\varepsilon)] \ln \left[\frac{Ct}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{Ct}{\varepsilon}\right)^2 - 1} \right] \right\} = 0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} U(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y \right] d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y \right] d\tau. \quad (2.10)$$

Отже, перший інтеграл у лівій частині рівності (2.7) містить слабку сингулярність, і його значення за Коші може бути обчислено безпосередньо після апроксимації границі сукупністю ГЕ та введенні гіпотези щодо поведінки $q(\vec{y}, \tau)$ в межах кожного ГЕ, тобто за звичайною чисельною МГЕ-процедурою.

Бачимо, що властивості цього інтегралу аналогічні властивостям еластостатичного потенціалу простого шару та еластодинамічного потенціалу простого шару при гармонійних коливаннях. Для того, щоб виявити властивості другого інтегралу у рівності (2.7), необхідно зробити наступні послідовні перетворення

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} \int_\Gamma T(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau &= \int_0^{t^+} \int_\Gamma \frac{\partial U(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_y} u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau = \\ &= \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n_y} \int_0^{t^+} u(\vec{y}, \tau) \frac{cr}{2\pi[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^{3/2}} H[c(t - \tau) - r] d\tau d\Gamma + \\ &+ \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n_y} \int_0^{t^+} u(\vec{y}, \tau) \frac{cr}{2\pi[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} H[c(t - \tau) - r] d\tau d\Gamma. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau)-r] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c(t-\tau)-r],$$

за допомогою інтегрування частинами позбудемось в другому з інтегралів диференціювання функції Хевісайда:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n_y} \int_0^{t^+} u \frac{c}{2\pi[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} H[c(t-\tau)-r] d\tau d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n_y} \int_0^{t^+} u \frac{1}{2\pi[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c(t-\tau)-r] d\tau d\Gamma = \\ & = - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n_y} \int_0^{t^+} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{1}{2\pi[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} H[c(t-\tau)-r] d\tau d\Gamma - \\ & \quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n_y} \int_0^{t^+} u \frac{c^2(t-\tau)^2}{2\pi[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^{3/2}} H[c(t-\tau)-r] d\tau d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тут взято до уваги, що $H[C(t-t^+)-r]=0$, а також прийнято, що рух пружного об'єкту відбувається за нульових початкових умов.

Підставимо (2.10) в (2.12) і отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T(\vec{x}, \vec{y}, t-\tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau = \\ & = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u(\vec{y}, \tau) V(r, t-\tau) d\Gamma d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \dot{u}(\vec{y}, \tau) W(r, t-\tau) d\Gamma d\tau, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \dot{u}(\vec{y}, t) &= \frac{\partial u(\vec{y}, t)}{\partial t}, \quad V(r, t-\tau) = \frac{\partial r}{\partial n_y} \frac{C[r-C(t-\tau)]}{2\pi[C^2(t-\tau)^2 - r^2]^{3/2}} H[C(t-\tau)-r], \\ W(r, t-\tau) &= \frac{\partial r}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi[C^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} H[C(t-\tau)-r] = \frac{\partial r}{\partial n_y} \frac{1}{C} U(r, t-\tau). \end{aligned}$$

Тепер, якщо припустити, що поблизу розглядуваної точки на часовій осі

переміщення в залежності від часу змінюються за лінійним законом $u(\vec{y}, t) = u(\vec{y}, t) + t\dot{u}(\vec{y}, t)$, то інтегрування за часом другого з інтегралів в правій частині (2.8) також може бути виконано аналітично. Наприклад, якщо розглядаються моменти часу поблизу точки t_m , то

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau = \\ & = -\frac{1}{2\pi C(t - t_m)} \int_{\Gamma} u(\vec{y}, t) \frac{\partial r}{\partial n_y} \sqrt{\left(\frac{C(t - t_m)}{r}\right)^2 - 1} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналіз виразу (2.13) дозволяє з'ясувати, що властивості цього інтегралу аналогічні властивостям еластостатичного потенціалу подвійного шару та еластодинамічного потенціалу подвійного шару при гармонійних коливаннях. На підставі цього спостереження можемо записати

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} T(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{2} u(\vec{x}_0, t) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тепер ГЧІР (2.7) може бути записано у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u(\vec{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} V(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) u(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} W(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) \dot{u}(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (2.15)$$

де інтеграли в правій частині є сингулярними і розуміються за Коші. Вираз

(2.15) являє собою рівняння відносно незаданих граничними умовами переміщень $u(\vec{y}, \tau)$ та напружень $q(\vec{y}, \tau)$, $\vec{y} \in \Gamma$.

Обчислення інтегралів, що входять до складу (2.15), по частинам контуру (граничним елементам) не викликає труднощів за виключенням того випадку, коли полюс знаходиться на тому самому ГЕ, де розташований полюс інтегрування. Тоді, перш за все, помітимо, що при розташуванні точки колокації всередині невикривленого елемента другий і третій сингулярний інтеграли в правій частині (2.15) за Коші дорівнюють нулю, оскільки в цьому випадку дорівнює нулю множник $\frac{\partial r}{\partial n}$. В свою чергу, перший сингулярний інтеграл може бути визначений аналітично:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta\Gamma_i} U^{mn} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^l \ln\left(a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}\right) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{s}{C(t_n - \tau_{n-1})} \operatorname{arccosh}\left(\frac{C(t_n - \tau_{n-1})}{s}\right) + \arcsin\left(\frac{C(t_n - \tau_{n-1})}{s}\right) \right] C(t_n - \tau_{n-1}) \right\}_{\varepsilon}^l = \\ &= \frac{C(t_n - \tau_{n-1})}{\pi} \left[\frac{1}{b} \ln\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right) + \arcsin(b) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

де

$$b = \begin{cases} 1, & \text{якщо } C(t_n - \tau_{n-1}) \geq l, \\ \frac{C(t_n - \tau_{n-1})}{l}, & \text{якщо } C(t_n - \tau_{n-1}) < l, \end{cases} \quad (2.17)$$

через l позначена половина довжини елемента.

Таким чином, отримано повну систему співвідношень, необхідних для побудови чисельного алгоритму, спрямованого на розв'язання за методом потенціалу в часовій області задачі про нестационарні антиплоскі коливання пружних масивних об'єктів.

2.2. Задача про деформований стан пружного масиву, навантаженому одиничним імпульсом. Перехід в частотну область.

Розглянемо тестову задачу про деформований стан пружного масиву, навантаженому одиничним імпульсом. Якщо задача має центральну симетрію, то неважко отримати розв'язок з будь-якою точністю. Для цього навантаження, прикладене до границі отвору $q(\bar{y}, t) = q_R(t)$, будемо вважати імпульсно-періодичним, що дозволяє розкласти його в ряд Фур'є:

$$q_R(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^K q_k \exp(-i\omega_k t) \right], \quad (2.18)$$

де $\omega_k = k \frac{2\pi}{T}$, T – проміжок часу між початковими моментами сусідніх імпульсів. Зазначимо, що чим більшим є період T , тим меншим є слід попередніх імпульсів, і тим точніше може бути реакція на одиничний імпульс.

Переміщення всередині розрахункової області на відстані r від центру також подаються у вигляді ряду Фур'є

$$u(r, t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^K u_k(r) \exp(-i\omega_k t) \right], \quad (2.19)$$

причому компоненти розвинення $u_k(r)$ підпорядковані рівнянню Гельмгольца

$$\mu \Delta u_k(r) + \rho \omega_k^2 u_k = 0, \quad k = 0, \dots, K, \quad (2.20)$$

та граничній умові

$$-\mu \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=R} = q_k \quad (2.21)$$

Оскільки загальний вигляд розв'язку рівняння Гельмгольца при осовій симетрії є відомим [105], то неважко пересвідчитись в тому, що [144]

$$u(r, t) = \frac{qR^2}{\mu r} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K \frac{qC}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\omega_k r}{C}\right)}{H_1^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right)} \exp(-i\omega_k t) \right] \quad (2.22)$$

Подання (2.22) дозволяє знайти переміщення із наперед заданою точністю в будь-якій точці розрахункової області. Зокрема, на границі отвору маємо

$$u(R, t) = \frac{q_0 R}{\mu} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K \frac{q_k C}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right)}{H_1^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right)} \exp(-i\omega_k t) \right] \quad (2.23)$$

Зважаючи на граничні умови у вигляді заданих навантажень та незмінність функції $u(\vec{x}_0^i, t) = u_R(t)$ вздовж границі, запишемо дискретний аналог рівняння (2.23) у вигляді [144]

$$\frac{1}{2} u_R(t_n) + \sum_{m=1}^n u_R(t_m) \int_{\Gamma} Q^{nm}(\vec{x}_0^i, \vec{y}) \Gamma_y = \int_0^{t_n^+} \int_{\Gamma} q_R(\tau) U(\vec{x}_0^i, \vec{y}, t_n - \tau) d\tau d\Gamma_y \quad (2.24)$$

Нижче наведені результати розв'язання задачі при двох різновидах імпульсного навантаження. В першому варіанті навантаження являло собою симетричний трикутний імпульс $q_R(t)$ тривалістю $T_0 = \pi$ секунд з найбільшим

значенням $q_R(0.5T_0) = B$.

$$q_R(t) = \begin{cases} 2Bt/T_0, & \text{якщо } 0 \leq t < 0.5T_0, \\ 2B(1-t/T_0), & \text{якщо } 0.5T_0 < t \leq T_0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T_0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Графіки залежності нормованого радіального переміщення від часу показані на рис. 2.2. Бачимо, що максимальне значення нормованого переміщення $u_R(t)B/\mu$ при чотирьох гармоніках дорівнювало 10.99 м, при восьми гармоніках – 11.74 м, при двадцяти чотирьох – 12.04 м, а при ста п'ятдесяти – 12.26 м. Отже збіжність результатів розв'язання задачі є досить повільною.

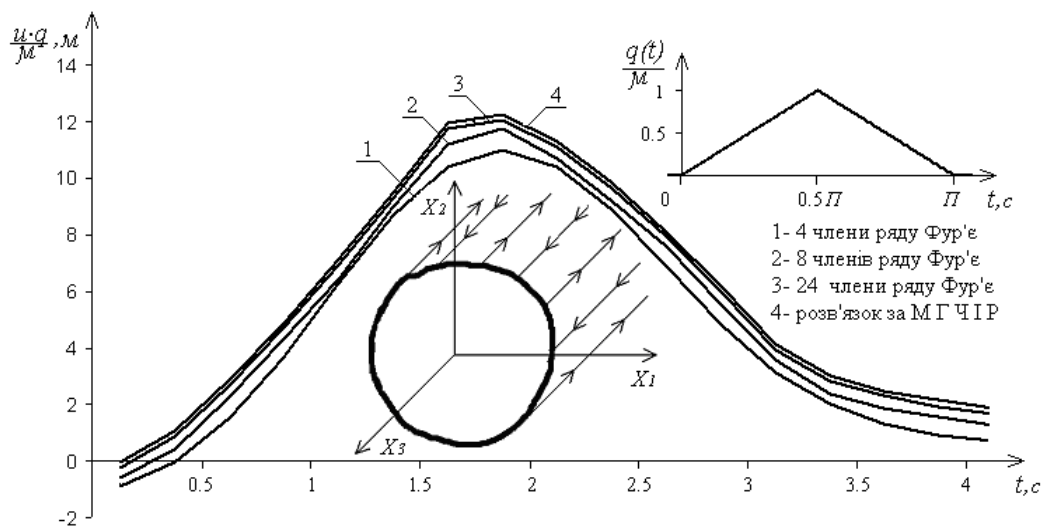


Рисунок 2.2. Трикутний імпульс. Зміна з часом граничних переміщень

Далі при збільшенні кількості складових зміна значення переміщення стає майже непомітною. Отже можна трактувати цей результат як точний. При цьому максимум переміщення, отриманого в результаті розв'язання рівняння (2.24), становить 12.4 м (відносна похибка дорівнює 1.1%). Зауважимо, що час, витрачений на розв'язання задачі при використанні чотирьох гармоніках був приблизно таким самим, що і при розв'язанні рівняння (2.24). Далі при збільшенні кількості гармонік витрати часу при використанні другого підходу

зростали, що пов'язано зі трудомісткістю обчислення функцій Ханкеля при великих значеннях аргументу. Отже, алгоритм розв'язання задачі, який базується на системах рівнянь (2.24), може при навантаженні одиничним імпульсом виявитись дещо ефективнішим за алгоритм, що використовує перехід в частотну область.

Були досліджені також параметри динамічних нестационарних коливань, які відповідали реакції системи на дію трапецеїдального імпульсу тривалістю $T_0 = \pi$ секунд. Зміна тиску описується наступним виразом:

$$q_R(t) = \begin{cases} 3Bt/T_0, & \text{якщо } 0 \leq t < T_0/3, \\ B, & \text{якщо } T_0/3 \leq t < 2T_0/3, \\ 3B(t-T_0)/T_0, & \text{якщо } 2T_0/3 < t \leq T_0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T_0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Результати в цілому були подібні до отриманих в попередній задачі. Найбільше значення нормованого переміщення при чотирьох гармоніках дорівнювало 13.04 м, при восьми гармоніках – 13.79 м, при двадцяти чотирьох – 14.58 м, а при ста п'ятдесяти – 14.87 м (рис.2.3).

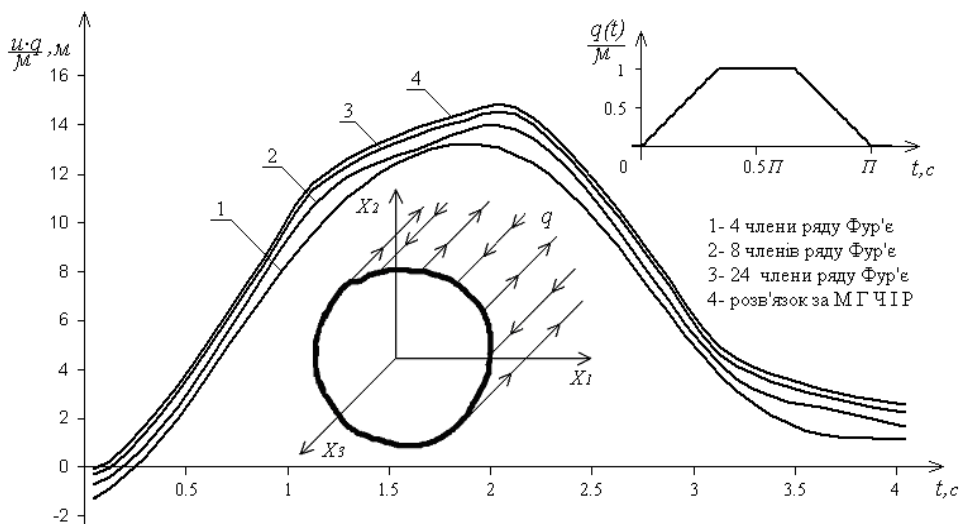


Рис. 2.3. Залежність від часу нормованих граничних переміщень при дії на систему імпульсу трапецеїдальної форми

Далі при збільшенні кількості членів ряду Фур'є гармонік результати чисельних розрахунків змінюються дуже слабо. Подальше уточнення

результату виявляється непомітним, тому будемо вважати останнє значення точним. Слід також зауважити, що найбільше нормоване переміщення, отримане із застосуванням рівняння (2.24), дорівнює 15.02 м (відносна похибка 1.0%).

Розглянемо також задачу про циліндричні хвилі в нескінченному масиві з отвором, границя якого піддається дії параболічного імпульсу тривалістю $T_0 = \pi$ секунд. Навантаження задається наступним виразом

$$q_R(t) = \begin{cases} 4B(1-t/T_0)t/T_0, & \text{якщо } 0 < t \leq T_0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Розв'язок показав, що найбільше нормоване переміщення при врахуванні чотирьох гармонік дорівнювало 12.6 м, при врахуванні восьми гармонік – 13.29 м, при двадцяти чотирьох – 13.81 м, а при ста п'ятдесяти – 14.07 м. Результати показані на рис.2.4. Подальша зміна результату при збільшенні кількості врахованих гармонік виявляється незначною, що дозволяє вважати останнє значення точним. Необхідно відмітити, що найбільше значення нормованого переміщення, отриманого з використанням розв'язку рівняння (2.24), дорівнює 14.23 м (відносна похибка 1.1%).

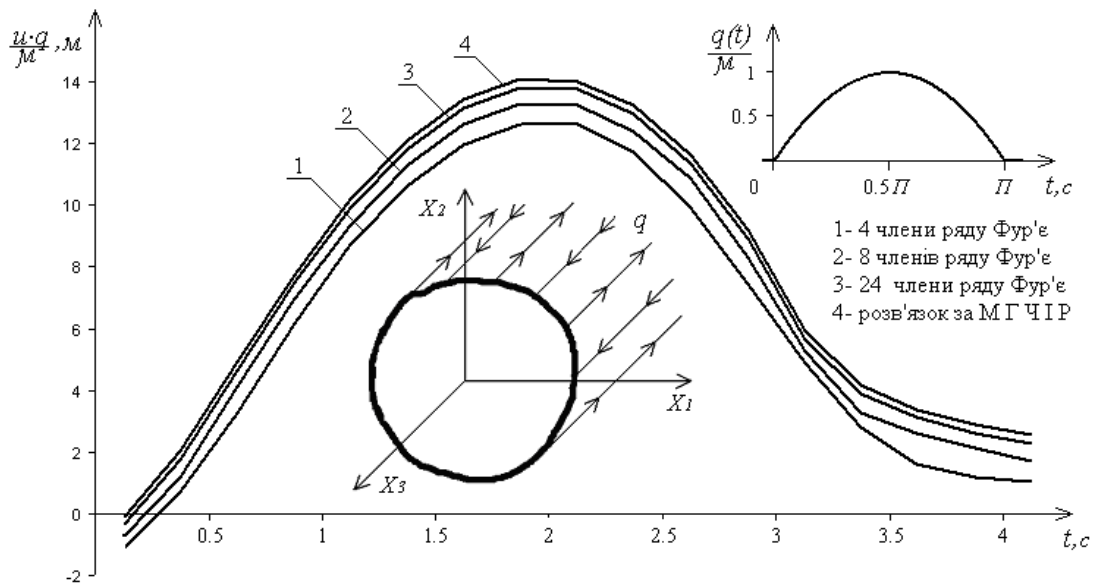


Рис. 2.4. Залежність від часу нормованих граничних переміщень при дії на систему імпульсу параболічної форми

Отже, наведені результати розв'язання тестової задачі про реакцію системи на дію одиничного імпульсу свідчать про високу точність отриманих чисельних даних. Чисельні результати були отримані за допомогою двох розроблених гранично-елементних методик, орієнтованих на дослідження антиплоских нестационарних пружних коливань. Обидві методики довели свою вірогідність і ефективність.

2.3. Плоска деформація. Розповсюдження циліндричних пружних хвиль від кругової порожнини при імпульсному навантаженні. Чисельно-аналітичний розв'язок.

У цьому параграфі досліджується точність чисельних даних, які дає другий підхід при розв'язанні задач про нестационарні коливання. За цим підходом розв'язок задачі розшукується у вигляді суми реакцій на гармонічне навантаження. З цієї причини необхідно шляхом порівняння з розв'язком, який можна вважати еталоном, дослідити точність результатів в залежності від кількості утриманих гармонік. Для побудови такого еталонового розв'язку розглянемо задачу про розповсюдження від кругової порожнини радіусу R циліндричних пружних хвиль. Хвильовий рух викликаний раптово прикладеним до контуру отвору тиском. Тиск змінюється за законом, який має вигляд одиночного трапецеїдального імпульсу:

$$q(t) = q_0 f(t) = q_0 \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ або } t \geq T_q, \\ \frac{t}{t_1}, & 0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t < t_2, \\ \frac{T_q - t}{T_q - t_2}, & t_2 \leq t < T_q. \end{cases} \quad (2.28)$$

Хвильовий рух супроводжується виникненням виключно радіальних переміщень $u_r(r, t)$. Хвильове рівняння в полярній системі координат (r, θ) , має наступний вигляд:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (2.29)$$

де $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ – швидкість поздовжньої пружної хвилі, λ і μ – константи Ламе,

ρ – густина матеріалу.

На границі задані радіальні напруження:

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} q(t), & r=R, \\ 0, & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{де } \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r}.$$

Тангенціальні напруження можна знайти за формулою

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r}. \quad (2.31)$$

Введемо для зручності безрозмірні параметри

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{t} = \frac{C_1 t}{R}, \quad \bar{u}_r = \frac{(\lambda + 2\mu)}{q_0 R} u_r, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{q_0}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}. \quad (2.32)$$

Тепер співвідношення (2.29)-(2.31) можуть бути переписані наступним чином

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}, \quad (2.33)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \begin{cases} f(\bar{t}), & \bar{r}=1, \\ 0, & \bar{r} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \kappa \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \kappa \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}}, \quad (2.35)$$

де $\kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu}$, ν – коефіцієнт Пуассона.

Шляхом тотожних перетворень надамо функції $f(\bar{t})$, яка описує залежність тиску від часу, наступного вигляду:

$$f(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{\bar{t}}{\bar{t}_1}, & 0 \leq \bar{t} < \bar{t}_1, \\ \frac{\bar{t}}{\bar{t}_1} - \frac{(\bar{t} - \bar{t}_1)}{\bar{t}_1}, & \bar{t}_1 \leq \bar{t} < \bar{t}_2, \\ \frac{\bar{t}}{\bar{t}_1} - \frac{(\bar{t} - \bar{t}_1)}{\bar{t}_1} - \frac{(\bar{t} - \bar{t}_2)}{\bar{T}_q - \bar{t}_2}, & \bar{t}_2 \leq \bar{t} < \bar{T}_q, \\ \frac{\bar{t}}{\bar{t}_1} - \frac{(\bar{t} - \bar{t}_1)}{\bar{t}_1} - \frac{(\bar{t} - \bar{t}_2)}{\bar{T}_q - \bar{t}_2} + \frac{(\bar{t} - \bar{T}_q)}{\bar{T}_q - \bar{t}_2}, & \bar{t} \geq \bar{T}_q. \end{cases} \quad (2.36)$$

Тепер стає зрозуміло, що достатньо знайти пружну реакцію від навантаження, яке змінюється за лінійними законами на всьому часовому інтервалі $\bar{t} \geq 0$ ($f(\bar{t}) = \bar{t}/\bar{t}_1$), після чого результат можна отримати як суперпозицію такого розв'язку і ще одного або декількох розв'язків, отриманих із першого шляхом множення на деякий коефіцієнт та зсуву на деяку величину \bar{t}_1 , або \bar{t}_2 , або \bar{T}_q в залежності від того, якій ділянці трапецеїдального імпульсу відповідає розглядуваний момент часу:

$$u(\bar{t}) = \begin{cases} u^{(1)}(\bar{t}), & 0 \leq \bar{t} < \bar{t}_1, \\ u^{(1)}(\bar{t}) - u^{(1)}(\bar{t} - \bar{t}_1), & \bar{t}_1 \leq \bar{t} < \bar{t}_2, \\ u^{(1)}(\bar{t}) - u^{(1)}(\bar{t} - \bar{t}_1) - \frac{\bar{t}_1}{\bar{T}_q - \bar{t}_2} u^{(1)}(\bar{t} - \bar{t}_2), & \bar{t}_2 \leq \bar{t} < \bar{T}_q, \\ u^{(1)}(\bar{t}) - u^{(1)}(\bar{t} - \bar{t}_1) - \frac{\bar{t}_1}{\bar{T}_q - \bar{t}_2} u^{(1)}(\bar{t} - \bar{t}_2) + \frac{\bar{t}_1}{\bar{T}_q - \bar{t}_2} u^{(1)}(\bar{t} - \bar{T}_q), & \bar{t} \geq \bar{T}_q, \end{cases}$$

де $u^{(1)}(\bar{t})$ - реакція системи на дію від навантаження, яке змінюється за лінійними законом на всьому часовому інтервалі $\bar{t} \geq 0$. Зауважимо, що відомими з літературних джерел є розв'язки цієї задачі тільки при навантаженнях у вигляді функції Хевісайда $f(\bar{t}) = -H(\bar{t})$, або експонціально спадаючої функції $f(\bar{t}) = -H(\bar{t})e^{-k\bar{t}}$ [65], [110].

До рівняння (2.29) застосуємо перетворення Лапласа за часом. За нульових початкових умов отримаємо

$$\frac{d^2 \bar{u}_r^L(\bar{r}, s)}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d \bar{u}_r^L(\bar{r}, s)}{d\bar{r}} - \left(\frac{1}{\bar{r}^2} + s^2 \right) \bar{u}_r^L(\bar{r}, s) = 0, \quad (2.37)$$

де s – параметр перетворення, а верхній індекс L означає лапласове зображення відповідної величини.

В свою чергу, перетворення граничних умов (2.34) з урахуванням припущення про лінійний характер навантаження дає

$$\bar{\sigma}_{rr}^L = \frac{\partial \bar{u}_r^L}{\partial \bar{r}} + \kappa \frac{\bar{u}_r^L}{\bar{r}} = \begin{cases} -(\bar{t}_1 s^2)^{-1}, & \bar{r} = 1, \\ 0, & \bar{r} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.38)$$

Розв'язок рівняння (2.37), який задовольняє граничні умови (2.38), згідно [110] має вигляд

$$\bar{u}_r^L(\bar{r}, s) = \frac{K_1(s\bar{r})}{\bar{t}_1 s^3 \left[K_0(s) + (1-\kappa) \frac{K_1(s)}{s} \right]} = \frac{Z_0^L(s\bar{r})}{\bar{t}_1 N^L(s)}, \quad (2.39)$$

де K_n – модифіковані функції Бесселя другого роду (циліндричні функції Макдональда) порядку n ,

$$Z_0^L(s\bar{r}) = \frac{e^s K_1(s\bar{r})}{s^3}, \quad N^L(s) = e^s \left[K_0(s) + (1-\kappa) \frac{K_1(s)}{s} \right].$$

Як зазначено в [65], відновлення оригіналу $\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t})$, тобто обернення виразу (2.39), шляхом безпосереднього обчислення відповідного контурного інтеграла є дуже трудомісткою задачею. Тому в згаданій роботі запропоновано скористатись тим, що оригінали окремих компонентів, які входять до складу правої частини виразу (2.39), є відомими [105], або їх неважко отримати, використовуючи властивості перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned} Z_0(\bar{r}, \bar{t}) &= L^{-1} \{ Z_0^L(\bar{r}, s) \} = L^{-1} \left\{ \frac{e^s K_1(s\bar{r})}{s^3} \right\} = \\ &= H(\bar{t} - \bar{r} + 1) \left\{ \frac{\left[(\bar{t} + 1)^2 + 2\bar{r}^2 \right] \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{6\bar{r}} - \frac{(\bar{t} + 1)\bar{r}}{2} \ln \frac{\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} N(\bar{t}) &= L^{-1} \{ N^L(s) \} = L^{-1} \left\{ e^s \left[K_0(s) + (1 - \kappa) \frac{K_1(s)}{s} \right] \right\} = \\ &= H(\bar{t}) \left[\frac{1}{\sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - 1^2}} + (1 - \kappa) \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - 1^2} \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

де $H(t)$ – одинична ступінчаста функція (функція Хевісайда).

Тепер, якщо переписати співвідношення (2.39) у вигляді

$$\bar{u}_r^L(\bar{r}, s) N^L(\bar{r}, s) = \frac{1}{t_1} Z_0^L(\bar{r}, s)$$

і скористатись теоремою про згортку оригіналів, отримаємо рівняння Вольєрра першого роду відносно $u_r(r, t)$:

$$\int_0^{\bar{t}} \bar{u}_r(\bar{r}, \tau) N(\bar{t} - \tau) d\tau = \frac{1}{t_1} Z_0(\bar{r}, \bar{t}). \quad (2.41)$$

Рівняння (2.41) може бути розв'язане чисельно. Для цього часовий інтервал має бути розбитий на сегменти, а також необхідно зробити припущення щодо характеру шуканої функції в межах кожної з них. Далі можна застосувати крокову процедуру і визначити значення $\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_k)$ в моменти, які є границями сегментів. Розіб'ємо часовий інтервал на N рівних сегментів величиною $\Delta \bar{t}$, і припустимо, що переміщення змінюються на кожному інтервалі за лінійним законом:

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_{k-1}) \frac{\bar{t}}{\Delta \bar{t}} + \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_k) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta \bar{t}}\right).$$

Тоді для послідовного визначення переміщень в задані моменти часу маємо

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_1) = \frac{Z_0(\bar{r}, \bar{t}_1)}{\bar{t}_1 W_1},$$

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_j) = \frac{\frac{1}{\bar{t}_1} Z_0(\bar{r}, \bar{t}_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_k) (W_{j-k+1} + V_{j-k})}{W_1}, \quad j=2 \dots N, \quad (2.42)$$

де

$$W_k = \int_0^{\bar{t}} \frac{\tau}{\Delta \bar{t}} N(k\Delta \bar{t} - \tau) d\tau, \quad V_k = \int_0^{\bar{t}} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta \bar{t}}\right) N(k\Delta \bar{t} - \tau) d\tau. \quad (2.43)$$

Оскільки інтеграли (2.43) можуть бути обчислені точно, то і нормовані переміщення за формулою (2.42) можна знайти з будь-якою точністю.

Диференціювання виразу (2.41) по \bar{r} із подальшою підстановкою у (2.35) дозволяє отримати інтегральне рівняння відносно напружень

$$\int_0^{\bar{t}} \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\bar{r}, \tau) N(\bar{t} - \tau) d\tau = \frac{1}{\bar{t}_1} Z_1(\bar{r}, \bar{t}), \quad (2.44)$$

де

$$Z_1(\bar{r}, t) = \kappa \frac{\partial Z_0(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{Z_0(\bar{r}, t)}{\bar{r}},$$

$$\frac{\partial Z_0(\bar{r}, \bar{t})}{\partial \bar{r}} = H(\bar{t} - \bar{r} + 1) \left\{ - \frac{[(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2]^2 + 3\bar{r}^4}{6\bar{r}^2 \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{t} + 1}{2} \left[\frac{\bar{r}^2}{(\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}) \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}} + 1 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{t} + 1}{2} \left[- \ln \frac{\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} \right] \right\}. \quad (2.45)$$

Чисельна крокова процедура послідовного визначення $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\bar{r}, \bar{t}_k)$ в задані моменти часу є цілком аналогічною до процедури визначення переміщень:

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\bar{r}, \bar{t}_1) = \frac{Z_1(\bar{r}, \bar{t}_1)}{\bar{t}_1 W_1},$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\bar{r}, \bar{t}_j) = \frac{\frac{1}{\bar{t}_j} Z_1(\bar{r}, \bar{t}_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\bar{r}, \bar{t}_k) (W_{j-k+1} + V_{j-k})}{W_1}, \quad j=2 \dots N. \quad (2.46)$$

Отже, за допомогою співвідношень (2.42) та (2.46) можуть бути отримані за чисельно-аналітичною процедурою розв'язки задачі про динамічний НДС пружного простору з круговою циліндричною порожниною. До границі порожнини прикладений імпульс (2.36) [110]. Оскільки збільшуючи кількість часових інтервалі, можна досягти будь-якої точності, будемо вважати результати, отримані за допомогою співвідношень (2.42) та (2.46) еталонними.

Розв'яжемо тепер цю задачу за допомогою розвинення навантаження в ряд Фур'є. Для цього будемо вважати навантаження періодичною функцією з

періодом $4T_q$, причому на проміжку $0 \leq t \leq T_q$ навантаження являє собою трапецеїдальний імпульс, заданий виразом (2.36), тоді як при $T_q < t \leq 4T_q$ величина навантаження дорівнює нулю.

Амплітудні значення окремих гармонік навантаження можна знайти за формулами

$$q_0 = \frac{1}{2T_q} \int_0^{T_q} q(t) dt, \quad q_k^* = \frac{1}{2T_q} \int_0^{T_q} q(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad k=1, 2, \dots$$

де $\omega_k = \frac{k\pi}{2T_q}$ - кругова частота коливань за k -ю гармонікою.

Розв'язок задачі про розповсюдження гармонічних циліндричних хвиль є відомим:

$$u_0(r) = \frac{q_0 R^2}{2\mu r}, \quad \sigma_{\theta,0}(r) = \frac{q_0 R^2}{r^2}, \quad (2.47)$$

$$u_k^*(r) = \frac{q_k^*}{\mu} \frac{H_1^{(1)}(\varphi_k r)}{\varphi_k \left\{ \left[2 \frac{H_1^{(1)}(\varphi_k R)}{\varphi_k R} - H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right] - \frac{\lambda}{\mu} H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right\}}, \quad k=1, 2, \dots,$$

$$\sigma_{\theta,k}^*(r) = \frac{q_k^*}{\mu} \frac{\lambda H_0^{(1)}(\varphi_k r) + 2\mu H_1^{(1)}(\varphi_k r)}{\varphi_k r \left\{ \left[2 \frac{H_1^{(1)}(\varphi_k R)}{\varphi_k R} - H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right] - \frac{\lambda}{\mu} H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right\}}, \quad (2.48)$$

де $H_m^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку m , $\varphi_k = \frac{\omega_k}{C_1}$.

Тепер наближену реакцію на імпульсне навантаження знаходимо, складаючи внески окремих гармонік:

$$u_r(r) = \frac{1}{2} u_0(r) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K u_k^*(r) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad (2.49)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{2} \sigma_{\theta,0}(r) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \sigma_{\theta,k}^*(r) e^{i\omega_k t} \right\}. \quad (2.50)$$

Графіки нормованих величин $u_r^{\text{норм.}} = \frac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$, обчислених на границі, наведені на рис. 2.5 (криві 3 і 4). На цьому ж рисунку показані графіки $\sigma_{\theta\theta}^{\text{норм.}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$ (криві 1 і 2). Криві 1 і 3 відповідають еталонним значенням, отриманим з використанням співвідношень відповідно (2.46) та (2.42), тобто побудовані за допомогою чисельно-аналітичного підходу. Для побудови кривих 2 і 4 застосовані наближені співвідношення (2.49) та (2.50) відповідно, причому при розрахунках було використано вісім перших членів ряду ($K=7$). Навантаження у вигляді трапецеїдального імпульсу мало параметри $\bar{t}_1=4.44$, $\bar{t}_2=15.56$, $\bar{T}_q=20$, тоді як пружне середовище характеризувалось коефіцієнтом Пуассона $\nu=0.25$ ($\lambda=\mu$), модулем зсуву $\mu=80000$ МПа та густиною $\rho=1750$ кг/м³.

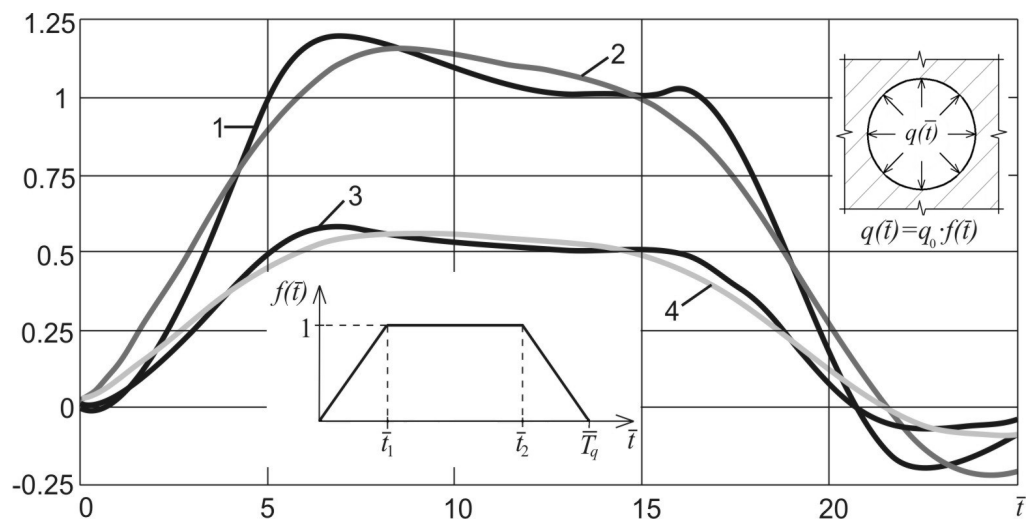


Рис. 2.5. Графіки нормованих значень величин $u_r^{\text{норм.}} = \frac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$

(криві 3 і 4) та $\sigma_{\theta\theta}^{\text{норм.}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$ (криві 1 і 2)

Як свідчать дані розрахунків за формулами (2.46) та (2.42), і радіальні переміщення, і тангенціальні напруження досягають на границі найбільших значень при $\bar{t}=7$, а найменших – при $\bar{t}=22.5$. В околі $\bar{t}=15$ обидва параметри практично не відрізняються від своїх значень при статичному навантаженні. Крім того, слід відмітити, що граничні напруження мають локальний максимум при $\bar{t}=15.95$.

Бачимо, що при використанні в другому підході восьми членів ряду Фур'є (криві 2 і 4) отримуємо досить приблизну картину динамічного НДС. Детальніше співставлення нормованих радіальних переміщень, отриманих за двома підходами, міститься в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

\bar{t}	Еталонне значення $u_r^{норм.}$	Наближені значення за формулою (2.49)					
		$K=7$		$K=11$		$K=15$	
		$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	0.574	0.543	5.4	0.585	1.9	0.577	0.5
15	0.502	0.483	3.8	0.518	3.2	0.505	0.6
22.5	-0.0725	-0.0568	21.7	-0.0793	9.4	-0.0749	3.3

Результати обчислення і порівняння нормованих тангенціальних напружень наведені в таблиці 2.2

Як бачимо, при збільшенні кількості членів ряду Фур'є наближений розв'язок прямує, хоча і досить повільно, до еталонного. Зазначимо, що вже при 12 членах ряду ($K=11$) розбіжність максимальних значень параметрів НДС не перевищує 2%, а відповідні графіки візуально майже не відрізняються між собою. Отже, за наявності надійного інструменту для визначення переміщень і

напружень при вимушених гармонічних коливаннях такий підхід може успішно застосовуватись при дослідженні реакції двовимірних пружних об'єктів, послаблених різного роду отворами

Таблиця 2.2

\bar{t}	Еталонн е значення $\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Наближені значення за формулою (2.50)					
		$K=7$		$K=11$		$K=15$	
		$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	1.198	1.109	7.4	1.213	1.3	1.205	0.6
15	1.005	0.990	1.5	1.055	5.0	1.016	1.1
15.95	1.020	0.917	10.1	1.020	0.1	1.011	0.9
22.5	-0.193	-0.130	32.9	-0.120	3.4	-0.198	2.6

Наведені дані наочно свідчать про те, навіть при дії на пружний об'єкт короткочасного імпульсу перехід в частотну область може бути ефективним засобом дослідження коливань.

2.4 Дослідження НДС лінійно пружних масивів при дії параболічного імпульсу .

В стані плоскої деформації розглядається реакція пружного середовища послабленого циліндричним отвором, на дію параболічного імпульсу.

На рис. 2.6 наведені графіки нормованих значень величин $u_r^{норм.} = \frac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$ (криві 3 і 4) та $\sigma_{\theta\theta}^{норм.} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$ (криві 1 і 2), обчислених в точках границі отвору. Графіки 1 і 3 побудовані за допомогою чисельно-аналітичного підходу,

тобто з використанням співвідношень відповідно (2.46) та (2.42). Для побудови графіків 2 і 4 застосовані наближені співвідношення (2.49) та (2.50) відповідно, причому при розрахунках було використано вісім перших членів ряду ($K=7$). Навантаження у вигляді трапецеїдального імпульсу мало параметри $\bar{t}_1=4.44$, $\bar{t}_2=15.56$, $\bar{T}_q=20$, тоді як пружне середовище характеризувалось коефіцієнтом Пуассона $\nu=0.25$ ($\lambda=\mu$), модулем зсуву $\mu=80000$ МПа та густиною $\rho=1750$ кг/м³.

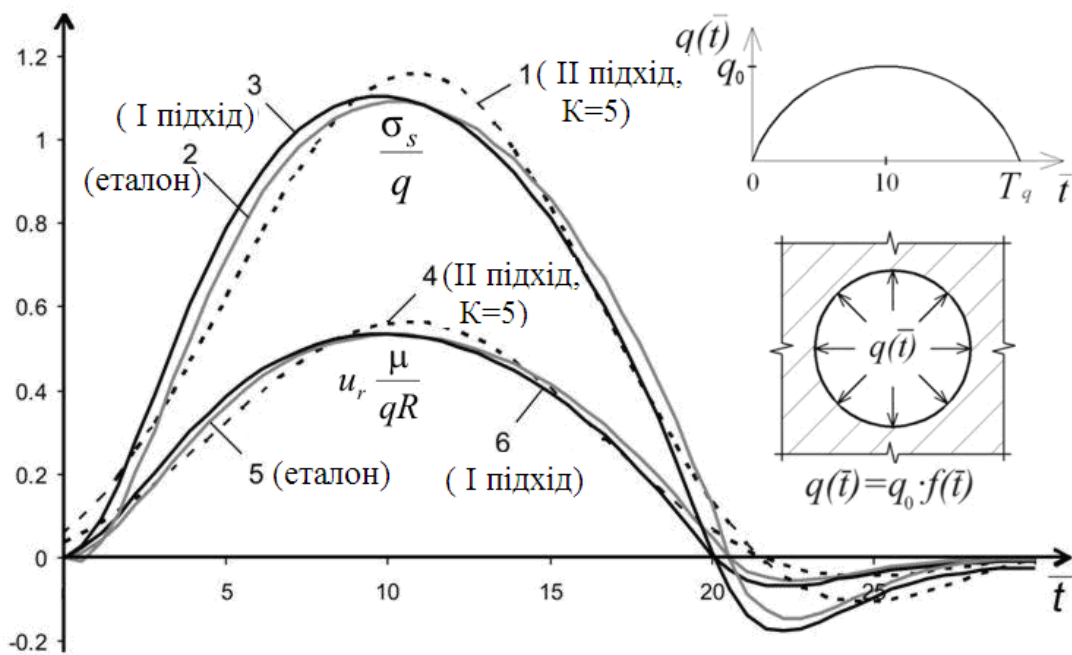


Рис. 2.6. Графіки нормованих значень величин $u_r^{норм.} = \frac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$

$$\text{(криві 3 і 4) та } \sigma_{\theta\theta}^{норм.} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$$

Як свідчать дані розрахунків за формулами (2.46) та (2.42), і радіальні переміщення, і тангенціальні напруження досягають на границі максимуму в момент часу $\bar{t}=7$, а мінімуму – в момент $\bar{t}=22.5$. В околі $\bar{t}=15$ і переміщення, і напруження мало відрізняються від своїх значень при статичному навантаженні. Ще відмітимо локальний максимум граничних напружень, який спостерігається в момент часу $\bar{t}=15.95$.

Значимо, що при використанні в розрахунках за другим підходом восьми

гармонік отримуємо досить помітну похибку при визначенні параметрів динамічного НДС (графіки 2 і 4). В табл. 2.3 наведені детальні результати обчислення за двома підходами нормованих радіальних переміщень.

Таблиця 2.3

Нормов. значення часу \bar{t}	Еталонне значення $u_r^{норм.}$	I-й підхід $u_r \frac{\mu}{qR}$	II-й підхід з використанням K гармонік				
			$K=5$	$K=11$	$K=15$	$K=19$	$K=23$
10.2	0.534	0.535	0.564	0.532	0.534	0.534	0.534
22.6	-0.0555	-0.068	-0.025	-0.059	-0.06	-0.058	-0.056

В таблиці 2.4 містяться значення нормованих тангенціальних напружень, обчислених за обома підходами.

Таблиця 2.4

Нормов. значення часу \bar{t}	Еталонні значення	Застосування I-го підходу	II-й підхід з використанням K гармонік				
			$K=5$	$K=11$	$K=15$	$K=19$	$K=23$
10.2	1.0913	1.104	1.153	1.087	1.092	1.091	1.091
22.6	-0.148	-0.173	-0.065	-0.1477	-0.156	-0.155	-0.152

Аналіз наведених даних дозволяє зробити висновок про те, що із збільшенням кількості гармонік наближений розв'язок прямує, до еталонного. Бачимо, що при 12 членах ряду ($K=11$) розбіжність між максимальними еталонними значеннями параметрів НДС і їхніми наближеними аналогами не перевищує 2%. При цьому відповідні графіки майже не можливо відрізнити на рисунку. Отже, якщо буде розроблено апарат для чисельного визначення переміщень і напружень при вимушених гармонічних коливаннях, то такий підхід можна буде успішно застосовувати для аналізу динамічної реакції двовимірних пружних об'єктів, послаблених різного роду отворами.

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ В ПРУЖНОМУ
СЕРЕДОВИЩІ З ПОСЛАБЛЕННЯМИ

В третьому розділі розглянуто чисельну реалізацію МГЧІР в задачах про нестационарні коливання за відсутності центральної симетрії, тобто про динамічну реакцію масивних елементів конструкцій довільної форми.

3.1. Зсувні нестационарні коливання простору, послабленого двома отворами. Модельна задача

В даному параграфі досліджено динамічний НДС масиву з двома круговими циліндричними отворами радіусу $R=3$ м, один з яких виявляється раптово навантаженим. Залежність навантаження від часу має вигляд трапецеїдального імпульсу, а за полярною кутковою координатою є постійним. Відстань між центрами отворів l змінювалась в діапазоні від 7 до 12 метрів. Як можна було передбачити, незалежно від відстані між отворами максимальні переміщення виникають в точці А, розташованій на границі навантаженого отвору та на прямій, що з'єднує центри отворів (рис. 3.1).

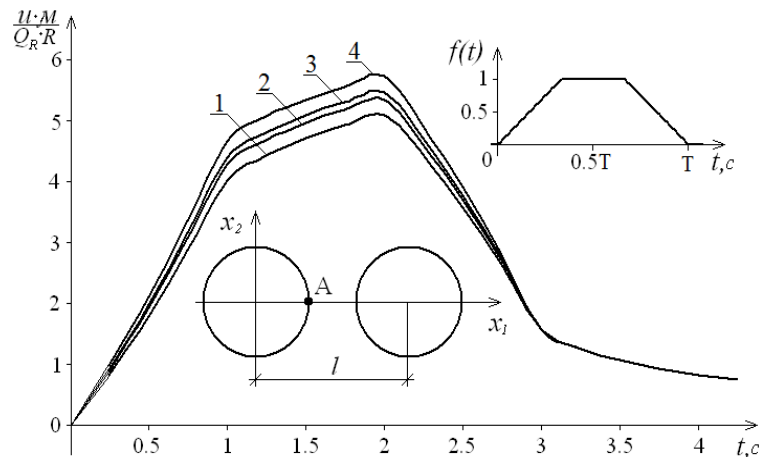


Рис. 3.1. Залежність від часу максиміальних граничних переміщень

Цифрою 1 на рисунку позначено графік залежності від часу переміщення в точці A при $l=12\text{м}$. Найбільше значення нормованого безрозмірного переміщення $u(\bar{x},t)\mu/(Q_R R)$ мало місце в момент часу $t=2T/3$ і становило 5.06. Зазначимо, що при збільшенні відстані l нові криві не сильно відрізняються від графіку, позначеного цифрою 1. Так, при $l=\infty$ максимальне значення нормованого переміщення дорівнює 5.01. По іншому поведуться результати при зменшенні відстані між отворами. Наприклад, при $l=9\text{м}$ (крива, позначена двійкою) $u(\bar{x},t)^{\max}\mu/(Q_R R) = 5.31$, при $l=8\text{м}$ (крива 3) $u(\bar{x},t)^{\max}\mu/(Q_R R) = 5.43$, а при $l=7\text{м}$ (крива 4) цей параметр мав значення 5.69.

Нерівномірність розподілу переміщень вздовж границі також стає більш помітною при зменшенні відстані між отворами. На рис. 3.2 в полярних координатах побудовані графіки граничних переміщень в різні моменти часу.

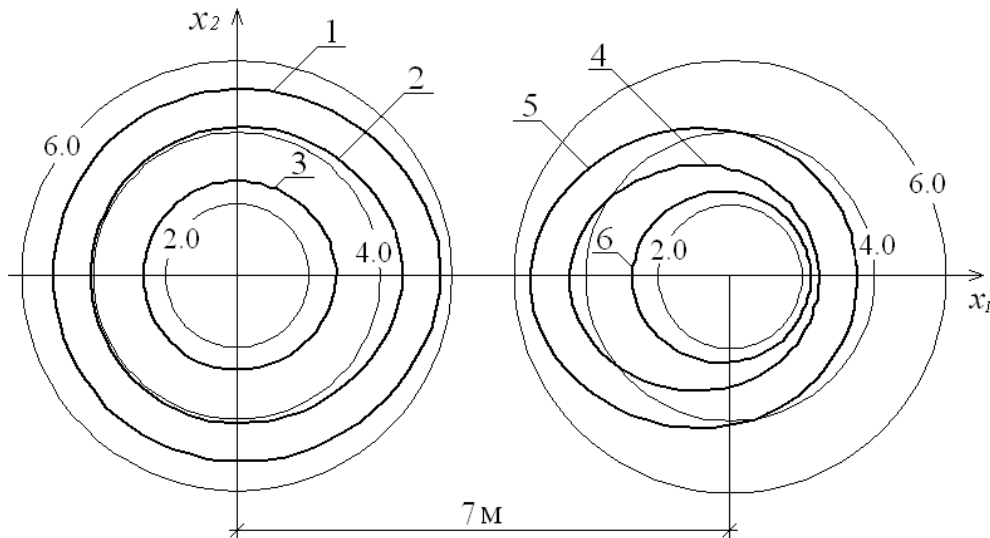


Рис. 3.2. Розподіл граничних переміщень в деякі моменти часу

Водночас розподіл переміщень на границі навантаженого лівого отвору є більш рівномірним. Так, в момент часу $t=2T/3$ (перша крива) найбільше значення безрозмірного переміщення $u(\bar{x},t)\mu/(Q_R R)$ дорівнює 5.69, а найменше – 5.14. З іншого боку, на границі ненавантаженого отвору (крива 5) переміщення в момент часу $t=2T/3$ змінювались в діапазоні від 3.52 в найбільш

віддаленій від навантаженого контуру точці границі до 5.52 в найближчій точці (рис. 3.2).

Подібна картина спостерігалась і в інші моменти часу. Так, при $t=T/3$ на навантаженому отворі (друга крива) нормоване переміщення змінювалось в межах від 4.08 до 4.64, а на іншому отворі (четверта крива) нормоване переміщення змінювалось в діапазоні від 2.45 до 4.46. Нарешті, в момент $t=11T/12$ на навантаженому контурі (третья крива) значення нормованого переміщення змінювались від 2.61 до 2.75, а на границі ненавантаженого отвору (шоста крива) діапазон зміни безрозмірних переміщень був обмежений значеннями 2.22 та 2.71.

Таким чином, наведені приклади переконують в тому, що розроблена гранично-елементна методика може бути успішно застосована для дослідження нестационарних зсувних коливань пружних масивів.

3.2. Плоска деформація. Двовимірні нестационарні коливання пружного простору з двома круговими циліндричними отворами один з яких піддається імпульсному навантаженні

В стані плоскої деформації за відсутності об'ємних сил деформований стан тіла описується рівнянням

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} - \ddot{u}_k = -\Phi_k, \quad j,k=1,2. \quad (3.1)$$

Фундаментальний розв'язок задачі $U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t)$, тобто j -а компонента переміщення в точці \vec{y} в момент часу t , яке відповідає дії в точці $\vec{x}\{x_1, x_2\}$ безмежної двовимірної області зосередженого миттєвого одиничного імпульсу, що мав місце в момент часу $t_0=0$ і діяв в k -му напрямі. Таке поле динамічних переміщень задовольняє рівнянню

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} - \ddot{u}_k = \delta(t)\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (3.2)$$

Для тривимірного рівняння нестационарних коливань фундаментальний розв'язок (розв'язок Стокса) має вигляд [110]:

$$U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ U_{kj}^{(1)} \delta \left[t - \left(\frac{R}{C_1} \right) \right] + U_{kj}^{(2)} \delta \left[t - \left(\frac{R}{C_2} \right) \right] + U_{kj}^{(3)} \frac{t}{R^2} \left[H \left(t - \frac{R}{C_1} \right) - H \left(t - \frac{R}{C_2} \right) \right] \right\}, \quad (3.3)$$

$$\text{де } U_{kj}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{R_{,k} R_{,k}}{C_1^2 R}; \quad U_{kj}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta_{jk} - R_{,k} R_{,k}}{C_1^2 R}; \quad U_{kj}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{3R_{,k} R_{,k} - \delta_{jk}}{R}.$$

Як і вище

$$R(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} = \sqrt{r^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Знову розв'язок рівняння (3.2) може трактуватись як такий, що відповідає дії в тривимірному пружному просторі миттєвого імпульсного навантаження, рівномірно з одиничною інтенсивністю розподіленого вздовж прямої, яка проходить через т. $\vec{x}\{x_1, x_2\}$ паралельно осі x_3 , і, відповідно, такий розв'язок може бути отриманий за допомогою інтегрування виразу (3.3):

$$U_{kj}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{kj}(r, x_3, y_3, t) dx_3 = \frac{1}{2\pi\rho} \left[\frac{H(C_1 t - r)}{C_1 r^2} f_{kj}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}, t) + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2 r^2} f_{kj}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right], \quad (3.4)$$

де

$$f_{kj}^{(1)}(r, t) = \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} d_1,$$

$$f_{kj}^{(2)}(r, t) = \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} \left(d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right), \quad d_1 = \sqrt{(C_1 t)^2 - r^2}, \quad d_2 = \sqrt{(C_2 t)^2 - r^2}.$$

Запишемо інтегральне рівняння, яке в цьому випадку є гранично-часовим. Будемо вважати, що початкові умови є нульовими, а масові сили відсутні, що не заважає узагальнювати отримані результати.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_k(\bar{x}_0, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (3.5)$$

де $T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, t)$ - k -та компонента вектора напружень, що діють на площинці з нормаллю n_i та виникають в пружному двовимірному просторі від дії миттєвого імпульсу одиничної інтенсивності (узагальнена похідна фундаментального розв'язку):

$$\begin{aligned} T_{kj}(r, t) = & \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{H(C_1 t - r)}{C_1} \left[-g_{kj}^{(1)}(r) \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_1^3} \right] + \right. \\ & + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2} \left[g_{kj}^{(1)}(r) \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_2^3} + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2^3} \right] + \\ & \left. + \frac{\delta(C_1 t - r)}{C_1} g_{kj}^{(2)}(r) \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - \frac{\delta(C_2 t - r)}{C_2} g_{kj}^{(2)}(r) \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$g_{kj}^{(1)}(r) = \frac{-2}{r^3} \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right),$$

$$g_{kj}^{(2)}(r) = \frac{-2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + \frac{1}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right), \quad g_{kj}^{(3)}(r) = \mu \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{2}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right).$$

Неважко побачити, що вираз узагальненої похідної $T_{kj}(r,t)$ містить в своєму складі величину

$$\frac{1}{[C_k^2(t-\tau)^2-r^2]^{1/2}} \delta[C_k(t-r)-r], \quad (3.7)$$

яка при $C_k^2(t-\tau)^2=r^2$ стає нескінченно великою, тому за квадратурними формулами обчислити другий інтеграл в правій частині (3.5) неможливо. Зазначимо, що з'являється ця компонента в результаті диференціювання за просторовою координатою фундаментального розв'язку (3.4). Поступимо так само, як було зроблено в аналогічній ситуації і у задачі про зсувні коливання. Тобто за допомогою інтегрування частинами перекинемо операцію диференціювання з просторової координати на часову, сподіваючись на те, що при цьому сильна сингулярність перетвориться на слабку. Похідну фундаментального розв'язку (3.5) запишемо наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H[C_\alpha(t-\tau)-r] \right\}. \quad (3.8)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] = \frac{r_{,j}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \quad (3.9)$$

та

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H[C_\alpha(t-\tau)-r] \right\}, \quad (3.10)$$

похідній (3.9) надамо вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau) - r] \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) - \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{H(C_\alpha t - r)}{C_\alpha r^2} f_{kj}^{(\alpha)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.11).$$

Якщо підставити (3.6) у вираз

$$T_{lk} = \left[\rho(C_1^2 - 2C_2^2) U_{lk,j} \delta_{km} + \rho C_2^2 (U_{lk,m} + U_{lm,k}) \right] n_m, \quad (3.12)$$

який пов'язує між собою розв'язки $T_{kj}(r, t)$ та $U_{kj}(r, t)$, то інтегруючи частинами за часом при нульових початкових умовах другий інтеграл у правій частині рівняння (3.2), будемо мати:

$$\int_0^{t^+} T_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) d\tau = \int_0^{t^+} Z_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) - W_{lk}(x, y, t-\tau) \dot{u}_k(y, \tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Тепер гранично-часове інтегральне рівняння набуває такого вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \left[Z_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) u_j(\bar{y}, \tau) - W_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) \dot{u}_j(\bar{y}, \tau) \right] d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де

$$W_{lk} = \frac{C_2^2}{2\pi C_1^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} 2r_{,l} r_{,k} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,l} n_{,k} \right] \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) + r_{,k} n_{,l} \right] \frac{1}{R_2} \quad (3.15)$$

i

$$\begin{aligned}
Z_{lk} = Z_{lk}^{(1)} + Z_{lk}^{(2)} = \frac{C_2^2}{2\pi C_1} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{lk} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) - 2r_{,l} r_{,k} \left(\frac{C_1(t-\tau) - r}{R_1^3} + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + \frac{4}{rR_1} + \frac{8R_1}{r^3} \right) \right] + n_{,l} r_{,k} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) + n_{,k} r_{,l} \left(-\frac{\lambda C_1(t-\tau) - r}{\mu R_1^3} + \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) \right\} + \\
+ \frac{C_1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[-\delta_{lk} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) + 2r_{,l} r_{,k} \left(\frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} + \frac{4}{rR_2} + \frac{8R_2}{r^3} \right) \right] - \right. \\
\left. n_{,l} r_{,k} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) - n_{,k} r_{,l} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} \right) \right\}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Дискретизація гранично-часового інтегрального рівняння (3.16) за звичайною процедурою МГЕ полягає у наступному. По-перше, границя розрахункової області подається у вигляді сукупності елементів простої форми, а по-друге, приймається гіпотеза стосовно закону, за яким змінюються невідомі величини переміщень і напружень в межах кожного елемента. Оскільки до складу змінних у розглядуваній задачі входить ще і час, то необхідно припустити, яким чином змінюються на кожному кроці. Наприклад, якщо прийняти, що граничні напруження в межах кожного часового інтервалу є постійними, то інтегрування за часом першого доданку у правій частині рівняння (3.5) можна виконати аналітично:

$$\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t_n - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\tau = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho C_\alpha^2} \left[\delta_{lk} H_\alpha + (-1)^\alpha (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) G_\alpha \right], \quad (3.17)$$

де

$$H_\alpha = \ln \left[\frac{\eta_\alpha + (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2}}{\theta_\alpha + (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2}} \right], \quad G_\alpha = \eta_\alpha (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2} - \theta_\alpha (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2} \quad (3.18)$$

$$\eta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha(t_n - \tau_{m-1})/r, & \text{при } r < C_\alpha(t_n - \tau_{m-1}) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha(t_n - \tau_{m-1}) \end{cases}, \quad (3.19)$$

$$\theta_{\alpha} = \begin{cases} C_{\alpha}(t_n - \tau_m) / r, & \text{при } r < C_{\alpha}(t_n - \tau_m) \\ 1, & \text{при } r \geq C_{\alpha}(t_n - \tau_m) \end{cases} \quad (3.20)$$

Наведені співвідношення складають основу алгоритму для чисельного дослідження нестационарних двовимірних коливань пружних масивів.

3.3 Динамічна реакція двовимірного масиву, послабленого двома круговими отворами.

За допомогою розробленої на основі методу ГЧІР чисельної методики був проведений аналіз динамічної поведінки плоско деформованого масиву з двома однаковими круговими отворами радіусу R . До границі лівого отвору був раптово прикладений радіальний тиск (рис. 3.3), зміна якого в часі описується трапецеїдальним імпульсом.

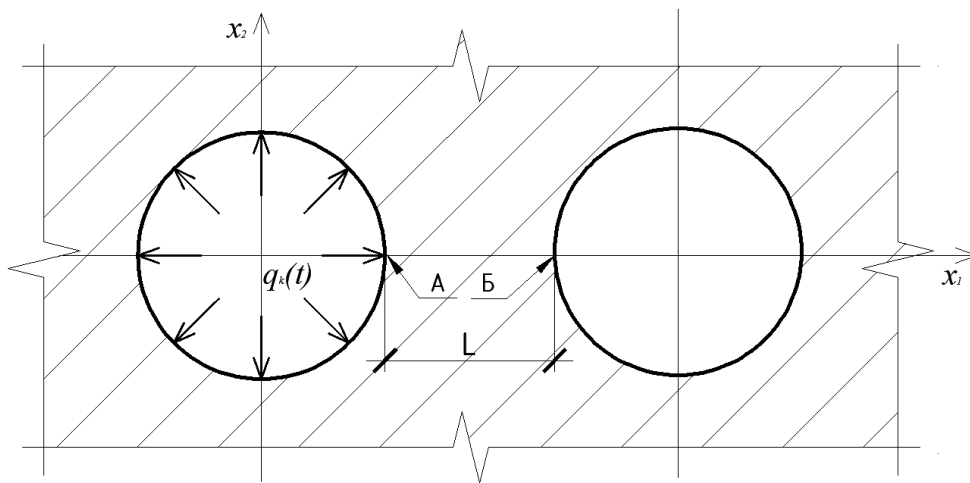


Рис. 3.3. Розрахункова область

Розрахунки були проведені при трьох варіантах відстані L між границями отворів - $L=2R$, $L=2R/3$ і $L=R/3$. Найменший взаємний вплив на деформацію сусіднього отвору має місце в першому випадку, коли відстань між отворами дорівнювала двом радіусам (рис. 3.3). На рисунку графік залежності від часу нормованого переміщення в т. А (точка на навантаженому отворі, найближча

до ненавантаженого) позначений цифрою 1. Цифра 2 відповідає графіку залежності переміщення в т. Б (точка на ненавантаженому отворі). Максимальне значення переміщення в т. А спостерігається в момент часу 2.094 с. і має значення $9.89 \cdot 10^{-5}$ м. Зауважимо, що т. Б є взагалі спочатку не рухається впродовж 0.7 с.

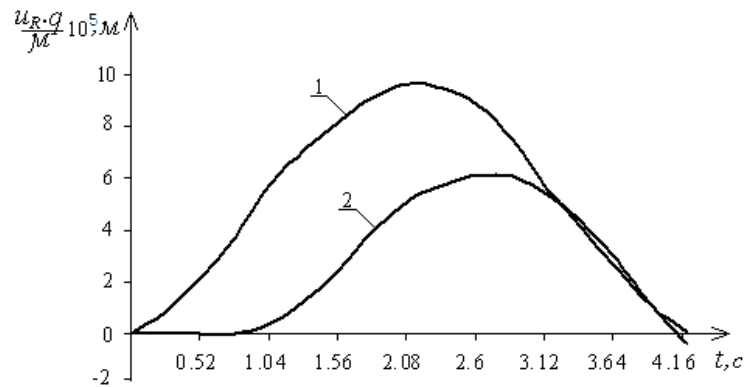


Рис. 3.4. Переміщення точок системи при $L=2R$

Аналогічні результати розрахунків, отримані при співвідношеннях відстаней $L=2R/3$ і $L=R/3$ показані відповідно на рисунках 3.5 і 3.6. Найбільші значення нормованого переміщення в т. А і в цих розрахунках досягались в момент близько 2с. і дорівнювали відповідно $1.79 \cdot 10^{-4}$ м і $2.99 \cdot 10^{-4}$ м.

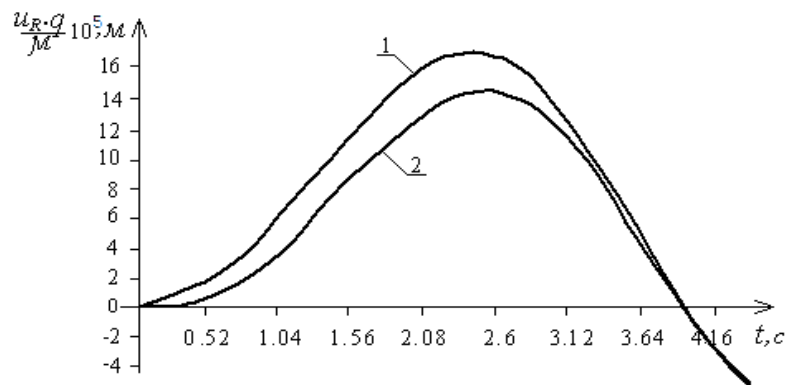


Рис. 3.5. Переміщення точок системи при $L=2R/3$

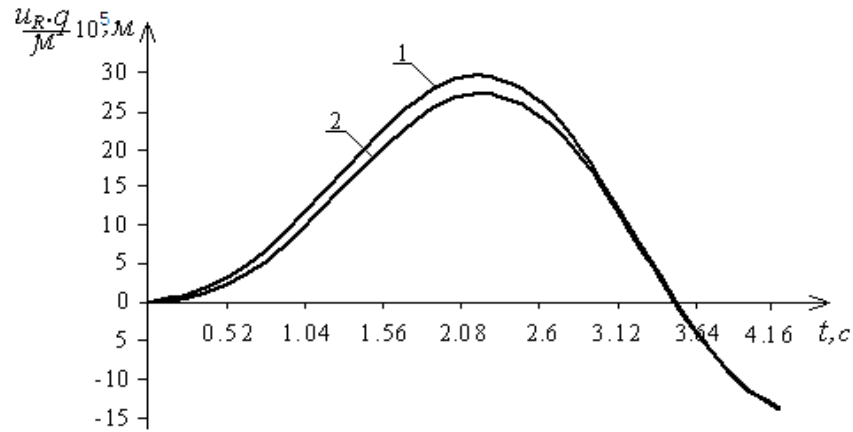


Рис. 3.6. Переміщення точок системи при $L=R/3$

3.4 Нестационарні коливання пружного простору з двома круговими циліндричними отворами. Перехід в частотну область.

Розглядаються двовимірні коливання пружного масивного тіла, до границі якого прикладене навантаження, що є довільною функцією часу. Такі коливання описуються системою рівнянь динамічної рівноваги

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \rho \ddot{u}_1 = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) - \rho \ddot{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Будемо розв'язувати задачу за нульових початкових умов.

Задача переводиться в частотну область за допомогою розкладу в ряд Фур'є. Відповідно замість розв'язання системи рівнянь динамічної рівноваги необхідно багаторазово при різних значеннях (ω)-частоти гармонічних коливань розв'язувати систему рівнянь.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho \omega_k^2 u_1^k = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_2^2} \right) + \rho \omega_k^2 u_2^k = 0 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Для розв'язання задачі застосовується апарат методу потенціалу, тобто задача зводиться до системи ГР (в частотному діапазоні) .

$$\frac{1}{2} u_i^k(\vec{x}) + \int_{\Gamma} u_j^k(\vec{y}) T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega_k) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} q_j^k(\vec{y}) U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega_k) d\Gamma_y \quad (3.23)$$

Тут (u), (q) шукані чи задані переміщення та напруження в точках границі.

Перший етап задачі (розв'язання ГР) дозволяє до визначити незадані граничними умовами (u), та (q).

Фундаментальний розв'язок задачі описується виразом

$$U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left\{ \delta_{kj} \left[H_0^{(1)}(\phi_2) - \frac{H_1^{(1)}(\phi_2)}{\phi_2} + \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{H_1^{(1)}(\phi_1)}{\phi_1} \right] + \right. \\ \left. r_{,k} r_{,j} \left[H_2^{(1)}(\phi_2) - \frac{C_2^2}{C_1^2} H_2^{(1)}(\phi_1) \right] \right\}, \quad k, j = 1, 2 \quad (3.24)$$

тут H_0, H_1, H_2 – функції Ханкеля першого роду, які мають досить складний вигляд і використання яких ускладнює обчислювальний апарат. Також у ГР входить узагальнена похідна фундаментального розв'язку .

$$T_{kj} = n_i \lambda U_{kl,l} + n_i \lambda (U_{kl,j} + U_{kj,l}) \quad (3.25)$$

При зменшенні відстані між точкою спостереження і точкою інтегрування, тобто при, ядра беруть нескінченно великі значення, тому безпосереднє інтегрування виразів, що містять ці функції, у випадку, коли інтегрування виконується по елементу, на якому розташована точка спостереження, неможливо. Для подолання зазначеної перешкоди ядра наближено замінюються початковими відрізками ряду Маклорена. При цьому перший член розкладу виявляється рівним ядру відповідного статичного потенціалу, а решта членів приймають кінцеві значення. Оскільки інтегрування ядер статичної задачі труднощів не викликає, то проблему алгебраїзації системи граничних інтегральних рівнянь можна вважати вирішеною.

Розв'язання тестової задачі про усталені коливання простору із круговим

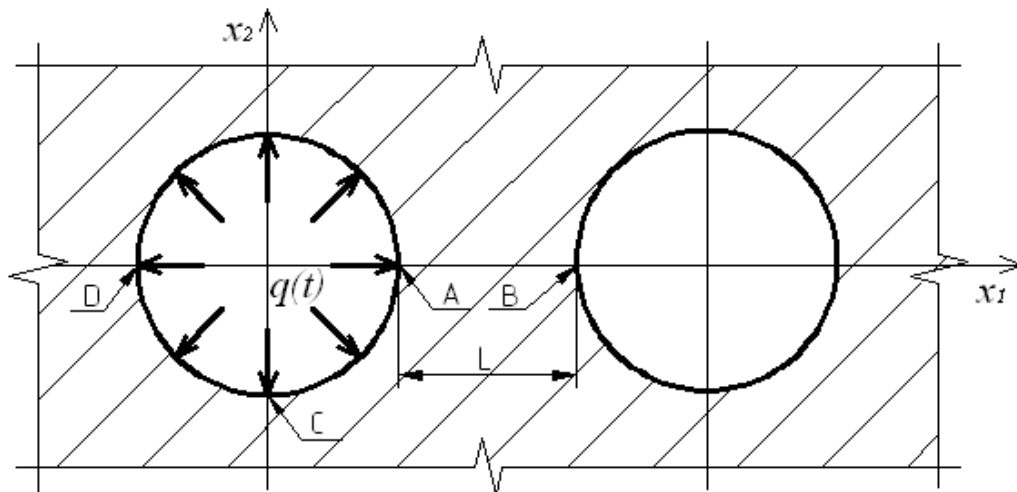


Рис. 3.7. Задача про усталені коливання простору із круговим циліндричним отвором, до границі якого прикладене радіальне навантаження

циліндричним отвором, до границі якого прикладене радіальне навантаження, що змінюється за гармонійним законом, показало, що при

Кусково-квадратичній апроксимації невідомих задача може бути розв'язана з високою точністю в широкому діапазоні частот коливань.

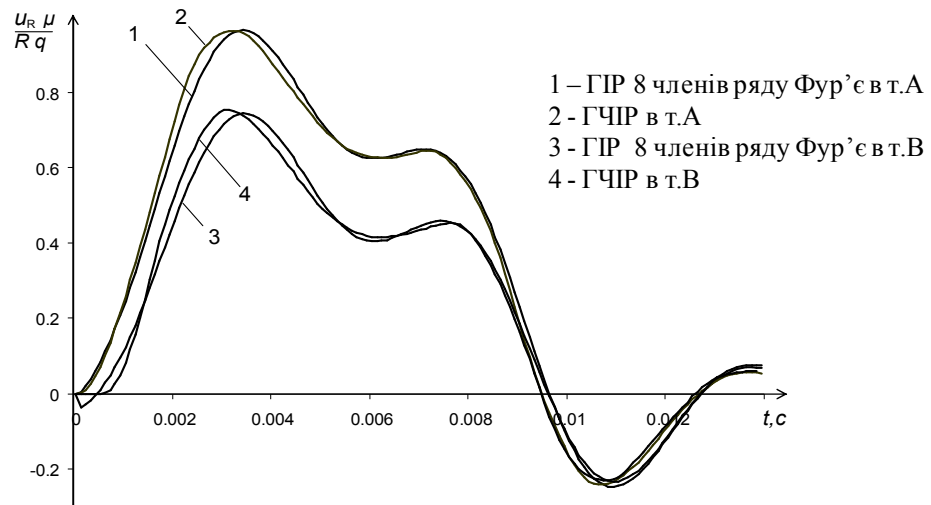


Рис. 3.8. Радіальні переміщення в точках А і В

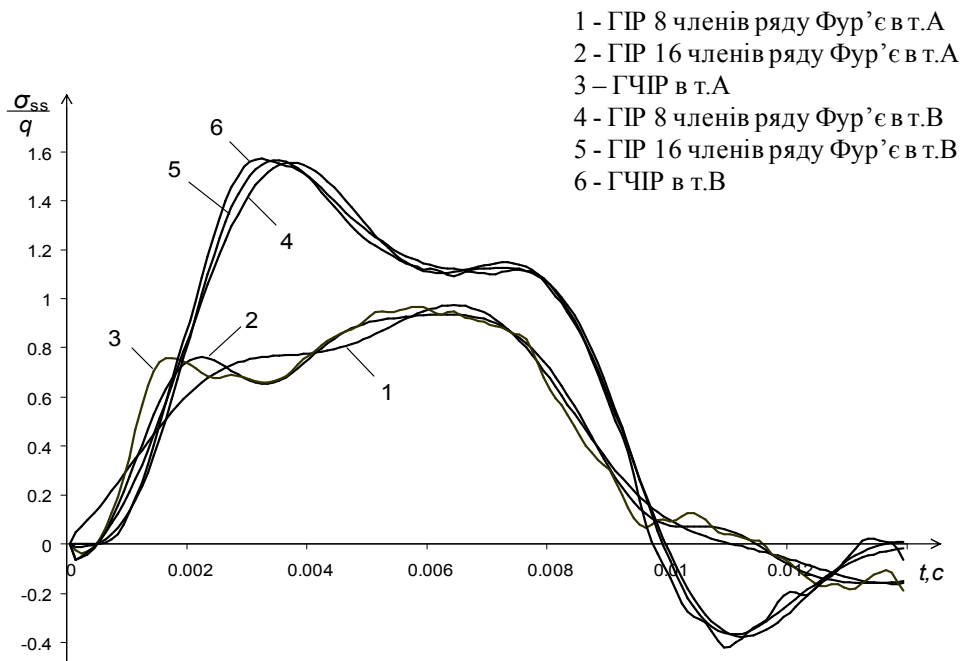


Рис. 3.9. Тангенціальні напруження в точках А і В

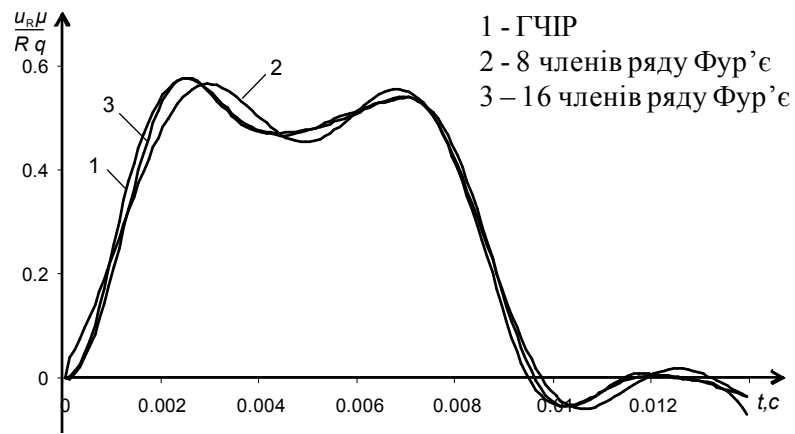


Рис. 3.10. Радіальні переміщення в точки С .

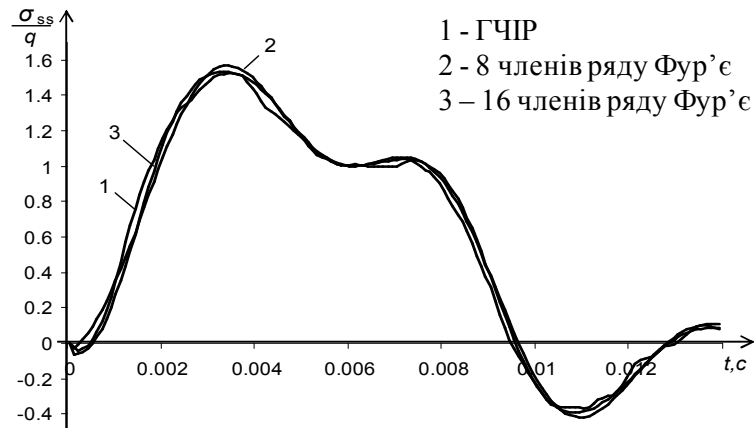


Рис. 3.11. Тангенціальні напруження в точки С

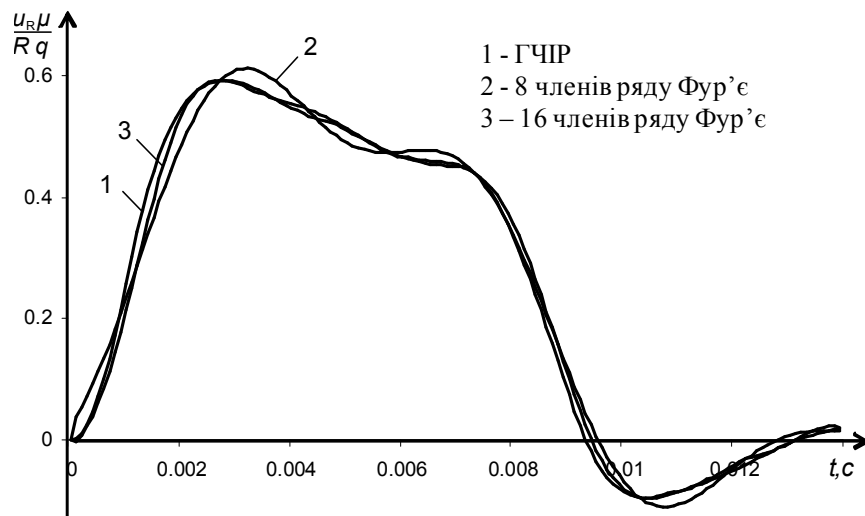


Рис. 3.12. Радіальні переміщення в точки D .

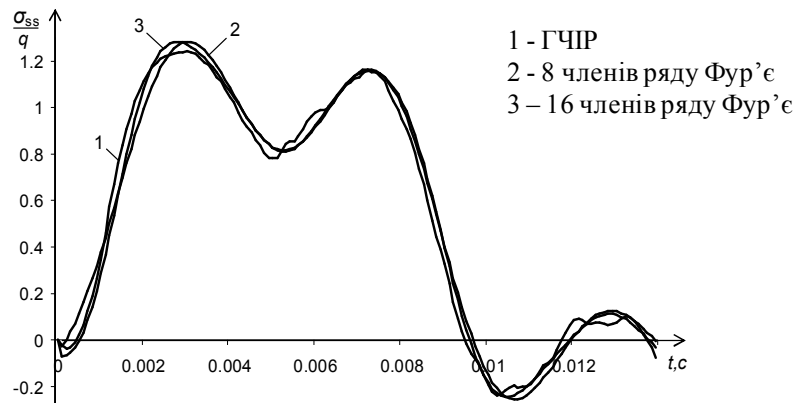


Рис. 3.13. Тангенціальні напруження в точки D

Загальний висновок: наведені результати свідчать про роботоспроможність розробленого алгоритму, який планується застосувати для розв'язання більш складних інженерних задач.

3.5 Взаємний вплив двох циліндричних порожнини при імпульсному навантаженні параболічної форми

Наведені співвідношення складають основу алгоритму для чисельного дослідження нестационарних двовимірних коливань пружних масивів. Розроблену методику було застосовано для аналізу динамічної поведінки двовимірного масиву, послабленого двома однаковими круговими отворами радіусу $R=3\text{м}$. Границя одного з отворів рівномірно навантажена радіальним тиском (рис. 3.14), зміна якого в часі описується параболічним імпульсом

$$q(t) = q_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{4}{T_q^2} (tT_q - t^2), & 0 \leq t \leq T_q, \\ 0, & t > T_q. \end{cases} \quad (3.26)$$

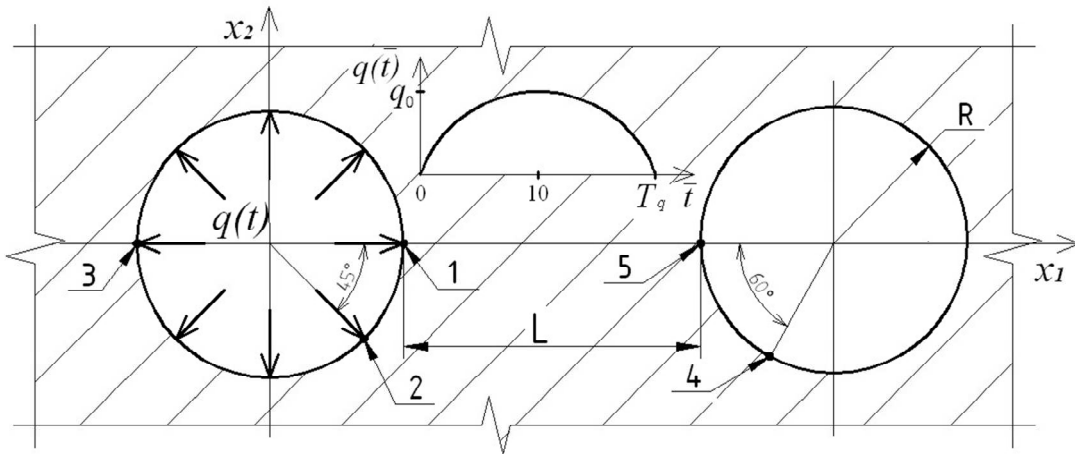


Рис. 3.14. Взаємний вплив двох циліндричних отворів при імпульсному навантаженні параболічної форми

Час дії імпульсу становив $T=20R/C_1=0.0108c$.

Результати розрахунків наведені на рисунках 3.15 і 3.16 (відповідно нормовані радіальні переміщення та тангенціальні напруження в точках границі, позначених цифрами 1-5).

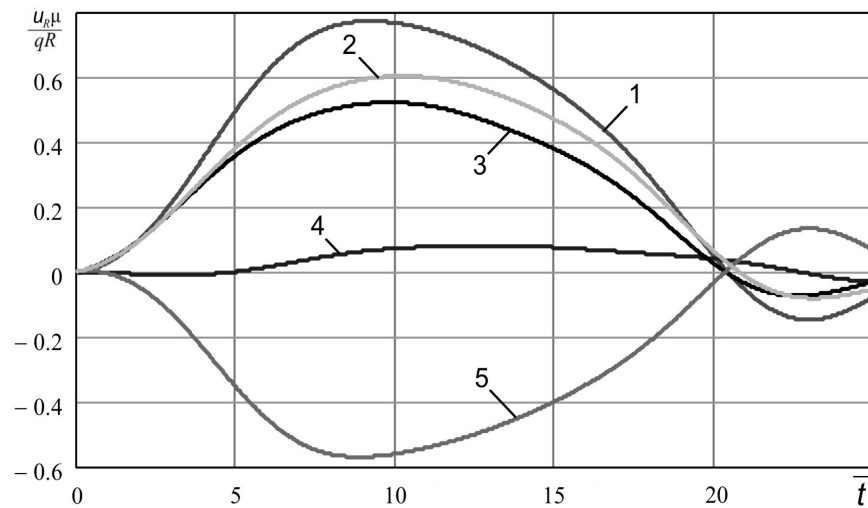


Рис. 3.15. Графіки залежності від часу нормованих радіальних переміщень

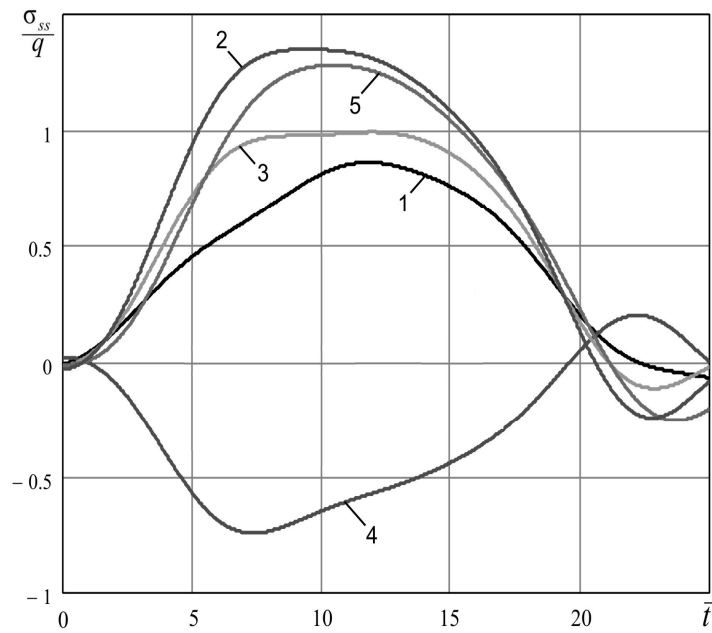


Рис. 3.16. Графіки залежності від часу нормованих тангенціальних напружень

На рис. 3.17 та 3.18 показаний розподіл відповідно нормованих радіальних переміщень $u_r^{норм.} = u_r \mu / (q_0 R)$ та нормальних напружень $\sigma_{ss}^{норм.} = \sigma_{ss} / q_0$ по контуру в моменти безрозмірного часу: $\bar{t}_1 = 6.75$ ($t_1 = 0.0051$ с., позначка 1), $\bar{t}_2 = 15$ ($t_2 = 0.0082$ с., позначка 2) та $\bar{t}_3 = 22.8$ ($t_3 = 0.0123$ с., позначка 3).

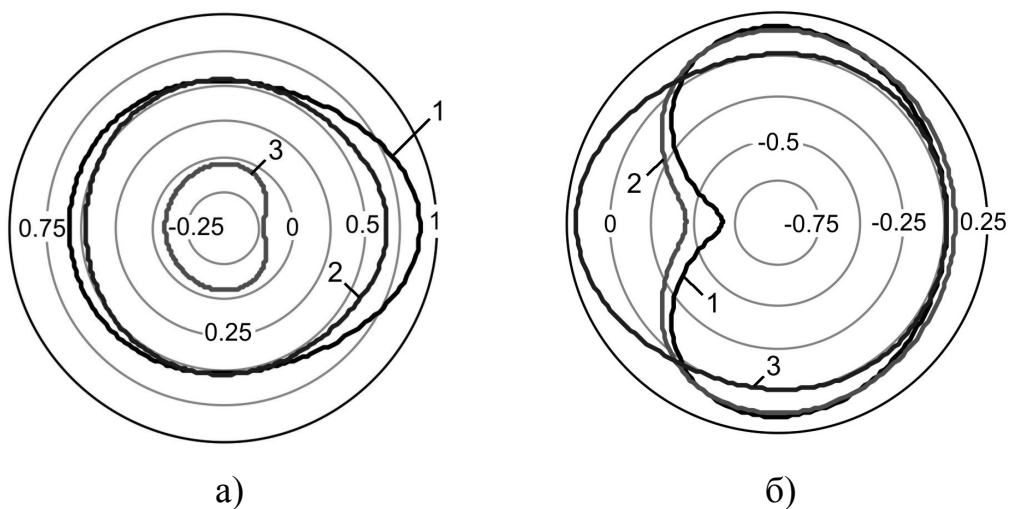


Рис. 3.17. а) переміщення на границі навантаженого отвору,
б) переміщення на границі ненавантаженого отвору

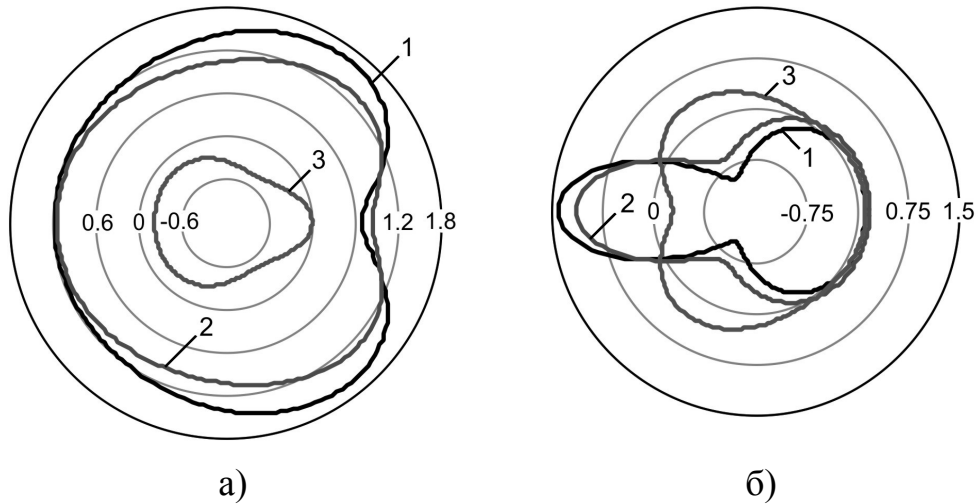


Рис. 3.18. а) напруження на границі навантаженого отвору,
б) напруження на границі ненавантаженого отвору

Значення нормованих радіальних переміщень в точках границі у моменти часу $t_1=0.0051c.$ і $t_3=0.0123c.$ містяться в таблиці 3.1. Значення були обчислені за двома підходами – за першим з використанням переходу в частотну область і утримання окрім статичної складової ще 11 гармонік, а за другим підходом розв’язання відбувалось безпосередньо в часовому просторі з використанням співвідношень, отриманих в даному пункті.

Таблиця 3.1

№ точки	1	2	3	4	5
$u_r^{норм.}(t_1)$ 1-й підхід	0.774	0.574	0.523	0.07	-0.565
$u_r^{норм.}(t_1)$ 2-й підхід	0.759	0.573	0.526	0.059	-0.531
$u_r^{норм.}(t_3)$ 1-й підхід	-0.144	-0.065	-0.071	0.0	0.135
$u_r^{норм.}(t_3)$ 2-й підхід	-0.155	-0.071	-0.074	0.0	0.140

В таблиці 3.2 містяться значення нормованих тангенціальних напружень, обчислених за двома підходами в тих самих точках границі у моменти часу $t_1=0.0051c.$ і $t_3=0.0123c.$ Знову при використанні першого підходу утримувались окрім статичної складової ще 11 гармонік.

Таблиця 3.2

№ точки	1	2	3	4	5
$\sigma_{ss}^{норм.}(t_1)$ 1-й підхід	0.776	1.362	0.978	-0.673	1.269
$\sigma_{ss}^{норм.}(t_1)$ 2-й підхід	0.851	1.345	0.996	-0.647	1.158
$\sigma_{ss}^{норм.}(t_3)$ 1-й підхід	-0.022	-0.263	-0.114	0.189	-0.221
$\sigma_{ss}^{норм.}(t_3)$ 2-й підхід	-0.034	-0.266	-0.122	0.201	-0.256

Зазначимо, що в даній задачі час, потрібний для отримання розв'язку за першим підходом, перевищував часові витрати при розрахунках за другим підходом приблизно в 4,5 рази. В той же час при збільшенні тривалості імпульсного навантаження ця різниця досить швидко зменшується. Також різниця стає менш помітною, коли навантаження має вигляд імпульсів, що повторюються з певною періодичністю.

3.6 Розв'язання задачі про заємний вплив двох циліндричних отворів при імпульсному навантаженні трапецеїдальної симетричної форми в частотній області.

Користуючись переходом в частотну область, розв'яжемо задачу про динамічний НДС пружного простору, послабленого двома циліндричними отворами круглого перерізу (рис. 3.19), границя одного з яких зазнає дії тиску, трапецеїдальної форми.

Відомо, що коли пружний об'єкт займає нескінченну область, то ефективним засобом задач будівельної механіки, зокрема тієї, яка стосується аналізу гармонічних вимушених коливань, є метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), особлива привабливість якого полягає в даному випадку в тому, що амплітуди переміщень і напружень на границі можна знайти без дискретизації області, яку займає об'єкт.

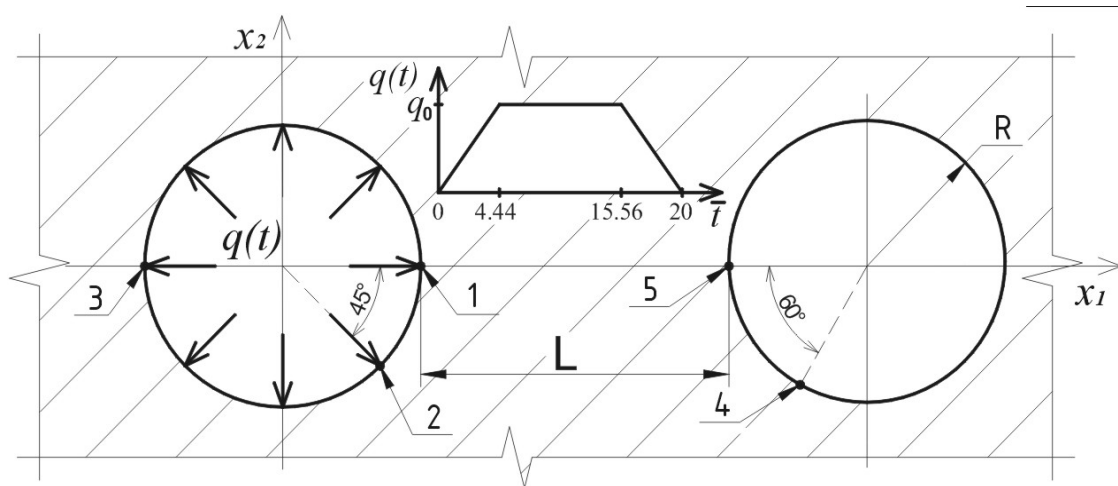


Рис. 3.19. Схема навантаження в задачі про взаємний вплив двох циліндричних отворів при симетричному імпульсі

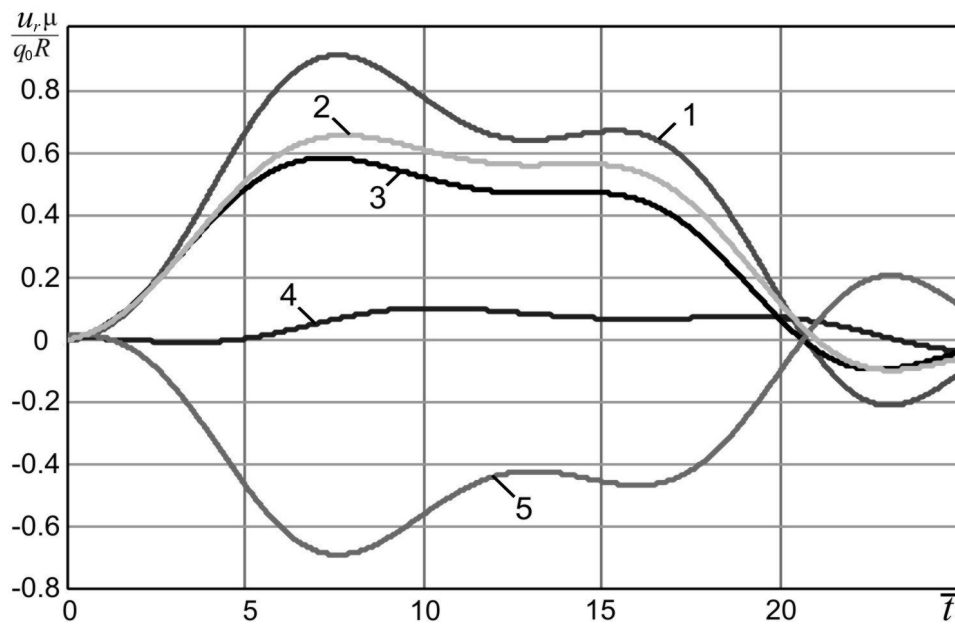


Рис. 3.20. Графіки залежності від часу нормованих радіальних переміщень

На рис. 3.20 наведені графіки залежності від часу нормованих радіальних переміщень у точках навантаженого (криві 1, 2, 3) і ненавантаженого (криві 4, 5) контурів. Номери точок на рис. 3.19 відповідають номерам кривих на рис. 3.20. Переміщення обчислені з використанням виразу (2.49) при $K=11$.

Локальні максимуми і мінімуми переміщень, як свідчать графіки, у всіх точках спостерігаються приблизно в одні й ті самі моменти безрозмірного часу: $\bar{t}_1=7$, $\bar{t}_2=15.4$ і $\bar{t}_3=22.6$. Значення нормованих радіальних переміщень $u_r^{норм.} = u_r \mu / (q_0 R)$ у вказані моменти часу, а також при статичному прикладенні навантаження q_0 наведені в табл. 3.3. Для порівняння в останньому стовпчику таблиці розміщені результати, що відповідають переміщенням на границі простору з одним циліндричним отвором, обчисленим за формулою (2.42).

Таблиця 3.3

Момент часу	Безрозмірні переміщення $u_r^{норм.}$ в граничних точках					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
\bar{t}_1	0.898	0.643	0.579	0.051	-0.682	0.574
\bar{t}_2	0.666	0.552	0.462	0.064	-0.464	0.502
\bar{t}_3	-0.206	-0.096	-0.098	0.015	0.195	-0.073
Статичний рівень	0.686	0.549	0.480	0.059	-0.481	0.500

Розподіл радіальних переміщень вздовж границі навантаженого отвору в моменти часу \bar{t}_1 , \bar{t}_2 і \bar{t}_3 показаний на рисунку 3.21,а (криві 1, 2, 3 відповідно). На рисунку 3.21,б наведений розподіл переміщень на границі ненавантаженого отвору.

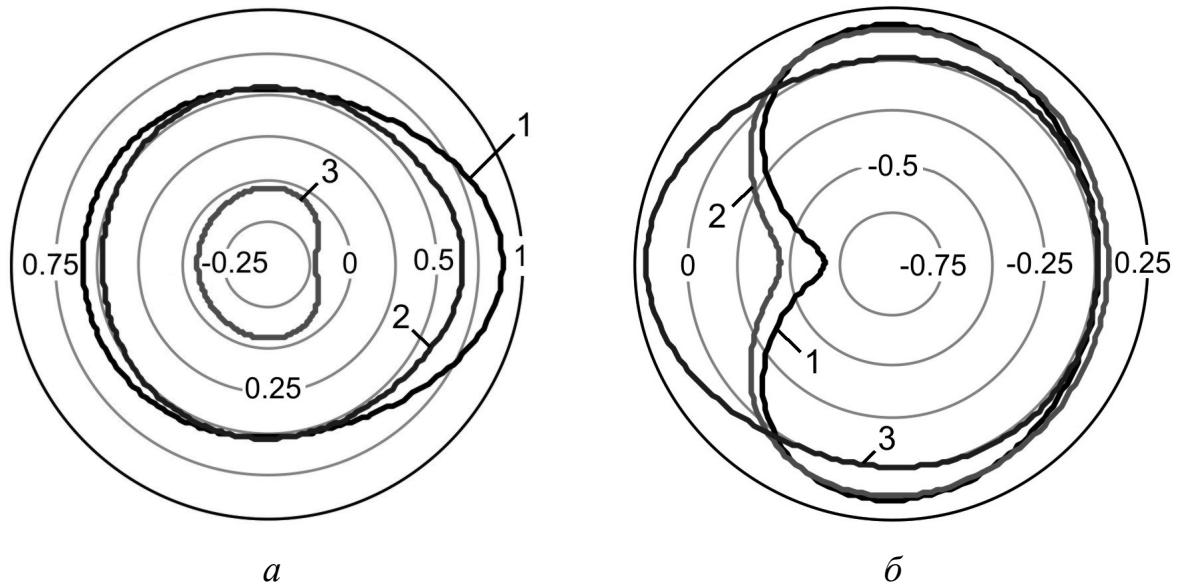


Рис. 3.21. а) переміщення на границі навантаженого отвору,
б) переміщення на границі ненавантаженого отвору

На рис. 3.22 приведені графіки залежності від часу нормованих тангенціальних напружень $\sigma_{ss}^{\text{норм.}} = \sigma_{ss}/q_0$ в тих самих п'яти точках границі.

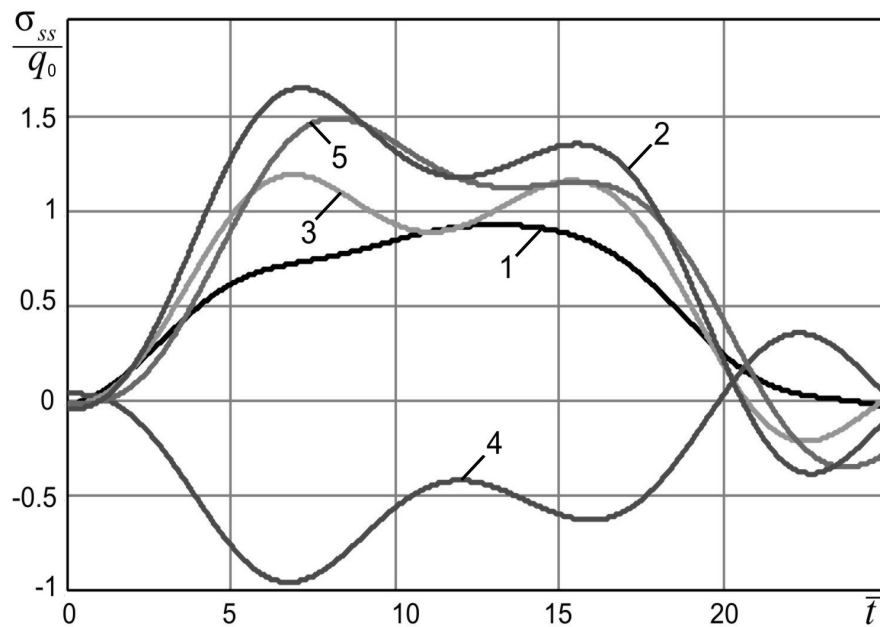


Рис. 3.22. Графіки залежності від часу нормованих тангенціальних напружень

В табл. 3.4 показані в зазначені вище моменти часу величини нормованих

напружень. Знову для порівняння в самому правому стовпчику таблиці наведені результати обчислення напружень на границі простору з одним отвором за формулою (2.43), а в самому нижньому рядку – дані, отримані при статичному прикладенні тиску. Зазначимо, що всі чисельні результати були отримані з використанням виразу (2.48) при утриманні 12 гармонік.

Розподіл тангенціальних напружень в моменти часу \bar{t}_1 , \bar{t}_2 і \bar{t}_3 (криві 1, 2, 3 відповідно) показаний на рисунках 3.23,*а* (границя навантаженого отвору) та 3.23,*б* (границя ненавантаженого отвору).

Підсумовуючи результати розрахунків відмітимо, що найбільші тангенціальні напруження на навантаженому контурі виникають поблизу другої точки в момент часу \bar{t}_1 , а їх значення приблизно на 30% перевищують величини напружень при статичному прикладенні навантаження. Максимуми напружень поблизу третьої точки також спостерігаються в момент часу \bar{t}_1 , але перевищення статичного рівня є меншим за 20%. А от поблизу першої точки найбільші напруження мають місце в момент часу \bar{t}_2 . Їхнє перевищення порівняно із статичним рівнем становить 13%. В одночас на ненавантаженому контурі досить великі тангенціальні напруження спостерігаються в моменти \bar{t}_1 і \bar{t}_3 поблизу точки 5.

Табл. 3.4

Момент часу	Нормовані тангенціальні напруження $\sigma_{ss}^{норм.}$ в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
\bar{t}_1	0.723	1.638	1.182	-0.957	1.410	1.205
\bar{t}_2	0.867	1.343	1.152	-0.620	1.142	1.018
\bar{t}_3	0.021	-0.387	-0.218	0.343	-0.280	-0.200
Статичне навантаження	0.768	1.260	0.985	-0.609	1.111	1.00

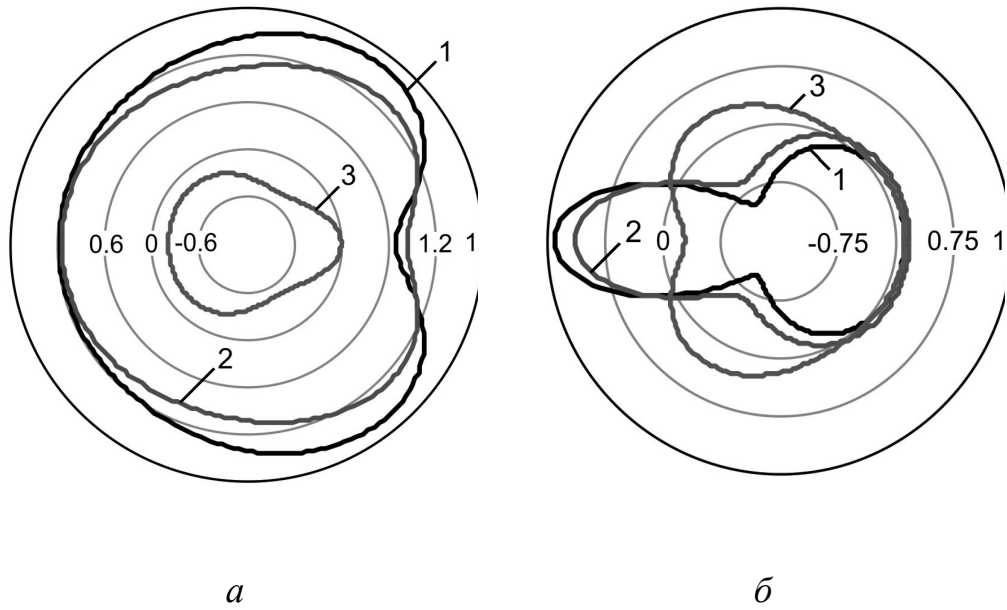


Рис. 3.23. а) напруження на границі навантаженого отвору,
б) напруження на границі ненавантаженого отвору

Як бачимо, за допомогою розробленої чисельної методики, яка реалізує другий підхід, можна детально досліджувати при імпульсному навантаженні нестационарний двовимірний НДС пружних масивів з різного роду отворами

РОЗДІЛ 4

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНОЇ МЕТОДИКИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НДС МАСИВІВ ПІД ТРУБОПРОВОДОМ

Сьогодні Україна експлуатує близько 40 тис. км. магістральних трубопроводів і є найбільшим у світі транзитером енергоресурсів, більш ніж до 15 країн Європи. Враховуючи геополітичне розташування України, проблема забезпечення надійності та безвідмовності експлуатації та попередження загрози відмов промислового транспорту енергоносіїв набуває ключового першочергового значення, адже 75% трубопровідних магістралей вичерпали свій ресурс та потребують термінового капітального ремонту.

Традиційна технологія виконання капітального ремонту, з підйомом труби з ґрунтового ложа, вичерпала себе, адже на виконання необхідних об'ємів робіт за нею, навіть при застосуванні найсучаснішої традиційної техніки, знадобиться 50...60 років. Крім того піднімання труби на берму траншеї суттєво змінює НДС тіла труби, що може призвести до серйозних негативних технологічних та екологічних наслідків.

4.1 Загальні положення.

Останнім часом розроблено нову технологію швидкісного ремонту магістральних трубопроводів [107], яка виключає необхідність підйому трубопроводу під час ремонту відносно лінії його вихідного залягання та зупинки перекачування продукту.

Після підкопування та розкриття трубопроводу відповідними машинами виконується комплекс робіт з очищення старого ізоляційного покриття та нанесення нового.

Для забезпечення незмінного положення трубопроводу на лінії вихідного залягання (реалізації запропонованої нової технології) виникає необхідність у засипанні ґрунту під тіло труби. Засипаний ґрунт під трубопровід є розпушеним і не має достатньої несучої здатності, тому його необхідно ущільнити до необхідного ступеню з метою виключення порожнин під трубою і її осідання в процесі експлуатації. Адже не належне забезпечення несучої спроможності насипних фундаментів трубопроводів може призвести до серйозних технологічних та екологічних наслідків.

У зв'язку з цим постало серйозне питання забезпечення стійкості насипних ґрунтових фундаментів промислових трубопроводів. Вирішення цієї задачі є першочерговим та актуальним завданням, адже без цього технологія швидкісного капітального ремонту магістральних трубопроводів не може бути реалізована на практиці, а перед країною може постати загроза серйозних збоїв

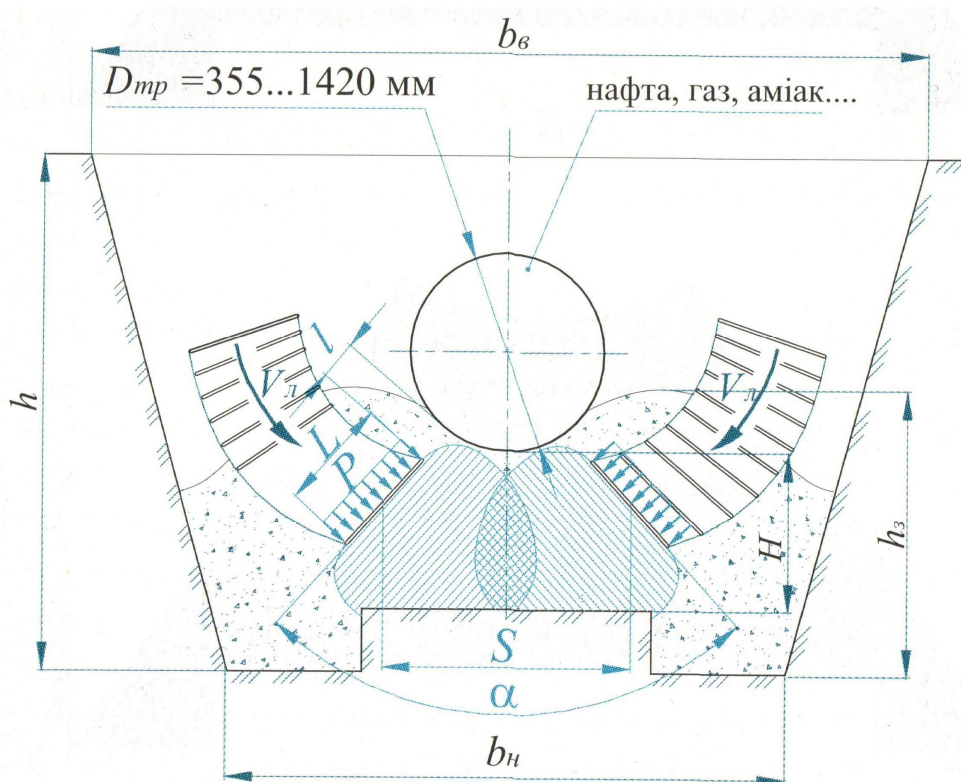


Рис. 4.1. Схема ущільнення ґрунтового масиву під магістральним трубопроводом

У роботі стратегічно і економічно важливої нафто-газотранспортної системи внаслідок не вирішення суто технічних питань.

Напружений стан ґрунтового масиву рис. 4.1 залежить від багатьох факторів, передусім від величини прикладених зовнішніх навантажень, режимів навантажень, фізико-механічних характеристик ґрунту, що ущільнюється, розмірів ґрунтового масиву під трубою, форми та а розмірів траншеї, конструктивних параметрів ґрунтовоущільнювального робочого обладнання.

До конструктивних та силових факторів, що суттєво впливають на процес ущільнення ґрунту під трубопроводами, відносяться геометричні розміри ущільнювальних поверхонь, їхнє взаємне розташування в траншеї відносно трубопроводу та тиск, створюваний ними на масив ґрунту, що ущільнюється (див. рис. 4.1). За робочі поверхні прийнято плоскі недеформовані поверхні (лопатки) прямокутної форми.

Кут установки лопаток α одна відносно одної, характеризує кут обтискування ними ґрунтового масиву. Такі геометричні розміри лопаток, як довжина L , та ширина B , і тиск P , створюваний лопатками, характеризують зону та величину прикладання навантаження на ґрунтовий масив під час його ущільнення. Відстань l від ущільнювальної лопатки до труби визначає положення лопатки відносно трубопроводу, а відстань між лопатками S - ширину ущільнювального масиву. Рівні вибраних

4.2. Уточнення методики розрахунку.

В даному параграфі описується та уточнюється підхід до обчислення сингулярних інтегралів по елементам, на яких розташовано полюс інтегрування, тобто діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи ГР в задачах про двовимірні гармонічні коливання пружних масивних об'єктів. Досліджена застосовність такого підходу при визначенні компонент ядер інтегральних рівнянь в широкому діапазоні частот.

Як відомо, масивні елементів складної форми досить часто зустрічаються в складі сучасних будівельних конструкцій. Природним є прагнення до зниження їх матеріалоемності, чим зумовлений розвиток сучасних чисельних методів розрахунку таких елементів на різноманітні, зокрема, динамічні впливи. Серед сучасних універсальних методів чисельного аналізу конструкцій Важливе місце займає метод граничних інтегральних рівнянь, Найкориснішою рисою методу ГІР є можливість знаходження переміщень і напружень на границі без дискретизації області, яку займає об'єкт розрахунку. В той же час при дослідженні напружено-деформованого стану масивних елементів конструкцій нерідко виникають ситуації, коли необхідно визначити переміщення і напруження тільки на границі та обмеженій кількості точок поблизу границі. Отже, коло задач, для розв'язання яких може ефективно застосовуватись метод ГІР, є досить широким [23, 29]. В той же час методики і алгоритми, які спрямовані на чисельну реалізацію методу ГІР стосовно розв'язання задач динаміки масивів, ще чекають на свою розробку, програмну реалізацію і впровадження.

Далі в цьому параграфі коротко викладені результати досліджень, спрямованих на розробку застосування ефективної чисельної методики для дослідження гармонічних усталених коливань пружних пружних плоско-деформованих масивів складної форми. Алгоритмічною основою чисельної методики являється граничний аналог формули Соміліани для амплітуд переміщень, які виникають внаслідок гармонічних коливаннях об'єктів, що знаходяться в стані плоскої деформації:

$$\frac{1}{2}u_j^*(\vec{x}, \omega) = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2, \quad (4.1)$$

де $u_j^*(\vec{x}, \omega)$ – j -а компонента комплексної амплітуди коливань; ω – кругова частота коливань; точки $\vec{x}\{x_1, x_2\}, \vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ – границя двовимірної області V , що її займає об'єкт розрахунку;

$\tau_j^*(\vec{y}, \omega) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial u_m^*(\vec{y}, \omega)}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial u_j^*(\vec{y}, \omega)}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k^*(\vec{y}, \omega)}{\partial y_j} \right) n_k(\vec{y})$ – компоненти комплексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю $\vec{n} \{n_1, n_2\}$; $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – амплітуди переміщень в пружному двовимірному просторі, які спричинені дією зосередженої сили з одиничною амплітудою, яка прикладена в точці \vec{x} в напрямку осі $0x_j$ (фундаментальний розв'язок задачі) [23]:

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[\delta_{jk} U_0(r, \omega) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega) \right]; \quad (4.2)$$

$$U_0(r, \omega) = H_0^{(1)}(k_1 r) - \frac{H_1^{(1)}(k_2 r)}{k_2 r} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r}; \quad (4.3)$$

$$U_2(r, \omega) = H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r); \quad (4.4)$$

$$k_j = \frac{\omega}{C_j}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r};$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ – відстань між точками \vec{x} і \vec{y} ; ρ - густина матеріалу;

λ і μ – константи Ламе; $H_k^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку k ;

$T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – напруження на площинках з компонентами нормалі n_i , які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили (узагальнена похідна фундаментального розв'язку) [47]:

$$\begin{aligned} T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) &= \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} + \mu \left(\frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} \right) n_m(\vec{y}) = \\ &= \frac{i}{4} \left[r_{,k} n_j T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right] - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} k_1 H_1^{(1)}(k_1 r); \quad (4.6)$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[2H_2^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 2\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]; \quad (4.7)$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 4H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha k_1 r H_1^{(1)}(k_1 r) + 4\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]. \quad (4.8)$$

Прийнята колокаційна схема розв'язання системи ГР (4.1), яка базується на представленні границі розрахункової області сукупністю граничних елементів (ГЕ), в межах кожного з яких задані точки, в яких буде виконуватись рівність (4.1) (так звані точки колокації). Обирається також закон, за яким в межах кожного граничного елемента (ГЕ) змінюються невідомі. Результатом такої дискретизації є перетворення системи ГР (4.1) на систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), невідомими якої є амплітуди незаданих граничними умовами переміщень і напружень у вузлах колокації. Коефіцієнти матриці системи обчислюються шляхом інтегрування по окремим ГЕ при послідовному суміщенні т. \vec{x} з кожним колокаційним вузлом. Ситуація значно ускладнюється в сингулярному випадку, коли інтегрування проводиться по тому самому елементу, на якому розташована т. \vec{x} . В цьому випадку відстань між точками \vec{x} і \vec{y} може стати нескінченно малою, а підінтегральні вирази відповідно набувають нескінченно великих значень. Це унеможлиблює безпосереднє обчислення діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи. В роботі запропоновано наближено замінити функції Ганкеля, що входять до складу ядер ГР, початковими відрізками степеневого ряду. При цьому компоненти ядер також набувають вигляду степеневого ряду, причому перший член ряду виявляється рівним компоненті відповідного статичного потенціалу. Водночас інші члени ряду при $r=0$ мають скінченні значення [47], що забезпечує подолання вказаної перешкоди. Перші декілька членів

розкладення кожної компоненти ядер ГІР наведені нижче.

$$\begin{aligned}
U_0(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (1+\alpha) \ln(r) + \frac{1-\alpha}{2} + \gamma(1+\alpha) + \alpha \ln\left(\frac{k_1}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2}{2}\right) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\gamma(3+\alpha^2) - \frac{11+5\alpha^2}{4} + \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 3 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\gamma(5+\alpha^3) - \frac{22+5\alpha^2}{3} + \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 5 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{(1+\alpha)}{2} - \left(\frac{k_2 r}{4}\right)^2 \left[(3+\alpha^2) - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (5+\alpha^3) \right] + O(r^6), \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (\alpha-1) + \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\left(\gamma - \frac{3}{4}\right)(1-\alpha^2) - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\left(\gamma - \frac{17}{12}\right)(1-\alpha^3) - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[(1-\alpha^2) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (1-\alpha^3) \right] + O(r^6), \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ -2\alpha + \frac{1}{2} (rk_2)^2 \left[\gamma(1-2\alpha+3\alpha^2) - \frac{3-4\alpha+5\alpha^2}{4} - \right. \right. \\
& - \alpha(2-3\alpha) \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\gamma(1-3\alpha^2+5\alpha^3) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{17-45\alpha^2+73\alpha^3}{12} - \alpha^2(3-5\alpha) \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
& + r \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 \left[(1-2\alpha+3\alpha^2) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (1-3\alpha^2+5\alpha^3) \right] + O(r^5), \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{2} (rk_2)^2 \left[-\gamma(1+\alpha^2) + \frac{1+3\alpha^2}{4} - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) - \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(-\gamma(2+\alpha^3) + \frac{28+17\alpha^3}{12} - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) - 2 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
& -r \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 [(1+\alpha^2) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (2+\alpha^3)] + O(r^5), \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ 4(1-\alpha) + \frac{1}{2} (rk_2)^2 \left[(1-\alpha^2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\frac{11-12\gamma}{3} (1-\alpha^3) + 4\alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) - 4 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \quad (4.13) \\
& + \frac{k_2}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^3 (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) + O(r^5),
\end{aligned}$$

$\gamma=0.5772156649$ - Ейлерова стала.

Інтегрування ядер статичної задачі описане в багатьох роботах і труднощів не викликає, тому проблему дискретизації системи ГПР можна вважати вирішеною. Лишається з'ясувати границі застосування наближених представлень (4.9) – (4.13). З цією метою кожен з компонент ядер будемо спочатку обчислювати при різних значеннях аргументів безпосередньо за однією з формул (4.3) – (4.7), а потім – за відповідним наближеним представленням (4.9) – (4.13), утримуючи різну кількість членів степеневого ряду. Порівняння виконуємо в табличній формі (таблиці 4.1а-4.1д). Вказані в таблиці значення параметра N дорівнюють кількості утриманих в наближеному представленні членів степеневого ряду.

Таблица 4.1а

$k_2 r$	$\text{Re}U_0(r, \omega)$				$\text{Im}U_0(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	0.643	0.643	0.643	0.643	-1.592	-1.592	-1.592	-1.592
0.2	0.635	0.643	0.635	0.635	-0.636	-0.649	-0.636	-0.636
0.5	0.596	0.643	0.595	0.596	-0.222	-0.274	-0.221	-0.222
1.0	0.463	0.643	0.450	0.463	0.126	0.093	0.139	0.126
1.5	0.272	0.643	0.210	0.276	0.309	0.175	0.355	0.305

Таблица 4.1б

$k_2 r$	$\text{Re}U_2(r, \omega)$				$\text{Im}U_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$4.6 \cdot 10^{-5}$	0.	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$	-0.228	-0.227	-0.228	-0.228
0.2	$4.6 \cdot 10^{-3}$	0.	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	-0.234	-0.227	-0.234	-0.234
0.5	0.028	0.	0.029	0.028	-0.254	-0.227	-0.255	-0.254
1.0	0.105	0.	0.115	0.105	-0.277	-0.227	-0.287	-0.277
1.5	0.210	0.	0.258	0.207	-0.261	-0.227	-0.294	-0.258

Таблица 4.1в

$k_2 r$	$\text{Re}T_1(r, \omega)$				$\text{Im}T_1(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$3.4 \cdot 10^{-5}$	0.	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	-0.091	-0.091	-0.091	-0.091
0.2	$3.4 \cdot 10^{-3}$	0.	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	-0.096	-0.091	-0.096	-0.096
0.5	0.0205	0.	0.021	0.0205	-0.108	-0.091	-0.109	-0.108
1.0	0.0754	0.	0.084	0.0751	-0.118	-0.091	-0.216	-0.118
1.5	0.147	0.	0.189	0.143	-0.093	-0.091	-0.121	-0.090

Таблица 4.1г

$k_2 r$	$\text{Re}T_2(r, \omega)$				$\text{Im}T_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	0.	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	0.0911	0.0910	0.0911	0.0911
0.2	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	0.	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	0.0980	0.0910	0.098	0.0980
0.5	-0.0325	0.	-0.0338	-0.0325	0.114	0.0910	0.116	0.114
1.0	-0.115	0.	-0.135	-0.114	0.113	0.0910	0.130	0.112
1.5	-0.208	0.	-0.304	-0.198	0.048	0.0910	0.100	0.039

$k_2 r$	$\text{Re}T_2(r, \omega)$				$\text{Im}T_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	0.	0.	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	0.455	0.455	0.455	0.455
0.2	$-3.2 \cdot 10^{-5}$	0.	0.	$-3.3 \cdot 10^{-5}$	0.458	0.455	0.458	0.458
0.5	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	0.	0.	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	0.474	0.455	0.473	0.474
1.0	-0.019	0.	0.	-0.020	0.540	0.455	0.528	0.541
1.5	-0.089	0.	0.	-0.103	0.648	0.455	0.619	0.659

Порівнюючи дані, наведені в таблицях, бачимо, що більшості випадків при значеннях параметра $k_2 r \leq 1$ похибка обчислення компонент ядер за наближеними формулами (4.9)-(4.13) не перевищує 1%, якщо у виразах (4.9)-(4.13) утримуються три члени ($N=3$). Таким чином, проблему обчислення діагональних коефіцієнтів матриці алгебраїчного аналога системи (4.1), а разом з нею і всю проблему дискретизації задачі можна вважати вирішеною.

4.3. Аналіз двовимірного динамічного НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення

В даному параграфі розглядається прикладна задача про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву під трубопроводом. Масив зазнає ущільнення двома жорсткими плоскими поверхнями. Поверхні рухаються синхронно за напівсинусоїдальним законом із частотою $f=25$ Гц (рис. 4.3).

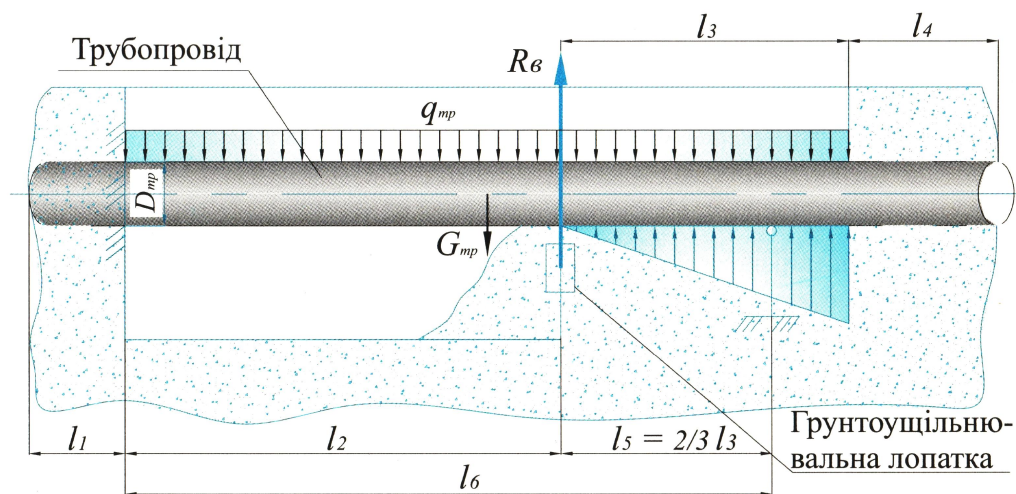


Рис. 4.2. Визначення граничної вертикальної сили

Стінки траншеї мають значно більший модуль пружності, ніж масив ґрунту під трубою, тому їх поверхні вважаються недеформівними. Згідно [107] при діаметрі трубопроводу $D_{mp}=1,22$ м висота ґрунтового масиву має становити $H=0,82$ м. Розміри траншеї наступні: $h=3,0$ м, $b_e=4,4$ м, $b_n=2,62$ м. Механічні властивості (параметри) насипного ґрунту такі: модуль пружності $E=20$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$; густина матеріалу $\rho=1760$ кг/м³.

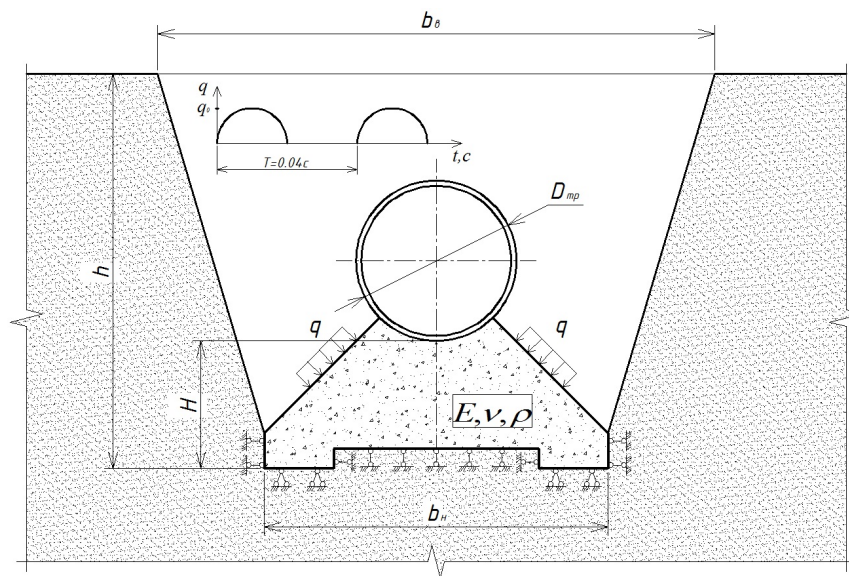


Рис. 4.3. . Розрахункова схема до задачі про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву під трубопроводом

Мета розрахунку полягає в перевірці в першу чергу знаків вертикальних переміщень точок верхньої викривленої ділянки контуру, оскільки з технологічних причин підйом труби в процесі ущільнення є неприпустимим [135]. Розрахунок проводиться в два етапи. Перший етап розрахунку полягає в аналізі усталених коливань пружного масиву під дією тиску на бокові поверхні, що має вигляд періодичних імпульсів. При цьому в межах кожного періоду тривалістю $T=0,04$ с. інтенсивність тиску змінюється за законом

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \sin(\omega t), & nT < t \leq nT + \frac{T}{2} \\ 0, & nT + \frac{T}{2} < t \leq (n+1)T \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

де $\omega = 2\pi f$, $q_0 = 0,2$ МПа.

На другому етапі обчислюються статичні переміщення і напруження від ваги труби, визначаються сумарні переміщення і напруження та робиться остаточний висновок щодо дотримання технологічних умов.

Напівсинусоїдальний періодичний імпульс можна з будь-якою точністю представити у вигляді суми гармонік:

$$q(t) = \frac{q_0}{\pi} \left[1 + \frac{\sin(\omega t)}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1} \right]. \quad (4.15)$$

Система ГР (4.1) після цього повинна бути багаторазово розв'язана при різних значеннях частоти коливань $k\omega$.

Слід зазначити, що на верхню криволінійну поверхню ґрунтового масиву передаються додаткові вертикальні навантаження, спричинені силами інерції, що виникають внаслідок нерівномірного вертикального руху труби. Якщо прийняти наближену модель про заміну приєднаної маси труби незв'язаними між собою точковими масами, то в кожній точці зони контакту

$$\tau_2^{\partial\partial\partial}(\vec{y}, t) = -m_{mp} \ddot{u}_2(\vec{y}, t),$$

де $m_{mp} = \frac{q_{mp}}{\Gamma_{on}}$; q_{mp} - погонна маса труби; Γ_{on} - довжина дуги кола, вздовж якої відбувається контакт труби та ґрунтової основи.

Оскільки розв'язок задачі шукається у вигляді суми стаціонарних гармонічних станів, то в кожному такому стані

$$\tau_2^{dod}(\vec{y}, t) = -m_{mp} \cdot \omega^2 u_2^*(\vec{y}, t).$$

Таким чином, між додатковими інерційними навантаженнями і переміщеннями точок границі існує лінійна залежність. Тоді ГІР (4.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_j^*(\vec{x}, \omega) - \int_{\Gamma/\Gamma_{on.}} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_{on.}} u_k^*(\vec{y}, \omega) \left[T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) - \right. \\ \left. - m\omega^2 U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) \right] d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Погонну масу труби знаходимо за формулою [4]:

$$q_{mp.} = \pi [t_{mp.} (D_{mp.} - t_{mp.}) \rho_{cm.} + t_{iz.} (D_{mp.} - t_{iz.}) \rho_{iz.}],$$

де $t_{mp.} = 0,012 \text{ м}$ - товщина стінки трубопроводу; $\rho_{cm.} = 7800 \text{ кг/м}^3$ - густина матеріалу труби; $t_{iz.} = 0,03 \text{ м}$ - товщина ізоляційного шару; $\rho_{iz.} = 1100 \text{ кг/м}^3$ - густина ізоляції.

З урахуванням наведених значень маємо $m_{mp.} = 480 \text{ кг/м}^2$. Крім того, демпфірування, зумовлене внутрішнім тертям в матеріалі, враховується за так званою комплексною гіпотезою [45], причому коефіцієнт непружного опору дорівнює 0,12.

На рис. 4.4 наведений графік залежності від часу вертикального переміщення в т. А на верхній викривленій ділянці контуру.

Найбільшого значення $u = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ переміщення в цій точці досягає в

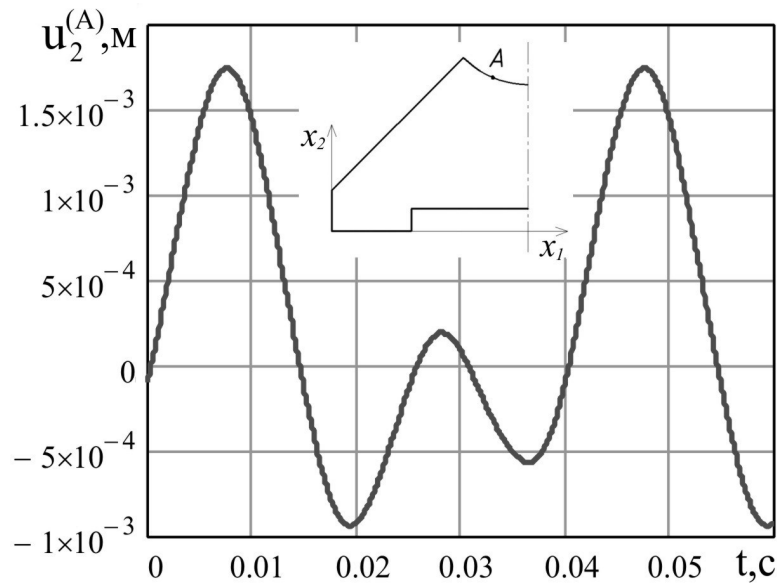


Рис. 4.4. Графік залежності від часу вертикального переміщення в т. A

момент часу $t = 0,0076$ с. В той же час другий етап розрахунку показав, що від дії власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу точка A переміщується вниз на величину $1,92 \cdot 10^{-3}$ м, що більше за значення, знайдене при динамічному розрахунку. Така сама картина спостерігається і в інших точках на верхній ділянці контуру. Отже, вимога щодо недопущення підйому труби задовольняється.

На рис. 4.5 показані графіки залежності від часу напружень σ_{11} в точках на осі симетрії перерізу масиву. Бачимо, що найбільші значення напруження σ_{11} в усіх точках на вертикалі під центром труби спостерігаються в момент часу $t = 0,031$ с, коли $\sigma_1 = 59,6$ кПа, $\sigma_2 = 86,3$ кПа, а $\sigma_3 = 107,7$ кПа. Зазначимо, що всі ці напруження є додатними, тобто відповідають розтягу.

З іншого боку, напруження в зазначених точках, спричинені дією власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу є від'ємними і більшими за модулем ніж при динамічному розрахунку $\sigma_1 = 117,8$ кПа, $\sigma_2 = 131,4$ кПа, $\sigma_3 = 122,5$ кПа. Таким чином, сумарні напруження σ_{11} в точках під трубою є стискаючими, тобто ґрунт зазнає ущільнення.

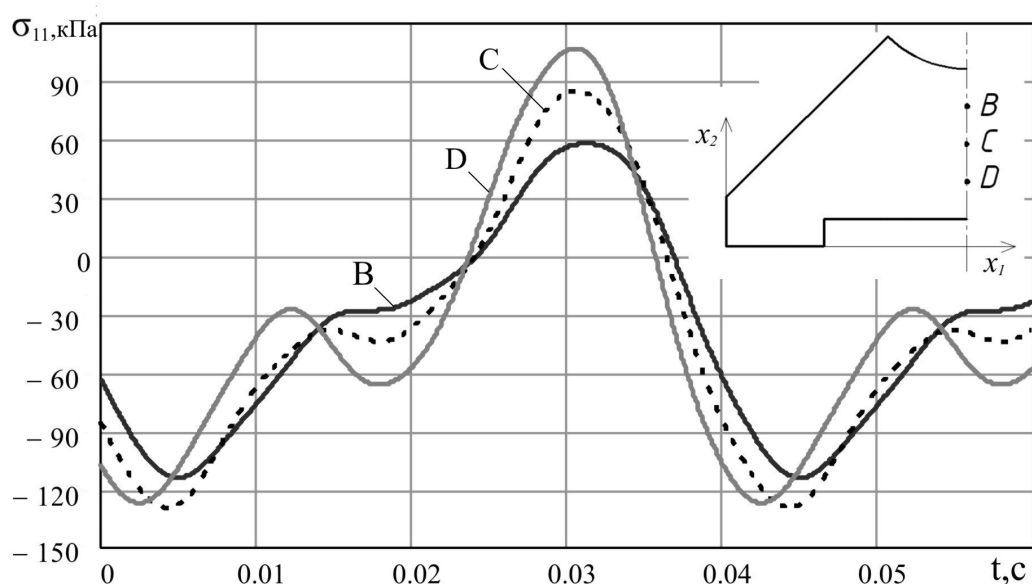


Рис. 4.5. Графіки залежності від часу напружень σ_{11}
в точках на осі симетрії перерізу масиву

Успішно проведене прикладне дослідження динамічного НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення дозволяє висновок про те, що розроблена і програмно реалізована гранично-елементна чисельна методика може бути ефективно застосована для аналізу динамічного двовимірного НДС пружних елементів конструкцій складної форми.

ВИСНОВКИ

1. На основі теоретичного апарату методу потенціалу розроблені, програмно реалізовані і застосовані для розв'язання тестових, модельних та прикладних задач нові ефективні методики дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах.

2. Основні результати проведених дисертаційних досліджень полягають у наступному:

- отримані розв'язувальні співвідношення та побудовано алгоритм дослідження з використанням методу ГЧІР нестационарних зсувних коливань масивів з отворами. На основі побудованого алгоритму розроблена і програмно реалізована методика чисельного аналізу параметрів динамічного НДС;

- розроблені і програмно реалізовані дві методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних динамічних полів переміщень і напружень в пружних середовищах. Одна методика використовує в якості алгоритмічної основи ГЧІР, а друга використовує перехід в частотну область. Встановлена однакова ефективність обох підходів;

- запропоновано та реалізовано новий чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання пружних масивних об'єктів, що знаходяться в плоскому деформованому стані;

- отримані нові розв'язки задачі про взаємний вплив двох близько розташованих циліндричних отворів, границя одного з яких зазнає дії імпульсного навантаження. Досліджено залежність результатів розрахунку від відстані між отворами.

3. Достовірність отриманих результатів і ефективність розроблених методик підтверджені шляхом розв'язання широкого кола контрольних прикладів

4. Проведено дослідження динамічного НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення двома плоскими поверхнями, що передають на границю масиву напівсинусоїдальні імпульси. Встановлено, що в результаті прикладеного динамічного навантаження технологічні умови функціонування трубопроводу не порушуються.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в проектно-конструкторських та наукових установах у різних галузях народного господарства для визначення динамічного НДС відповідальних деталей та елементів конструкцій при нестационарному динамічному навантаженні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж.Адамар. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. Адлуцкий В. Я. Исследование напряженно-деформированного состояния тел сложной формы методом граничных интегральных уравнений: автореф. дис. к. ф.-м. н. / В. Я. Адлуцкий — Днепропетровск, 1984.
3. Айталиев Ш.М. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел / Ш. М. Айталиев [и др.]. — Алма-Ата: Гылым, 1992. — 228 с.
4. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б. Граничные интегральные уравнения в динамических задачах теории упругости // Вестник АН Каз. ССР. - 1985. -№9. -С.46-51
5. Аксентян О.К. Определение частот собственных колебаний круглых плит / О.К Аксентян., Т.Н.Селезнева // Прикл. матем. и мех. – 1976. – Т. 40, Вып. 1. – С.75-86.
6. Александров В.М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В.М.Александров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
7. Александров В.М. Метод однородных решений в контактных задачах для тел конечных размеров / В.М.Александров // Изв. Сер.-Кавказ. научн. Центра висш. шк. Сер. ест. н. – 1974. – № 4. – С. 12-16.
8. Аналитические методы в теории дифракции и распространении волн / Под ред. С.В.Бутаковой – Москва, 1970. – 451 с.
9. Аргатов И.И. Медленные нестационарные движения штампа на поверхности упругого полупространства / И.И.Аргатов // Изв. РАН МТТ. – 2007. – № 5. – С.99-116.

10. Бабешко В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989. – 344 с.
11. Бабич В.М. Математические методы в теории упругих волн / В.М.Бабич, И.А.Молотков // МТТ ВИНТИ. - 1977. - № 10. – С. 5-62.
12. Баженов В.А. Визначення динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень в задачах змішаного руйнування на базі напіваналітичного метода скінченних елементів / Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І. // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.88, 2011.-с.3-11.
13. Баженов В.А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл / [Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.] – К., КНУБА, 2012. – 248 с.
14. Баженов В.А. Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл /В.А. Баженов, С.О. Пискунов, І.І. Солодей – Київ: Вид-во ”Каравела”, 2017. – 308с.
15. Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Киев: Випол, 1993, 376с.
16. Баженов В.А., Чисельні дослідження нелінійного деформування просторових тіл з урахуванням розвитку тріщин при статичних та динамічних навантаженнях / [Баженов В.А., Вабіщевич М.О. Пискунов С.О., Солодей І.І.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2020. – 200 с.
17. Баженов В. Г. Метод граничных элементов в трехмерной динамической теории упругости и вязкоупругости с сопряженными полями / В. Г. Баженов, Л.А. Игумнов. — Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. — 328 с
18. Батуров Б.А. Разностные схемы второго порядка точности для решения в перемещениях пространственной динамической задачи теории

- упругости со смешанными краевыми условиями// Вычислит. и прикладн. математика. -1974. -Вып. 30 -с. 105-117
19. Белов А.А. Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости / А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. Вып. 69. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. — 2007.
20. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А.В.Белоконь // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 23, № 1. – С. 56-59.
21. Белоконь О.А. Применение метода контурного интегрирования в задачах о распространении волн в анизотропной полуплоскости: автореф. дис. ... канд.а физ.-матем. наук: 01.02.04 / Белоконь Олег Александрович; Кубан. гос. ун-т. – Краснодар, 2001. – 20 с.
- 22.Белухина Г.И. Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями// Журнал вычислит. математики и теоретич. физики. - 1969. -Т.9 - №2.. - с. 362-372
23. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках. Пер. с англ. / П.Бенерджи, Р.Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. — 494 с.
- 24.Бойко К.Е., Чибиряков В.К. Вынужденные колебания толстых пластин// Изв. вузов. Строительство и архитектура - 1987. - № 6. - с. 38-42
25. Бормот Ю. Л. Численный анализ методом потенциала пространственного напряженного состояния элементов конструкций// Изв. АН СССР. МТТ. - 1977. - №4 - с. 203-208.
26. Бородачев Н.М. Вертикальные колебания круглого штампа на упругом полупространстве / Н.М.Бородачев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 5. – С. 33-35.
- 27.Бородачев Н.М. О построении общего решения динамической задачи теории упругости для полупространства// Изв. АН СССР, сер. геофиз. - 1959. - № 11. - с. 1684-1686.

28. Бреббия К.А. Применение метода граничных элементов в технике / К.А.Бреббия, С.Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
29. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
30. Буриев Т. , Расульмухамедов М.М. Комплекс программ решения трехмерных краевых задач динамической теории упругости // Алгоритмы. . – 1987. – № 62. – С. 4-14.
31. Бурчуладзе Т. В. Развитие метода потенциала в теории упругости / Т.В. Бурчуладзе, Т.Г. Гегелия. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 228 с.
32. Вайнберг Д.В., Синявский А.Л. Приближенный расчет оболочек с вырезами методами теории потенциала // Проблемы механики сплошных сред. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С.73-82.
33. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации / Л.А.Вайнштейн. – М.: «Советское радио», 1966. – 432 с.
34. Вайсфельд Н.Д. Нестационарные задачи дифракции упругих волн на дефектах в сферических слоистых средах / Н.Д.Вайсфельд // Мат-ли конф. „Мат. проблеми механіки неоднорідних структур”. – Львів, 2000. – С. 169-172.
35. Ватульян А.О. Граничные интегральные уравнения для эллиптических операторов / А.О. Ватульян // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. — 2000. — №3. — С. 34–37.
36. Ватульян А.О. Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости / А. О. Ватульян, В. М. Шамшин // ПММ. — 1998. — Т. 62, вып. 3. — С. 112–119.
37. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях I-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости / А. О. Ватульян // ДАН. — 1993. — Т. 333, №3. — С. 312–314.

38. Ватульян А.О. О новой формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях анизотропных тел / А.О. Ватульян, Е.В. Садчиков // Механика твердого тела. — 1999. — №2. — С. 78–84.
39. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н.П. Векуа. — М.: Наука, 1970. — 379 с.
40. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики / Ю.В.Верюжский – К.: Вища школа, 1978. – 183 с.
- 41.Верюжский Ю.В., Вусатюк А.И., Савицкий В.В. Метод потенциала в строительной механике// Тр. Тбил. ун-та. - 1985. Т. 257. - с. 189-234
- 42.Винник А.И. и др. Расчет трехосного напряженного состояния элементов конструкций по методу потенциала/ Винник А.И., Ворона Ю.В., Ройтфарб И.З., Литвиненко А.Е., Урванцев Ю.В.// Соппротивление материалов и теория сооружений. - 1981. - Вып. 38. - с. 77-82.
43. Виноградова М.Б. Теория волн / Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
44. Ворович И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И.Ворович, В.А.Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
45. Ворона Ю.В. Граничноелементна методика дослідження динамічного НДС пружних масивів / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С // Опір матеріалів і теорія споруд. –2014. – Вип.93. С. 27-36.
46. Ворона Ю.В. Двовимірний НДС пружного масиву з двома отворами при імпульсному навантаженні / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд. –2012 – Вип.90. С. 117-123.
47. Ворона Ю.В. Дослідження двовимірних нестационарних коливань пружних масивів з отворами / Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип.91. С. 133-146.
48. Ворона Ю.В. Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з тріщинами / Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А // Опір матеріалів і теорія споруд. –2012 – Вип.89. С. 158-164.

49. Ворона Ю.В. Коливання двовимірних масивних тіл, послаблених тріщинами нормального відриву / Ворона Ю.В., Гончаренко М.В., Черненко О.С., Козак А.А // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2011 – Вип.87 С. 131-143.
50. Ворона Ю.В. Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій / Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С. // Опір матеріалів і теорія споруд –2011 – Вип.88. С. 83-96.
51. Ворона Ю.В. Уточненный расчет параметров напряженного состояния в пространственных задачах местной прочности // Соппротивление материалов и теория сооружений. - 1987. - Вып. 50. - С.47-50.
52. Ворона Ю.В., и др. Численный метод исследования частот и форм колебаний массивов/ Ворона Ю.В., Кременец Е.И., РойтФарб И.З. // Соппротивление материалов и теория сооружений. - 1983. - Вып. 42. - с. 56-59
- Г. М. Иванченко // Прикл. мех. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 86–93.
53. Галанов Б.О. Про розв'язність нелінійних інтегральних рівнянь односторонніх контактних задач теорії пружності // Математичні моделі і обчислювальний експеримент в матеріалознавстві. – 1997. – Київ: ІПМ ім.І.М.Францевича НАН України. – 29 с.
54. Галанов Б.О., Лукович В.В. Про один метод регуляризації інтегрального рівняння першого роду з гіперсингулярним ядром // Математичні моделі і обчислювальний експеримент в матеріалознавстві. – 2001. – №05. – Київ: ІПМ ім.І.М.Францевича НАН України. – 47 с.
55. Головин О.А. О стационарных осесимметричных колебаниях упругого цилиндра конечной длины / О.А.Головин, В.К.Прокопов // Прикл. мех. – 1974. – Т. 10, №7. – С.28-35.
56. Гомилко А.И. О методах однородных решений и суперпозиции в статических граничных задачах для упругой полуполосы / А.И.Гомилко,

- В.Т.Гринченко, В.В.Мелешко // Прикл. мех. – 1986. –Т. 22, № 8. – С. 84-93.
- 57.Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. расчет конструкций на упругом основании. - М.: Стройиздат. 1984. - 679с.
- 58.Горский Н.М., Коновалов А.Н. О разностных методах решения динамических задач теории упругости// Тр. 3-й Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. - Новосибирск. - 1974. - Ч. 1. - с. 68-84
- 59.Горский Н.М., Коновалов А.Н. Об одном варианте постановки динамической задачи теории упругости// Численные методы механики сплошной среды. - 1980. - Т.11. - №5. - с. 37-44
60. Горшков А.Г. Динамические контактные задачи с подвижными границами / А.Г.Горшков, Д.В.Тарлаковский. – М.: Наука, 1995. – 352 с. Госстройиздат -1956 - с. 84-96
61. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т.Гринченко, В.В.Мелешко. – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
62. Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости. Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы / В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко. – К.: Наукова думка, 1985. – 280 с.
63. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т.Гринченко. – К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
64. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
65. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н.Гузь, В.Т.Головчан. – К.: Наукова думка, 1972. – 253 с.
- 66.Гузь А.Н. Контактное взаимодействие берегов эллиптической трещины под воздействием нормальной гармонической нагрузки/ Гузь А.Н., Зозуля В.В., Меньшиков А.В. // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина. М.:Физматлит. - 2006. - С.204-220.

67. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Неклассические проблемы механики разрушения. Том 4. Книга 2 «Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках»- Киев: Наукова думка, 1993.- 237с.
68. Гузь О.М. Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей / О.М.Гузь // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 4. – С. 325-355.
69. Гуляев В. И. Дифракция разрывных волн на эллипсоидальных поверхностях раздела трансверсально-изотропных упругих сред / В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Г. М. Иванченко // Прикл. мех. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 98–106.
70. Гуляев В. И. Критические состояния взаимодействия разрывных волн с поверхностями раздела упругих сред / В. И. Гуляев, Г. М. Иванченко // Прикл. механика. – 2009, – Т. 45 (55), № 2. – С. 79–90.
71. Гуляев В. И. Фокусировка и рассеивание нестационарной волны свободной поверхностью анизотропной упругой среды / В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Г. М. Иванченко // Прикл. мех. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 86–93.
72. Гуляр О.І., Узагальнена матриця мас напіваналітичного методу скінченних елементів в задачах динаміки просторових конструкцій / О.І. Гуляр, І.І. Солодей, М.О. Вабіщевич, А.Ю. Приходько, Б.І. Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. Збірник / Відп. Ред.. В.А. Баженов. – К., КНУБА, Вип.86. –2010. –С.47-55.
73. Еругин Н.П. О функционально-инвариантных решениях / Н.П.Еругин // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук. – 1948. – Вып. 15. – С.
74. Ехлоков А.В. Рассеяние упругих волн пространственными интерфейсными трещинами / А.В.Ехлоков. – Краснодар.: Кубанский гос. у-т, 2001. – 31с.
75. Жигаловский И.В. Вынужденные колебания упругого пространственного слоя / И.В.Жигаловский // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1971. – № 4. – С.31-37.

76. Забылин М.И. Вопросы динамического расчета оснований и фундаментов под машины // Изв. вузов. Строительство и архитектура - 1980. - № 7. - с. 22-38.
77. Закорко В.Н., Ростовцев Н.А. К динамической задаче стационарных колебаний упругого полупространства / В.Н.Закорко, Н.А.Ростовцев // Прикл. матем. и мех. – 1965. – Т. 29. № 3. – С. 545-552.
78. Ильичев В.А. К решению нестационарной контактной задачи о квадратном штампе, лежащем на инерционном полупространстве // Исследования по теории сооружений - 1968. - Вып. 17 - с. 223-235
79. Исаханов Г.В., Чибиряков В.К. Исследование напряженно-деформированного состояния и динамического поведения толстых пластин. Сообщение 1. Методика построения разрешающих уравнений // Проблемы прочности. – 1987. – № 2. – С. 89 – 95.
80. Иванченко Г. М. Перетворення фронтів розривних хвиль в трансверсально-ізотропних середовищах зі змінними параметрами пружності / Г. М. Иванченко, Ю. О. Заєць // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – № 83. – С. 119–125.
81. Иванченко Г. М. Трансформація фронтів розривних хвиль в пружних середовищах змінної щільності / Г. М. Иванченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – № 85. – С. 132–142.
82. Иванченко Г. М. Трансформація фронтів розривних хвиль в пружних середовищах змінної щільності / Г. М. Иванченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – № 85. – С. 132–142.
83. Иванченко Г. М. Фокусування променів неплоскої плоскої розривної хвилі вільною поверхнею пружного анізотропного середовища / Г. М. Иванченко // Акуст. вісник. – 2003. – Т. 6, № 2. – С. 43–49
84. Иванченко Г.М. Чисельне дослідження поширення хвиль у пружних середовищах Иванченко Г.М., Ворона Ю.В. // Київ: вид-во "Каравела", 2019. – 150с.

85. Канторович Л. В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.: Физматгиз, 1962. - 708 с.
86. Клаф Р.В., Пензиен Дж. Динамика сооружений. - М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.
87. Копейкин Ю.Д. Прямое решение двух- и трехмерных задач теории упругости и пластичности при помощи сингулярных интегральных уравнений метода потенциала / Ю.Д. Копейкин // Численные методы механики сплошных сред: сб. ст. — Новосибирск. — 1974. —Т. 5, №2. — С. 46–56.
88. Коренев Б.Г. К вопросу о применении способа компенсирующих нагрузок / Б. Г. Коренев // ПММ. — 1942. — Т. 6. — С. 91–94.
89. Крауфорд Ф. Волны. / Ф.Крауфорд; [Перевод с англ. под ред. А.И.Шальникова и А.О.Вайсенберга]. - [2-е изд., исправл.]. - М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. - 528 с.
90. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
91. Кубенко В.Д. Распространение упругих волн от сферической полости в неоднородной анизотропной среде// Труды 1 респ. конф. молодых математиков Украины. - Киев, 1965. - с. 378-389
92. Кузмінець М.П., Мусійко В.Д. Гранично допустимі навантаження на трубопровід та ґрунтове середовище під час капітального ремонту нафто-газових магістралей //ВІСНИК НТУ №14 – К.:2007. –С.198-201.
93. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неоднородных задач динамики твердого деформируемого тела// Проблемы динамики упруго-пластических сред. - М.: Мир, 1975. - с. 39-84.
94. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. - М.Л.: Гостехтеориздат, 1950. - 280 с.

95. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. - М.: Наука, 1976. - 664с.
96. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Ф-М. 1963. - 280 с.
97. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн М.: Янус 1995. 520 с
98. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И.Лурье. – М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1955. – 491 с.
99. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 470с.
100. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений / В.П.Маслов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. – 312 с.
101. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / Под ред. Т.Круза и Ф.Риццо. – М.: Мир, 1978. – 210 с.
102. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г.Михлин. – М.: Физматлит, 1962. – 254 с.
103. Михлин С.Г. Интегральные уравнения в теории упругости / С.Г. Михлин, Н. Ф. Морозов, Н.В. Паукшто. — СПб., 1994. — 272 с.
104. Моисеенко В.А., Мысовский Ю.В., Юргелевич В.В. Вынужденные колебания толстой круглой плиты под действием поперечной нагрузки / В.А.Моисеенко, Ю.В.Мысовский, В.В.Юргелевич // Теор. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 13. – С. 116-120.
105. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – М: ИЛ, 1958. – 901 с.
106. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

107. Напружено-деформований стан будівельних матеріалів в технологічних процесах виробництв /Сівко В.Й., Поляченко В.А. Кузьмінець М.П., Сівко Є.В., Науменко Ю.В. – К. НТУ, 2010. – 352 с.
108. Немиш Ю.Н. Трехмерные граничные задачи теории упругости для неканонических областей / Ю.Н.Немиш // Прикл. мех. – 1980. – Т. 16, № 2. – С. 3-39.
109. Низомов Д. Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М.: АСВ, 2000. 282 с
110. Новацкий В. Теория упругости / В.Новацкий. – М.: МИР, 1975. – 872 с.
111. О вычислении параметров линейной механики разрушения в задачах динамики на основе полуаналитического метода конечных элементов / М.О. Вабищевич, И.И.□Солодей, Е.А. Чепурная // Міжнародний науковий журнал «Прикладна механіка» - 2018.Вип. 54, №6. - С. 48 - 56.
112. О полуаналитическом методе конечных элементов в динамических задачах линейной механики разрушения / В.А.Баженов, М.О. Вабищевич, И.И.□Солодей, Е.А. Чепурная // Міжнародний науковий журнал «Прикладна механіка» - 2018.Вип. 54, №5. - С. 35 - 46.
113. Островерх Б.Н. Разностная схема решения задачи о неустановившихся колебаниях массивных гидросооружений / Б.Н.Островерх // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1975. – Вып. 25. – С. 81-91.
114. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболаидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред / [Гуляев В. И., Луговой П. З., Крицкий В. Б., Иванченко Г. М.] // Геофизический журнал. – 2005. – Т. 27, № 3. – С. 418–427.

115. Панасюк Н.Н. Действие плоской ступенчатой волны на сферическую полость // Волны в сплошных средах / Н.Н.Панасюк. – К., 1978. – С.
116. Партон В.З. Интегральные уравнения теории упругости / В.З.Партон, П.И.Перлин. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
117. Перлин П.И. Применение регулярных представлений сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости// Прикл. матем. и механ. - 1976. - Т.40. - №2. - С. 366-371
118. Петрашень Г.И. Элементы динамической теории распространения сейсмических волн / Г.И.Петрашень // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – 1959. – № 3. – С. 11-106.
119. Петрищев О.М. Об одном способе решения задачи Лэмба / О.М.Петрищев, А.Н.Михеева // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 199-201. Пирс Дж. Почти все о волнах / Дж. Пирс. – М.: Мир, 1976. – 176 с.
120. Плотников Ю. Г. , Атаджанов Д. Р. Решение динамической задачи для полуплоскости при подвипой нагрузке// Экспресс информ.ВНИИИС. Сер. “Инженерно-теорет. основы строительства” – 1986. №6. –С.7-11.
121. Потапов С. Е , Чибиряков В. К- Алгоритм численно-аналитического исследования переходных процессов в массивных телах// Сопротивление материалов и теория сооружений.
122. Прочность и контактная деформативность железобетонных конструкций / Г. Б. Ковнеристов [и др.]. — Киев: Будивельник, 1991.
123. Пятигорская Е. И., Ройтфарб И. З. Определение частот и форм свободных колебаний массивных тел на основе метода потенциала // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1978. - Вып. 32. - С. 50-53.

124. Пятигорская Е. И., Ройтфарб И. З. Численная реализация метода в задачах о свободных колебаниях массивных тел // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1979. - Вып. 34. - С. 17-21.
125. Ройтфарб И.З., Ворона Ю.В. Динамическая концентрация напряжений в массивах, ослабленных полостями // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1989. - Вып.54. - с.107-110.
126. Ройтфарб И.З., Кыонг Чу Вьет. Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1976. - Вып.29. - с. 65-69
127. Сабодаш П.Ф. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений / П.Ф.Сабодаш, И.Г.Филиппов // Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971. – С.317-321.
128. Сейсмов В.М. Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений / Сейсмов В.М., Островерх Б.Н., Ермоленко А.И. – К.: Наукова думка, 1983. – 318 с.
129. Сейсмов В.М. Динамические контактные задачи / В.М.Сейсмов. – К.: Наукова думка, 1976. – 238 с.
130. Селезнева Т.Н. Вынужденные установившиеся колебания толстых плит / Т.Н.Селезнева // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. – 1985. – № 4. – С. 42-45.
131. Сахаров А.С. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокый, В.В. Киричевский. – К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
132. Соломонян А.Я. Волны напряжений в сплошных средах / А.Я.Соломонян. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 415 с.
133. Сретенский Л.Н. Упругие волны, возникающие от нормальных напряжений, приложенных к поверхности полупространства /

- Л.Н.Сретенский // Проблемы механики сплошной среды. АН СССР. – 1961. – С.31-37.
134. Терентьев М.В. История эфира / М.В.Терентьев. – М.: ФАЗИС, 1999. – 172 с.
135. Технологія капітального ремонту магістральних нафтопроводів діаметром 530-1220мм із заміною ізоляції без підняття трубопроводу з використанням комплексу машин підвищеної продуктивності. ВБН В.3.1-320.20077720.01-2001. – К.:НАК’’Нафтогаз України’’,2001. – 189с.
136. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянский. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986. – 295 с.
137. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества / Э.Уиттекер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 512 с.
138. Хуторянский Н.М. Граничные интегральные и интегродифференциальные уравнения второго рода для основной смешанной задачи теории упругости// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. - 1981. - Вып. 18. - с. 3-13
139. Хуторянский Н.М. Граничные свойства производных потенциалов теории упругости для анизотропного тела и формулы регулярного представления их граничных значений// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. - 1985. - Вып.30. - с.26-36
140. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
141. Aggarwall H.R. Solutions to a class of three dimensional pulse propagation problems in an elastic half-space / H.R.Aggarwall, C.M.Ablow // Inter. Journ. Eng. Science. – 1967. – V. 5. – P. 78-87.

142. Altiero N. J. An effective boundary-integral approach for the mixed boundary value problems of linear elastostatics / N. J. Altiero, S. D. Gavazza // *Appl. Math. Modell.* — 1979. — V. 3, №2. — P. 99–104.
143. Altiero N. J. On a unified boundary-integral equation method / N. J. Altiero, S. D. Gavazza // *J. Elast.* — 1980. — V. 10, №1. — P. 2–8.
144. Brebbia C.A., Dominguez J. *Boundary Elements: An Introductory Course, Second Edition* / C.A.Brebbia, J.Dominguez. — Boston, Southampton: WIT PRESS. Computational Mechanics Publications, 1992. — 319 p.
145. Chao C.C. Dynamic response of an elastic half-space to tangential surface loading / C.C.Chao // *Journ. Appl. Mech.* — 1960. — V. 27. — P. 174-181.
146. Cheng A.H.-D. Heritage and early history of the boundary element method / A.H.-D. Cheng, D. T. Cheng // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* — 2005. — V. 29. — P. 268–302.
147. Gulyayev V. I. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media / V. I. Gulyayev, G. M. Ivanchenko // *International Journal of Solids and Structures.* — 2006. — № 43. — P. 74–90.
148. Keller J.B. The geometrical theory of diffraction / J.B.Keller // *Journal of the Optical Society of America.* — 1962. — V. 2, № 52. — P. 116-130.
149. Lamé G. *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* / Gabriel Lamé. — Paris: Mallet-Bachelier, 1859. — 1-36 p.
150. Langer R.E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel Functions of large order / R.E.Langer // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1931. — V. 33, №1. — P. 23-64.
151. Lee G.-S. Transient elastic waves propagating in a multy-layered medium subjected to in-plane dynamic loadings. I. Theory / Lee G.-S., Ma C.-C. // *Proc. Roy. Soc.* — 2000. — V.456., № 1998. — P. 1355-1374.

152. Lamb H. On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid / H.Lamb // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. –1904. – V.203. – P. 1-42.
153. Ludwig D. Uniform asymptotic expansion / D.Ludwig // Comm. Pure Appl. Math. – 1966. – V.19, № 2. – P. 215-250.
154. Mace B.R. Modeling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis / B.R.Mace, E Manconi. // J. Sound and Vibr. – 2008. – V. 318, №4-5. – P. 884-902.
155. Marzani A. A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides / A.Marzani, E.Viola, I.Bartoli, F.Lanza di Scalea, P.Rizzo // J. Sound and Vibr. – 2008. – V. 318, № 3. – P.488-505.
156. Perekis C.L. Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse / C.L.Perekis, H.Lifson // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1957. – V. 29. – P.1233-1238.
157. Rumarz C.A. Differential-difference method for solving dynamics value problems of elasticity for circularity symmetric bodies / C.A.Rumarz // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech. – 1967. – V. 15, № 9. – P.
158. Sharp J.A. The production of elastic waves by explosion pressures. I. Theory and empirical field observations / J.A.Sharp // Geophysics. – 1942. – V. 7, № 2. – P. 144-154.
159. Song Tian-shu. Рассеяние SH-волны и концентрация динамических напряжений в пьезоэлектрической среде с круговым отверстием / Tian-shu Song, Dian-Kui Lin, Xin-Hua Yu. // J. Harbin Eng. Univ. – 2002. – V. 23, № 1. – P. 120-123.
160. Swedlow J. L. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow / J. L. Swedlow, T. A. Cruse // Int. J. Solids Struct. — 1971. — 1673–1683.
161. Wang Jian-Hua, Lu Jian-Fei, Zhou Xiang-Lian. Complex variable function method for the scattering of plane waves by an arbitrary hole in a

- porous medium / Jian-Hua Wang, Jian-Fei Lu, Xiang-Lian Zhou // *European Journal of Mechanics*. – 2009. – V. 28, № 3. – P. 582-590.
162. Watson J.O. Boundary elements from 1960 to present day / J. O. Watson // *Electronic Journal of Boundary Elements*. — 2003. — V. 1, №1. — P. 34–46.
163. Zieliński A.P., Herrera I. Trefftz method: fitting boundary conditions // *International Journal for Numerical Methods in Engineering* — 1987. — V. 24, № 5. — P. 871-891.