

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Кара Ірина Дмитрівна

УДК 529.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

Чисельна реалізація методу граничних інтегральних рівнянь для аналізу  
хвильових процесів у насичених рідиною пористих середовищах

05.23.17 – будівельна механіка

192 – Будівництво та цивільна інженерія

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і  
текстів інших авторів мають містити посилання на відповідне джерело

---

(підпис, прізвище та ініціали здобувача)

Науковий керівник: Ворона Юрій Володимирович,  
кандидат технічних наук, доцент

Київ – 2021

## АНОТАЦІЯ

*Кара І.Д.* Чисельна реалізація методу граничних інтегральних рівнянь для аналізу хвильових процесів у насичених рідиною пористих середовищах.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України, Київ, 2021 р.

### **Зміст анотації**

Пористі матеріали є досить розповсюдженими в природі, а тому знаходять широке застосування в будівництві. Проектування підземних споруд, розробка нафтових родовищ та підземних резервуарів, дослідження повністю або частково заповнених ґрунтових конструкцій: дамб, набережних вимагають знань явищ і процесів, які відбуваються в насичених рідиною або газом пористих середовищах при розповсюдженні пружних хвиль. Обчислити аналітично параметри НДС тіл, виготовлених з пористих матеріалів, є досить складно, особливо при дії динамічного навантаження. У випадках, коли об'єкт розрахунку займає нескінченну область, помітними стають переваги чисельних методів, побудованих на основі методу потенціалу, а саме МГЕ та МГІР. Не зважаючи на наявність в наукових джерелах варіантів систем ГІР, сьогодні присутні лише поодинокі інтегральні представлення розв'язків задач в гранично-елементній постановці.

У першому розділі проведений аналіз літературних джерел з питань сучасного стану проблематики роботи та наведені особливості розрахунку характеристик пружно-пористих насичених рідиною середовищ. Були розглянуті праці М.А.Біо, який є основоположником класичної теорії для розв'язання задач моделювання багатокomпонентних насичених рідиною чи газом пористих середовищ. Серед науковців, які розглядали питання розповсюдження хвиль в пористих тілах, базуючись на даній теорії, варто

відзначити таких: В.Є.Донцов, Х.Х.Імомназаров, Ал.А.Ковтун, А.А.Ляпін, Е.А.Марфин, Л.Б.Маслов, В.Є.Накоряков, М.Н.Овчинников, К.Е.Сорокін, С.Т.Туйчисьва, Я.І.Френкель, І.А.Аббас, А.Н.Абд-алла, J.Geertsma, M.D.Sharma, D.C.Smit.

Великий вклад у розвиток МГЕ та МГІР внесли вітчизняні та закордонні науковці: Д.В.Вайнберг, Ю.В.Верюжський, Ч.В.Кионг, Г.Б.Ковнеристов, В.Д.Купрадзе, С.Г.Михлин, І.З.Ройтфарб, О.Л.Синявський, Ч.Д.Тінь, А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянський, Р.К.Banerjee, С.А.Brebbia, R.Buterfield, S.L.Crouch, Т.А.Cruse, D.Nardini, F.I.Rizzo, А.М.Starfield та ін. Застосуванню МГЕ та МГІР до вивчення проблем поропружності присвячені праці таких вчених як А.В.Аменицкий, В.Г.Баженов, А.А.Белов, Л.А.Ігумнов, І.С.Карелін, С.Ю.Литвинчук, В.Albers, I.Ashayeri, Т.Badmus, D.E.Beskos, G.Bonnet, А.Н.-D.Cheng, J.Dominguez, P.Li, K.V.Nguyen, M.Schanz, M.J.Sharahi.

Аналіз літературних джерел показує, що значна кількість результатів присвячені питанням поропружності в двовимірній постановці. Більшість робіт були присвячені тілам простої геометричної форми, в той час як практично відсутні дослідження коливань елементів будівельних споруд.

В другому розділі в загальному виді наведена постановка задачі динамічної поропружності; представлені вихідні співвідношення теорії поропружності, ГІР, матриця фундаментальних розв'язків та виведені співвідношення узагальненої похідної фундаментальних розв'язків для тривимірної гармонічної поропружності.

В третьому розділі розробляються алгоритми розрахунку переміщень і напружень пористих елементів конструкцій під дію динамічного навантаження та проведена перевірка правильності і достовірності отриманої методики шляхом розв'язання тестових задач; виведені, використовуючи розвиток в ряд Маклорена, співвідношення для визначення сингулярних частин інтегралів по кругу, які входять до складу фундаментальних розв'язків та їх узагальненої похідної.

В четвертому розділі проведено апробацію можливостей розробленого алгоритму на прикладі задачі про зміну напружено-деформованого стану стінок підземного нафтового резервуару в результаті вибуху в сусідньому сховищі.

При виконанні дисертаційної роботи на основі МГПР був розроблений та програмно реалізований алгоритм для аналізу коливань та напружено-деформованого стану пористих насичених рідиною середовищ з урахуванням дії змінного в часі динамічного навантаження. Були отримані компактні вирази для визначення узагальненої похідної фундаментальних розв'язків для випадку тривимірних коливань та обчислення сингулярних частин інтегралів, які є складовими ГПР.

**Ключові слова:** пористе середовище, динамічне навантаження, коливання, метод граничних інтегральних рівнянь, напружено-деформований стан, фундаментальні розв'язки, узагальнена похідна, сингулярність, розвиток в степеневий ряд.

#### **Список публікацій здобувача:**

*а) статті, що включені до наукових періодичних видань інших держав, та у наукових фахових виданнях України, що включені до міжнародних наукометричних баз:*

1. Ворона Ю.В. Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання динамічних задач термопружності / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 96. – С. 74-87.
2. Kara I.D. Numerical solution of the problem of porous solids vibration // Strength of Materials and Theory of Structures. – К.: KNUBA, 2017. – № 99. – P. 193 – 202.
3. Ворона Ю.В. Граничноелементна методика дослідження коливань пружних масивів з урахуванням випадкового характеру констант матеріалу / Ворона Ю.В., Кара І.Д., Щербій В.І. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 59-70.

4. Ворона Ю.В. Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.

5. Kara I.D. Peculiarities of wave propagation processes in poroelastic media // Strength of Materials and Theory of Structures. – К.: KNUBA, 2020. – Issue 105. – P. 247-254.

*б) статті в наукових фахових виданнях України:*

6. Ворона Ю.В. Розповсюдження циліндричних хвиль у поропружному середовищі / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 93. – С. 146-152.

*в) публікації по доповідям на міжнародних та вітчизняних конференціях:*

7. Кара І.Д. Методика дослідження коливань поропружних об'єктів за методом граничних інтегральних рівнянь / І.Д. Кара // Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: II Міжнародна науково-практична конференція, 26-27 вересня 2018 р.: програма та тези доповідей – К.: 2018. – С. 54-56.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	... 4
ВСТУП	... 5
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ПІДХОДІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ	... 11
1.1. Основні методи і підходи до розв'язання задач поропружності	... 11
1.2. Застосування методу граничних елементів до розрахунку напружено-деформованого стану поропружних конструкцій	... 19
1.3. Особливості пружних характеристик пористих матеріалів	... 27
1.4. Висновки за розділом	... 30
РОЗДІЛ 2. ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЧНОЇ ПОРОПРУЖНОСТІ	... 32
2.1. Постановка задачі	... 32
2.2. Вихідні співвідношення теорії поропружності	... 35
2.3. Хвильові рівняння термопружності	... 38
2.4. Фундаментальний розв'язок та граничні інтегральні рівняння термопружності	... 45
2.5. Рівняння рівноваги для динамічної гармонічної поропружності	... 52
2.6. Фундаментальні розв'язки для гармонічної поропружності	... 54
2.7. Висновки за розділом	... 61
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ПІДХОДУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	... 62

3.1. Порівняння значень параметрів напружено-деформованого стану точок границі кругового отвору в пружному та поропружному середовищах при розповсюдженні циліндричних хвиль	... 62
3.2. Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності рівнянь рівноваги теорії термопружності	... 70
3.3. Визначення значень параметрів напружено-деформованого стану точок сферичної порожнини в термопружному середовищі при розповсюдженні гармонічних хвиль	... 81
3.4. Чисельне визначення параметрів значень напружено-деформованого стану поропружного масиву при гармонічних коливаннях	... 91
3.5. Висновки за розділом	...98
РОЗДІЛ 4. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОЧОК СТІНОК ПІДЗЕМНИХ РЕЗЕРВУАРІВ ПРИ ДІЇ ВИБУХУ	...100
4.1. Загальні особливості будівництва та експлуатації підземних сховищ	...100
4.2. Розрахунок стінок підземних резервуарів на дію вибуху в одному із сховищ	...103
4.3. Висновки за розділом	...109
ВИСНОВКИ	...111
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	...113
ДОДАТОК	...134

## **ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ**

МГЕ – Метод граничних елементів

МГІР – Метод граничних інтегральних рівнянь

ГІР – Граничні інтегральні рівняння

НДС – Напружено-деформований стан



## ВСТУП

**Актуальність теми.** Пористі матеріали є досить розповсюдженими в природі, а тому знаходять широке використання в будівництві. Це насичені рідиною або газом ґрунти та гірські породи, пористі будівельні матеріали: цегла, пісок, пінобетон, газобетон, теплоізоляційні та звукоізоляційні матеріали. Останнім часом виникає необхідність розв'язувати на основі теорії пористих середовищ різні задачі, зокрема, досліджувати деформації та стабільність повністю або частково заповнених ґрунтових конструкцій (дамб, набережних, залізничних дамб) чи проблеми, що пов'язані з влаштуванням фундаментів та будівель.

Проектування підземних споруд, зокрема, резервуарів, розробка нафтових родовищ динамічними методами також вимагають знань явищ і процесів, які відбуваються в пористих середовищах, насичених рідиною або газом, при розповсюдженні пружних хвиль. Дослідження хвильових процесів в пружних пористих середовищах тісно пов'язані з сучасними задачами сейсмології, сейсмозвідки та проектування підземних споруд. Спеціалісти по геодинаміці, біодинаміці, інженери-будівельники зацікавлені у вивченні та розвитку механіки пористих матеріалів. Застосовуючи пористі матеріали, можна не лише зменшити масу та матеріалоемність конструкції, але навіть збільшити їх міцність і надійність.

Дослідженню поропружних середовищ на сьогодні присвячена значна кількість праць. Це зумовлено тим, що велика кількість природних і штучних середовищ містить в своїй структурі пори, присутність заповнювача в яких вносить поправки в поведінку матеріалів. При дослідженні процесів розповсюдження хвиль в насичених матеріалах використання законів теорії пружності та в'язкопружного опису є грубим наближенням. Модель поропружного середовища є складнішою за відповідну однорідну пружну чи в'язкопружну моделі. Це викликано тим, що рідина, яка заповнює пори, може

перетікати з однієї області відкритих пор до іншої. При поширенні пружних коливань в таких тілах, окрім поздовжньої та поперечної хвиль, виникають також деякі більш складні типи хвиль, що пояснюється різницею в поведінці та характеристиках твердої і рідкої фаз. В задачах про розповсюдження хвиль дуже важливо враховувати ці особливості. Саме тому для врахування пористості необхідна відповідна теорія.

Динамічна поведінка рідкого заповнювача в залежності від значення частоти коливань досить сильно впливає на НДС всього тіла. Не зважаючи на введення деяких спрощень, таких як: відсутність температурних переходів та фазових ефектів, побудова універсальної загальноприйнятої моделі для розрахунку конструкцій з пористих насичених рідиною матеріалів є досить складною задачею будівельної механіки, яка на сьогодні є невирішеною.

Обчислити аналітично параметри НДС тіл загальної форми, виготовлених з пористих матеріалів, досить складно, особливо при дії динамічного навантаження. У випадках, коли об'єкт розрахунку займає нескінченну область, помітними стають переваги чисельних методів, побудованих на основі методу потенціалу. Одним із його різновидів є МГІР, який дозволяє окремо розглянути залежності між граничними переміщеннями і напруженнями та співвідношення, які визначають дані параметри всередині розрахункової області. Застосування цих методів до розв'язання динамічних задач поропружності почалося ще наприкінці минулого століття. При цьому в сучасних наукових джерелах присутні лише поодинокі гранично-елементні розв'язки відповідних задач. Тому дослідження процесів поширення хвиль та аналіз динамічного НДС пористих насичених рідиною тіл з використанням МГІР є актуальною задачею сучасної будівельної механіки, яка чекає на своє вирішення.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи полягає у розробці на основі методу граничних інтегральних рівнянь ефективної методики для дослідження процесів поширення пружних хвиль в пористих насичених рідиною

середовищах під дією змінного в часі динамічного навантаження та застосування цієї методики для розв'язання прикладних задач.

**Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:**

- побудова на основі МГІР системи розрахункових співвідношень для ефективного розв'язання просторових динамічних задач про поширення хвиль в поропружних середовищах, які насичені рідиною, під дією змінних у часі динамічних навантажень;
- розробка алгоритму дослідження динамічних полів переміщень і напружень та аналізу коливань в навантажених насичених пористих тілах;
- підтвердження ефективності розробленої методики шляхом порівняння результатів з аналітичними розв'язками;
- створення програмних засобів, що реалізують отримані алгоритми та орієнтовані на використання персональними комп'ютерами;

**Об'єктом дослідження** є процеси розповсюдження пружних хвиль у будівельних спорудах, вироблених з пористих насичених рідиною матеріалів.

**Предметом дослідження** є змінні у часі компоненти векторів переміщень та тензорів напружень при дії динамічного навантаження.

**Методи дослідження.** В даній роботі для розв'язання задач використовується МГІР, реалізований за допомогою нових розрахункових співвідношень, які дозволяють ефективно досліджувати динамічний НДС тривимірних пористих тіл. Застосування методу базується на розбитті поверхні тіла на граничні елементи заданої геометрії, причому вважається, що функції шуканих параметрів НДС змінюються в межах елементів за відомим законом. Зважаючи на залежність між переміщеннями та напруженнями в точках, що знаходяться всередині розрахункової області, та їх значеннями в точках, що лежать на границі, спочатку розв'язується гранична задача, а потім обчислюються значення параметрів НДС у внутрішніх точках. Систему ГІР відносно невідомих граничних значень функцій отримуємо після спрямування точки спостереження до точки на гладкій ділянці границі. Складовими ГІР, які еквівалентні диференціальним рівнянням, є поля переміщень і напружень, а

також фундаментальні розв'язки задачі та їх узагальнені похідні. Алгебраїзація задачі здійснюється за колокаційною схемою методу граничних елементів, при цьому обчислення сингулярних частин граничних інтегралів по елементах, які містять полюс інтегрування, виконується аналітично з використанням отриманих в роботі виразів

**Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, результати яких наведені в дисертаційній роботі, виконані відповідно до плану наукової роботи кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА за пріоритетним напрямком розвитку науки і техніки в Україні «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави». Одержані наукові результати були використані при розробці проектів: ЗДБ-2013 «Теорії і методи дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань та прогнозування динамічної поведінки пружних систем, що збуджуються стохастичними ударними впливами» (№ держ. реєстрації 0113U002290); 2ДБ-2016 «Теорії і методи аналізу динамічного деформування складних механічних систем під дією навантажень періодичного, стохастичного та ударного характеру» (№ держ. реєстрації 0116U000840); 2ДБ-2018 «Методи та алгоритми прогнозування критичних станів та катастроф у динамічних системах при дії навантажень ударного та стохастичного характеру» (№ держ. реєстрації 0118U002015); 2ДБ-2019 «Чисельні методи дослідження та прогнозування нелінійних коливань, динамічної стійкості та кризових явищ і хаотичної поведінки пружних систем» (№ держ. реєстрації 0119U002578). Автор був одним із виконавців зазначених наукових розробок. Результати дисертаційних досліджень були включені у звіти по даним НДР.

### **Наукова новизна:**

- на основі МГІР створена ефективна методика розв’язання задач про коливання тривимірних пористих насичених рідиною тіл при дії динамічного навантаження;
- розроблений підхід на основі розвитку підінтегральних виразів в ряд Маклорена для визначення сингулярних граничних інтегралів, які описують динамічний НДС масивних поропружних об’єктів; досліджена точність обчислення ядер інтегральних рівнянь в залежності від кількості утриманих членів ряду;
- виведені замкнені співвідношення для аналітичного визначення сингулярних частин граничних інтегралів для випадку, коли полюс розташований на плоскому елементі границі;
- отримані зручні для подальших перетворень та обчислень формули узагальненої похідної фундаментального розв’язку задачі тривимірної динамічної поропружності;
- за допомогою створеної методики розв’язана задача про динамічний НДС поропружного простору, послабленого двома сферичними отворами, границя одного з яких зазнає дії вибухового навантаження.

**Практична цінність** результатів роботи полягає у розробці та програмній реалізації ефективного гранично-елементного підходу для практичного аналізу хвильових процесів в пористих насичених рідиною тілах. Чисельна реалізація розробленого підходу отримала застосування при виконанні проєктів в Науково-дослідному інституті будівельної механіки КНУБА.

**Особистий внесок здобувача.** В дисертаційній роботі викладені результати досліджень, отримані автором особисто: проведений огляд основних методів розв’язання задач розповсюдження пружних хвиль в пористих середовищах; одержані розрахункові співвідношення МГІР з використанням фундаментальних розв’язків задачі про коливання просторових пористих тіл; отримані вирази для узагальнених похідних фундаментальних розв’язків задачі

зв'язаної термопружності; розроблений новий алгоритм обчислення діагональних компонент алгебраїчного аналога системи інтегральних рівнянь, який використовує інтегрування ядер по круговій області; запропоновані чисельні співвідношення для обчислення параметрів НДС поропружних насичених рідиною тіл в широкому діапазоні частоти коливань; отримані чисельні розв'язки тестових задач для перевірки достовірності розроблених підходів і алгоритмів та збіжності результатів.

**Апробація результатів.** Одержані в даній роботі основні наукові результати були представлені на вітчизняних та міжнародних науково-практичних конференціях: 75 науково-практичній конференції КНУБА (м.Київ, 2014 р.); Науковій конференції молодих вчених, аспірантів і студентів (м. Київ, КНУБА, 2014 р.); Першій всеукраїнській науково-практичній конференції «Буд-Майстер-Клас» (м. Київ, КНУБА, 2015 р.); Науково-методичній конференції «Сучасні проблеми будівельної механіки і теорії споруд" (м. Київ, КНУБА, 2016 р.); II Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (м. Київ, КНУБА, 2018 р.).

# РОЗДІЛ 1

## ОГЛЯД ПІДХОДІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ

### 1.1. Основні методи і підходи до розв'язання задач поропружності

Наприкінці XVIII століття серйозні проблеми будівництва дамб, гребель та необхідність розуміння взаємодії і сумісної роботи води і деформованого твердого тіла викликали перші спроби опису пористого середовища. У цивільному будівництві проблеми ґрунтово-водних процесів сьогодні описуються на основі теорії пористих середовищ, що складається з теорії сумішей та концепції об'ємних фракцій [42, 41]. Теорія пористих середовищ була заснована на механіці суцільного середовища, складеного з багатоконпонентних матеріалів, які мають різноманітні фізичні властивості. У випадку ґрунтово-водного агрегату підхід теорії пористих середовищ виходить із троїстої моделі ґрунтоутворювача, порової води та порового газу, так що загальна область не містить вільного простору. У результаті кожна складова керується індивідуальним набором рівнянь балансу для маси, імпульсу, моменту імпульсу та енергії [115]. В [122] Р.Вольтман, відкрив поняття об'ємних фракцій як відношення об'ємних порцій ґрунту та порової води та зробив висновок про часткові щільності суміші ґрунту та води.

Окрім потоку рідини в пористих середовища виникла потреба вивчення проблем дифузії. Першим, хто емпірично досліджував ці проблеми, був А.Фік [44]. Пізніше Дж.Штефан посилив закони дифузії Фіка за допомогою вивчення сумішей трьох компонентів і описав дифузію газу через жорсткі мембрани [105]. На початку XX ст. геотехнічними проблемами, зокрема описом ґрунту як

бінарного середовища, що двох складається з взаємодіючих континуумів: твердих зерен та води, займалися К.Терцагі [111] та П.Філлуенгер [45, 105].

Роботи К.А.Трусделла започаткували сучасний погляд на теорію сумішей, як наукову основу теорії пористих середовищ [117, 116, 118]. В [117] К.А.Трусделл представив свої місцеві співвідношення балансу маси, імпульсу та енергії для довільно сформованих сумішей на основі рівнянь для замкнених систем однокомпонентних матеріалів, в [118] описав замкнуту систему сумішей, в якій окремі компоненти ведуть себе як відкриті системи. Надалі теорія сумішей була розвинена в [4, 59, 26], а саме розроблені перші чисто механічно мотивовані підходи для суміші рідини та пружної твердої речовини та сформульовані для них фізичні рівняння. На основі теорії сумішей Р.М.Боуен [25, 27, 24] сформував нестисливі та стисливі моделі пористого середовища, поширивши поняття «об'ємні фракції». В [80] І.А.Мюллер виявив, що компоненти суміші завжди повинні розглядатися як матеріали другого сорту і, якщо до складу суміші входить твердий скелет, фізичний параметр залежить не тільки від градієнта і від другого градієнту деформації, який відповідає руху скелету. В [43] була введена концепція розділення фаз, яка базувалась на ідеї, що твердий скелет є лише частиною багатоконпонентного агрегату після процедури гомогенізації, проведеної над його мікроструктурою, а його складові регулювались стандартними змінними.

Математичне моделювання багатоконпонентних насичених рідиною чи газом пористих середовищ почалося ще в тридцять роки минулого століття. Першими роботами в цьому напрямі вважаються праці Я.І.Френкеля [205] та М.А.Біо [20, 21, 19, 15, 16, 17]. Для пористого насиченого рідиною середовища Я.І.Френкель і М.А.Біо ввели двофазну модель середовища. В їх роботах значна увага приділялась моделям дисипації пористого середовища та способам врахування її в рівняннях рівноваги. Праці М.А.Біо відрізняються значною загальністю і вважаються основною і класичною теорією для розв'язання подібних задач.



Теорія Біо – є лінійною теорією ефективних двофазних середовищ. В ній розробляється двофазна модель середовища, що складається з жорсткого пористого каркасу та рідини, яка заповнює пори, та вводяться додаткові параметри для врахування взаємодії цих фаз. Для моделі виведені базисні рівняння розповсюдження хвиль в двофазних середовищах з припущеннями на основі визначення функції щільності енергії пружної деформації і кінетичної енергії. З теорії Біо слідує, що фундаментальною властивістю пружно-пористого насиченого середовища є те, що в ньому можуть розповсюджуватись три типи хвиль: дві поздовжні хвилі першого та другого виду (швидка і повільна), а також поперечна повільна хвиля. В працях вченого представляються амплітуди, швидкості та частотна залежність затухання в різних насичених пористих середовищах цих трьох типів хвиль. Також були знайдені хвильові ефекти, які добре погоджуються з експериментальними даними.

В статті [19] М.А.Біо поширив свою теорію пружності та консолідації для ізотропних матеріалів для загального випадку пористого анізотропного середовища насиченого рідиною. Поширення звукових хвиль в пористому дисипативному середовищі розглядалось в [15, 16]. Зокрема, був проведений аналіз відносного руху рідини в порах, описані різні моделі дисипації, розсіювання в твердому тілі представлене з використанням загальних принципів термодинаміки. В [16] М.А.Біо представляв твердо-рідинне середовище як комплекс фізично-хімічних систем з результируючими релаксаційними та в'язкопружними властивостями загальної природи. Були описані специфічні релаксаційні моделі та розвинена дана теорія на випадки поширення звукових хвиль в анізотропних тілах.

Для пружного пористого середовища вводились нові параметри, зокрема: модуль зсуву, коефіцієнт стисливості, пористість, в'язкість рідини, проникність, пружні та об'ємні модулі середовища, ефективні щільності пористого середовища. В працях М.А.Біо і Д.Дж.Вілліс [17], К.Х.Су і П.Н.Доджі [123] представили процедури визначення цих параметрів. Зокрема, в

[123] наведений приклад обчислення коефіцієнтів для трьох видів піщаника та визначені швидкості розповсюдження хвиль в зразках гірських порід з використанням експериментально визначених параметрів Біо. В праці [38] матеріал розглядається спочатку цілісно, а при подальшому розгляді приймається до уваги внесок кожної складової фази; описані методи визначення параметрів поропружного середовища та їх обчислені значення для різних видів піщаника, граніту та мармуру.

Макроскопічні рівняння поропружності були отримані в [198, 29, 190, 11, 121, 93, 181] із застосуванням більш строгішої математичної техніки усереднення, ніж в теорії Біо. В працях В.Н.Ніколаєвського [190, 189] викладені основи механіки пористих середовищ, наведені фундаментальні рівняння багатофазних середовищ. Опис пористих матеріалів, що застосовуються в будівництві проведений в [207, 190, 113].

В класичній теорії Біо розглядається тільки глобальний (макроскопічний) потік. Пізніше деякі вчені запропонували [77, 76] та досліджували [84, 65] такий механізм хвильового затухання як локальний флюїдний потік. Даний підхід засновувався на теорії втрат при русі рідкого заповнювача в межах однієї чи декількох зв'язаних пор внаслідок деформації пустот в процесі проходження поперечної хвилі.

Анізотропна модель пористого середовища була досліджена Дж.Парра в [90, 89]. Опис потоків видавлювання відбувався за допомогою спеціального тензора, а сама модель пов'язувалась з системою однаково орієнтованих насичених рідиною тріщин.

Частотно-залежна дисипація розглядалась в працях [33, 108]. Дж.Карціоне [34] однорідне пористе середовище моделював як однофазне в'язкопружне середовище, а механізми дисипації вводив за допомогою заміни модуля взаємодії між фазами на залежні від часу релаксаційні функції стандартної моделі твердого тіла, стверджуючи при цьому, що для відповідності з пористою моделлю для кожного в'язкопружного модуля необхідно лише один релаксаційних механізм.

Деякі праці [203, 83, 92] присвячувались дослідженню розповсюдження та впливу Р-хвилі, у якої довжина значно більша за товщини шарів середовища. Тому при проходженні крізь шари багат шарового пористого середовища, оскільки кожен шар має різні стискувальні властивості та різний тиск, в сусідніх шарах тиск в рідкому заповнювачі буде прагнути вирівнятись за рахунок дифузії та в'язких потоків. Б.Я.Гуревич та С.Л.Лопатніков в [62] враховували поширення Р-хвилі у випадкових шаруватих осадових відкладах. Застосування теорії Біо до таких областей приводить до системи рівнянь з перемінними коефіцієнтами. В [57, 56] розширили цей аналіз в шаруватих середовищах до більш високих частот Р-хвильового розсіювання від границь шарів, яке трактувалось у вигляді додаткового повільного потоку між шарами. Вплив трьох факторів: потоків рідини всередині шарів, спровоковане проходженням хвилі, розсіювання, спричинене тонкою шаруватістю, та стандартного в'язкоінерційного поглинання на затухання швидкої поздовжньої хвилі досліджувався в [61] на прикладі одновимірної моделі тонкошарового середовища з пустотами. В [91] встановлено, що при достатньо тонких шарах хвильові ефекти максимальні, а при збільшенні товщини шарів частота коливань понижується.

Ще одним алгоритмом для врахування дисипації є побудова в'язкопоропружних моделей середовища, які можуть викликати еквівалентні ефекти поглинання та дисперсії. В праці [63] наведена ефективна модель, яка базується на інтегродиференціальному хвильовому рівнянні, яке в широкому діапазоні частот узгоджується з результатами, наведеними в [62].

Важливим для розуміння процесів, що відбуваються в насичених пористих середовищах, є математичне моделювання процесів течії рідини. Вплив рідкого заповнювача, що рухається, на НДС пористої гірської породи описаний в [46, 119]. В [164, 8, 31, 2] наводяться результати чисельних досліджень процесів фільтрації в пористих середовищах, в [188] основні рівняння механіки та теплофізики багатофазових середовищ різної структури, методи опису між фазової взаємодії в дисперсних середовищах, в [132] теорія

одно- та багатофазової фільтрації рідин і газів в однорідних та неоднорідних пористих областях, в [9] системи рівнянь з частинними похідними, що описують закони збереження мас фаз і кількості рідини. Математичні моделі фільтрації в поропружності описуються системою рівнянь. До неї входять рівняння пружності для переміщень та доданого до них рівняння фільтрації. Ці рівняння пов'язані між собою та описують механізм потоку рідини та деформування пористого середовища [190, 14, 19, 15, 16, 17, 13, 18, 94, 124].

Деякі вчені лінійну теорію поропружності застосовували для дослідження гідротехнічних конструкцій. Г.Н.Копилова і С.В.Болдіна [165] провели оцінку НДС резервуарів підземних вод та визначення їх пружних параметрів і пористості. Поропружна модель, у цьому випадку, використовувалась для визначення рівня води при періодичних змінах порового тиску в резервуарі. В [160] розв'язувалась осесиметрична задача для хвильового поля навколо точкового джерела, яке поміщене в свердловину, оточену пористим середовищем Біо. Рішення знаходились для хвильових полів як всередині свердловини з рідиною, так і в оточуючому пористому середовищі при двох випадках граничних умов («відкритих» та «закритих» пор).

Опис, на перший погляд, простих насичених рідиною матеріалів був об'єктом багатьох досліджень, зокрема, біотехнологічних. Л.Б.Маслов [176, 177, 178] досліджував деформування біологічних структур як поропружних середовищ. Використовуючи динамічні рівняння теорії поропружності Біо, автор розробив анізотропну модель кісткової тканини людини для вивчення амплітудно-частотних характеристик і розподілу тиску в порах тканини у випадку вимушених гармонічних коливань. Стверджувалось, що ця математична модель необхідна для дослідження процесів відновлення пошкоджених елементів опорно-рухового апарату людини за наявності динамічного навантаження.

Є.А.Марфін, М.Н.Овчинников в роботі [175] навели методи визначення основних пружних характеристик насичених рідинними середовищами, а також представили особливості розповсюдження акустичних та сейсмічних

хвиль у насичених пористих середовищах та гірських породах. Теоретичним дослідженням моделювання внутрішньої структури в насичених капілярно-пористих структурах присвячена монографія [182]. В ній П.В.Москальов і В.В.Шитов описують закономірності процесів переносу маси та методів оцінки емпіричних показників пористого середовища; розглядають методи моделювання процесів з хаотичною динамікою в макроскопічно ізотропній пористій структурі.

У випадку, коли тіло, що розглядається, має поперечні розміри набагато менші за поздовжні: пластини, оболонки – використовуються спрощені моделі з рівняннями, що описують прогин тіла в поперечному напрямі. В задачах поропружності розглядались двовимірні [30, 71] та тривимірні [106, 107, 112] рівняння фільтрації рідини в порах пластин.

В'язкопружну поведінку та НДС конструкцій з пористих еластомерних матеріалів, таких як: резино-металеві віброізолятори, демпфери, плити, труби, вивчали в [149, 171, 148, 201, 134, 208, 173]. Розрахунок пористих елементів систем збору та розподілу води проведений в [145, 196].

Динамічні задачі для пористих середовищ розв'язували К.Е.Сорокін, Х.Х.Імомназаров і С.Т.Туйчиєва в [199, 158]. В статті [199] представлено рішення лінійної двовимірної динамічної задачі розповсюдження сейсмічних хвиль в пористому середовищі, насиченому рідиною, де за основу була взята лінеаризована модель з трьома параметрами, які описують середовище. В [158] наведені розв'язки системи динамічних рівнянь, які використовуються для моделювання швидкостей зміщень пористого каркасу та рідкого заповнювача, а також порового тиску та напружень при різних значеннях швидкостей розповсюдження поздовжніх та поперечних хвиль в однорідному ізотропному пористому середовищі при дії зосередженої сили.

Дослідженнями поширення хвиль в двовимірному поропружному нескінченному циліндрі займались І.А.Аббас і А.Н.Абд-Алла [1]. Використовуючи теорію та рівняння Біо, були одержані чотири диференціальні рівняння розповсюдження гармонічних поздовжніх хвиль в циліндричній

пористій стійці та визначені чисельні значення переміщень, напружень і порового тиску в різних точках при різних значеннях коефіцієнту пористості.

Стаття [146] присвячена вивченню процесу відбиття ударних хвиль помірної амплітуди від твердої границі в пористому середовищі, насиченому рідиною та кульками газу. Користуючись математичною моделлю В.Є.Донцов і В.Є.Накоряков визначили значення амплітуд і швидкостей відбиття хвиль.

В [137] розглянута задача про коливання функціонально-градієнтної колони в режимі усталених коливань. за допомогою лінеаризації вихідної системи рівнянь сформулювали інтегральне співвідношення для розв'язку оберненої задачі з відновлення перемінного коефіцієнта проникності середовища.

Деякі аспекти лінійної поропружності, поширення пружних хвиль в флюїдонасичених та анізотропних пористих тілах висвітлені в публікаціях [96, 55, 102, 135, 162, 161, 7, 125, 130, 144].

При розв'язанні нестационарних задач поропружності побудова схем розщеплення базується на розщепленні по фізичних процесам, де для переходу на новий часовий шар спочатку розв'язуються окремі задачі для зміщень пористого середовища і тиску в порах. Деякі такі схеми наведені в [5, 22, 68, 78, 163]. В [163] А.Є.Колесов використовував скінченно-елементну апроксимацію по простору, а обчислювальна реалізація двошарових схем базувалась на рішенні системи зв'язаних рівнянь.

При рішенні нестационарних систем рівнянь з частковими похідними необхідним є розв'язання зв'язаних систем сіткових еліптичних рівнянь на новому часовому шарі. Для цих цілей в [52, 49, 48, 50] Ф.Гаспар, Ф.Лісбона та ін. з врахуванням специфіки поставлених задач в поропружності застосовували багатосіткові ітераційні методи. Для рішення крайових задач із застосуванням апроксимації рівнянь по простору застосовується метод кінцевих різниць [166, 193, 53, 51, 87, 86, 85].

Підхід, який базується на методі комплексних змінних, до вивчення питань поширення плоских пружних хвиль від отвору в пористому середовищі

застосували в [120]. Автори застосували метод поширення хвильових функцій для отримання розв'язків рівнянь Гельмгольца, представили отвір довільної форми у вигляді одиничного кола та інтегрування граничних умов вздовж границі одиничного кола. В результаті були отримані значення параметрів поропружного середовища: переміщення, напруження та тиск в порах.

Доволі поширеним є метод скінченних елементів, за допомогою якого в [3, 183] досліджене відбиття поздовжніх хвиль переміщення від плоскої границі пружного пористого півпростору та відбиття поздовжніх хвиль від вільної поверхні. В.З.Юречко в [208] за допомогою цього методу досліджував геометрично нелінійне деформування та визначав параметри НДС пористих конструкцій з врахуванням реологічних властивостей матеріалів. На основі скінченно-елементного моделювання розв'язувались задачі термопружності конструкцій пористих пластин та балок-пластин А.В.Ефремов і С.М.Шляхов [150, 151].

## **1.2. Застосування методу граничних елементів до розрахунку напружено-деформованого стану поропружних конструкцій**

У випадку просторової задачі теорії пружності з точки зору чисельної реалізації раціональним є застосування підходів, які дозволяють окремо розглянути залежності між граничними переміщеннями і напруженнями, та співвідношення, які визначають дані параметри всередині розрахункової області. Реалізація такого підходу є можливою завдяки використанню апарату методу потенціалу.

МГЕ, окремим випадком якого є МГІР, є методом рішення крайових та початково-крайових задач механіки деформівного тіла для диференціальних рівнянь в часткових похідних, який з'явився в результаті поєднання ідей теорії потенціалу з методами сучасної теорії апроксимації. З точки зору теорії апроксимації МГЕ відрізняється від методу скінченних елементів тим, що

дискретизація здійснюється не всередині області, в якій шукається розв'язок, а на її границі. Таке спрощення досягається шляхом точного задоволення вихідних диференціальних рівнянь за допомогою розв'язку, який представлений у вигляді, характерному для теорії потенціалу. Такі представлення можуть використовуватись при МГЕ тільки у випадку, якщо є відомими точно або наближено в явному вигляді фундаментальні розв'язки, тобто функції Гріна, для диференціальних рівнянь та є дослідженими граничні властивості відповідних потенціалів. Після граничного переходу на границю у формулах представлення розв'язку отримуємо ГІР. Вони є основним об'єктом апроксимації в МГЕ. ГІР, які виникають в теорії пружності та інших розділах механіки твердого тіла, часто є сингулярними інтегральними рівняннями [202, 180, 184], а методи їх апроксимації не тривіальними. МГЕ дозволяє відобразити природним чином навіть достатньо складні умови на границях тіл, що дотикаються. Дослідження по чисельній реалізації методу представлені в значній кількості публікацій, книг [204, 194, 139, 28] та перекладів [167, 179, 136, 133].

Вперше метод потенціалу використав для отримання чисельного розв'язку плоскої задачі теорії пружності Ф.Дж.Ріццо [95]. Реалізований ним варіант методу потенціалу мав за основу граничний варіант формули Соміліани. В подальшому цей підхід отримав назву «метод граничних інтегральних рівнянь». Від непрямого підходу він відрізняється універсальністю по відношенню до граничних умов. Пізніше Т.А.Круз і Ф.Дж.Ріццо почали застосовувати для розв'язку динамічних задач чисельні гранично-інтегральні процедури з використанням перетворень Лапласа по часу [36, 35].

Застосування чисельних аспектів апарату методу потенціалу та перетворення Лапласа до просторових задач динаміки представлене в статтях [197, 170]. І.З.Ройтфарб і Ч.В.Кионг обчислювали сингулярні інтегралі граничної задачі, користуючись виділенням кругової області з центром в



полюсі. Також були наведені замкнені вирази для визначення інтегралів по колу від еластодинамічних ядер.

Метод інтегральних рівнянь А.М.Назаренко і А.М.Ложкін в [187] використали для розв'язку задачі про дифракцію плоских гармонічних хвиль на періодичній системі періодичних жорстких циліндричних включень довільного поперечного перерізу, де сингулярні рівняння реалізовувались чисельно. Також був проведений аналіз НДС середовища на границі включення.

Крайові задачі динаміки пружних ізотропних середовищ, які послаблені циліндричними порожнинами довільного поперечного перерізу розглянули Л.А.Алексєєва і Г.К.Кайшибаєва [126]. Автори розробили метод сингулярних граничних інтегральних рівнянь для розв'язку задач дифракції пружних плоских хвиль; дослідили випадки критичних кутів падіння хвилі, вплив на побудову ядер, за допомогою яких вирішуються сингулярні ГІР та їх асимптотичні властивості. Для побудови визначаючих співвідношень використовувались апарат теорії узагальнених функцій та теорія ГІР крайових задач теорії пружності при дії стаціонарного бігового навантаження.

В [174] І.П. Марков представив прямий підхід МГЕ в області Лапласа для розв'язання статичних і нестационарних тривимірних динамічних задач лінійної теорії електромагнітопружності. Підхід був заснований на інтегральному рівнянні для переміщень. Динамічну частину фундаментальних розв'язків автор виразив як інтеграл по одиничній пів сфері, а сингулярну статичну – як інтеграл по одиничному колу. Для просторової дискретизації застосував вузловий метод колокацій разом зі змішаними граничними елементами.

В.Д.Купрадзе [169] отримав фундаментальний розв'язок для просторової задачі про усталені коливання, в подальшому застосовувався апарат теорії потенціалу до задач динаміки в [202]. Методику розділу фундаментальних розв'язку на зовнішній додатковій границі розглядають як основу методу фундаментальних розв'язків.

Нову процедуру визначення власних частот коливання конструкцій представляючи проблему як алгебраїчну задачу запропонували Д.Нардіні і

К.А.Бреббія [81]. Автори стверджували, що проєктуючи невідомі переміщення всередині області на штучно підбрану систему функцій, можна позбутись об'ємних інтегралів.

В [138] при визначенні частот власних коливань пружних тіл була розроблена методика формування матриці податливості на основі рішень статичної задачі теорії пружності. Проте, при знаходженні компонент цієї матриці необхідно було визначати переміщення у внутрішніх точках, кількість яких, особливо при описі вищих форм коливань, могла перевищувати кількість граничних полюсів, тому це могло негативно впливати на ефективність чисельних розрахунків.

В статті [206] Н.М.Хуторянський розглядав стаціонарну динамічну задачу тривимірної теорії пружності. Нова схема рішення, запропонована вченим полягала у зведенні крайової задачі до безкінечної системи лінійних функціональних співвідношень, які, в свою чергу, можна отримати при розкладі ядер В.Д.Купрадзе по системі сферичних функцій. Ця процедура доволі важко реалізовувалась чисельно, тому інші автори користуються коллокаційною процедурою. Вона дозволяє одержати наближений розв'язок, використовуючи граничний аналог формули Соміліани.

Дж.Домінгез [39] розглянув задачу еластодинаміки про визначення динамічної жорсткості основи. Були розглянені випадки дифракції хвиль на включеннях і в результаті отримана сейсмічна реакція фундаменту квадратного в плані, який спирається на пружний півпростір. Застосовувати метод потенціалу з фундаментальними розв'язками В.Д.Купрадзе для стаціонарних осесиметричних задач іншим способом було запропоновано в [58]. При цьому стверджувалось, що краще не оперувати виразом, отриманим в результаті інтегрування просторового фундаментального розв'язку по окружній координаті, а інтегрувати ядро по всій поверхні.

В статті [60] в деталях описаний процес формування гіперсингулярних ГР. Автори стверджували, що використання ГР з сингулярними ядрами є ефективним навіть у точках, що лежать на негладкій ділянці границі. Було

запропоновано нову методику обчислення гіперсингулярних поверхневих інтегралів з чисельними результатами розрахунку цих інтегралів на вигнутих елементах для тривимірної задачі.

МГЕ є одним із методів, які широко застосовуються для розв'язку крайових задач динаміки поропружних тіл. При аналізі хвиль в таких тілах можна сформулювати початково-крайові задачі, які зводяться до розв'язку ГПР. На першому етапі розв'язується гранична задача, тобто визначаються незадані граничними умовами переміщення і напруження в точках границі. Після цього за відомими інтегральними формулами обчислюються параметри НДС в точках на границі та всередині розрахункової області. Оскільки в МГЕ немає необхідності в внутрішній сітці, то побудова сітки є значно простішою. Також МГЕ є граничним методом, в якому числова апроксимація проводиться на одиницю меншою, ніж розмірність середовища, що дозволяє отримати систему рівнянь меншого порядку, зменшити комп'ютерні затрати та підвищити ефективність розрахунку. Звісно, ці переваги більш корисні, коли область розрахунку необмежена.

Починаючи з робіт Біо, почала відмічатись аналогія між теоріями поропружності та термопружності, яка простежується в еквівалентності між рівняннями та величинами, що використовуються в поропружності та термопружності.

Становлення застосування МГЕ та МГПР до аналізу тривимірних задач динаміки теорії пружності та термопружності показує монографія В.Купрадзе [202]. В ній вивчаються задачі усталених термопружних коливань, представлені вирази фундаментальних та сингулярних розв'язків рівнянь теорії термопружності, які мають чітку аналогію з рівняннями поропружності, та досліджені їх основні властивості.

Термопружність є областю механіки, яка об'єднує в собі два напрямки: теорію пружності та теорію теплопровідності, тому враховує взаємний вплив деформацій та температури. Питання термопружності чітко висвітлені в перекладі монографіях В.Новацького [191, 192], [191] яка була першою працею

в світі по теорії зв'язної термопружності. В ній автор вивів основні рівняння термопружності і представив методи їх рішення, вивів основні сингулярні рішення рівнянь термопружності для різних крайових задач. Також був проведений аналіз розповсюдження гармонічних хвиль і різних видів термопружних хвиль (сферичні, циліндричні та поверхневі).

Граничні задачі тривимірної теорії термопружності розглядаються в працях [153, 79, 64, 12, 74]. В [153] особлива увага приділена ГР для аналізу задачі термопружного розсіювання хвиль на відкритій поверхні типу екран, в [64] апарат методу потенціалу розроблявся для замкнених областей, гранично-елементні розв'язки термопружних задач наведені в [12, 74].

Починаючи з 90-х років ХХ ст. почала з'являтися значна кількість праць, присвячена вивченню проблем поропружності та застосуванню МГЕ та МГР для їх вирішення.

Питаннями поропружності у двовимірній постановці займався, зокрема, Дж.Домінгез [40]. Він представив рівняння зі складовими переміщеннями і напруженнями в твердій речовині та тиску у рідині. Майже в той же час А.Х.-Д.Ченг, Т.Бадмус, Д.Е.Бескос в [32] представили інші ГР, які були еквівалентними до наведених в [40], але записані зі складовими динамічними та кінематичними параметрами. Дж.Домінгез у своїй книзі також навів аналогію з термопружністю, вивів фундаментальні та аналітичні розв'язки двовимірних задач теорії поропружності, розглянув приклад розв'язання такої задачі.

Застосування МГР і МГЕ для аналізу проблем поропружності представлено в [23, 147]. В праці [23] Дж.Боннет досліджував динамічні задачі поропружності та стверджував, що із шести невідомих лише переміщення та напруження в твердій речовині і тиск в рідині є незалежними, оскільки переміщення рідини є залежним. Тому вирази для фундаментальних розв'язків, де є шість (чотири для двовимірної задачі) незалежних невідомих автор вважав не відповідними.

Одним із методів, які на сьогодні використовуються для розв'язку систем диференціальних рівнянь є інтегральне і чисельне перетворення Лапласа. При

побудові алгоритмів для чисельного перетворення керуються тим, щоб метод був точним для перших функцій наперед фіксованої системи. У випадку, якщо шуканий оригінал можна представити у вигляді розкладу по системі функцій, тоді можна отримати задовільне наближення до нього в результаті застосування таких методів.

Перетворення Лапласа для побудови фундаментальних розв'язків для поропружних систем використовував М.Шанц [100, 97]. Для розв'язку ГІР автор використовував чисельні схеми, які базуються на методі квадратур згортки. Особливості застосування цього методу на базі гранично-елементних формулювань в задачах в'язкопружності та поропружності представлені в [98, 99].

П.Лі та М.Шанц [73, 72] розглядали трифазну поропружну одновимірну колону під дією динамічного навантаження. Аналітичний розв'язок в області Лапласа в цих працях розшукувалось з використанням трифазної моделі пористого середовища, в якому пористий пружний каркас частково заповнений рідиною, частково газом. Розрахувавши приклад з використанням даних для одного з піщаників, стверджувалось, що нехтуючи в'язкою взаємодією між рідкою та твердою фазами, друга і третя повільні хвилі є ідентичними.

Модель пористого середовища з двофазною внутрішньою структурою розглядається в [128, 127], де для гранично-елементної методики розроблений новий метод чисельного перетворення Лапласа. Користуючись фундаментальним розв'язком з [100], автори побудували нову систему ГІР з чисельними гранично-елементними рішеннями прямих тривимірних задач динамічної поропружності. Задачу про динамічне осідання поропружної колони розглядали А.В.Аменицький, А.А.Бєлов, Л.А.Ігумнов в [129]. Також були представлені ефект перебудови відгуку переміщень для повної моделі Біо на відгук переміщень для моделі Біо, що не стискається.

В [157, 156, 168, 152, 131] наведені методи чисельного моделювання динаміки трьохвимірних однорідних поропружних тіл та рішення модельних задач розповсюдження поропружних хвиль при різних граничних умовах,

також представлене моделювання ефекту збудження третьої хвилі. В [195, 159, 172] представлені результати розрахунків динамічного стану скінченних поропружних та в'язкопружних тіл на основі МГЕ. В [155] для підвищення ефективності чисельного моделювання тривимірних крайових задач поропружної динаміки до прямого МГЕ застосовуються елементи паралельних обчислень. В [131] застосовується прямий варіант МГПР з гранично-елементною методикою чисельного моделювання динамічних задач анізотропної теорії пружності та представлений опис неklasичної схеми редукції крайових задач до нових ГПР.

В статті [10] представлений порівняльний аналіз чисельних результатів переміщень точок поропружної колони отриманих методом скінченних елементів та тих, які отримав М.Шанц [100], користуючись МГЕ. На простому прикладі автори дослідили вплив зміни кількості граничних елементів, часового кроку та величини коефіцієнта проникності середовища на остаточні значення переміщень.

Розв'язком проблеми розповсюдження пружних хвиль в пористому середовищі, яке не заповнене рідиною займалися І.Ашаєрі, М.Камаліан, М.К.Джафарі [6]. В статті наведені диференціальні рівняння для ненасиченого простору в тривимірній трансформованій області Лапласа. Зокрема, рішення рівнянь були отримані, використовуючи розв'язки класичної еластодинаміки та пороеластодинаміки з обнулінням відповідних коефіцієнтів. Пошуком аналітичної форми фундаментальних рішень займалися К.В.Нгуєн, В.Гатмірі [82] та М.Дж.Шахарі, М.Камаліан [101] для розв'язку дво- та тривимірної динамічних задач поропружності в часовій області. В [75] Дж.Г.Маноліс і Д.Е.Бескос наводять фундаментальні розв'язки сингулярних ГПР поропружності.

### 1.3. Особливості пружних характеристик пористих матеріалів

В даній роботі розглядаються конструкції з пористих матеріалів, насичених рідиною. При дослідженні НДС пористих конструкцій приймається, що по всьому об'єму тіла пори розподілені рівномірно. При розгляді з точки зору механіки суцільного середовища насичена рідиною чи газом пориста область є, по суті, двофазним суцільним середовищем. До першої фази належать тверді часточки пористого каркасу, а до другої – елементи рідкого заповнювача. Це необхідно враховувати при вивченні особливостей поведінки пористих середовищ, які зумовлені різницею механічних властивостей обох фаз. Розбиття всіх складових часточок на два класи, по відповідності до кожної фази, необхідне ще і тому, що різниця в поведінці елементів одного класу набагато менш суттєва за різницю між часточками різних фаз. При такому поділі залишається припущення, що простір елементарного об'єму заповнений двома суцільними середовищами, які можуть взаємодіяти один з одним. Фундаментальною властивістю пружно-пористого насиченого середовища є те, що в ньому можуть розповсюджуватись три типи хвиль, а саме: дві поздовжні хвилі («швидка» та «повільна»), а також поперечна повільна хвиля. Існування двох типів поздовжніх хвиль пов'язане з різною стисливістю пористого каркасу та рідкого заповнювача. Дослідження властивостей пористих матеріалів висвітлені в працях [20, 17, 123, 190, 38, 207, 189, 113].

Оскільки в пружно-пористому насиченому середовищі компоненти різних фаз мають різні густини при розрахунках необхідно враховувати усереднене значення густини. Загальна густина пружно-пористого елемента (щільність насиченого пористого матеріалу в цілому) представляється відповідно до [20, 38, 161]:

$$\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}. \quad (1.1)$$

Цю величину можна виразити через густини каркасу  $\rho_s$  і рідкого заповнювача  $\rho_f$ . Маса каркасу на одиницю об'єму всього тіла:

$$\rho_1 = \rho_s(1 - \beta), \quad (1.2)$$

маса рідини на одиницю об'єму тіла:

$$\rho_2 = \beta \cdot \rho_f, \quad (1.3)$$

де  $\beta$  – значення пористості твердого матеріалу, яка поєднується з масовим рухом рідини відносно скелету, тобто що представляється взаємозв'язком об'єму порот («ефективна пористість»).

Отже, отримуємо:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \rho_s + \beta(\rho_f - \rho_s). \quad (1.4)$$

Ці співвідношення базуються на припущенні відсутності відносного руху між обома фазами.

Звідси маємо:

$$\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}, \quad (1.5)$$

$$\rho_2 = \rho_{22} + \rho_{12}. \quad (1.6)$$

де коефіцієнт  $\rho_{12}$  представляє собою параметр співвідношення мас між каркасом та рідиною. Ця величина завжди має від'ємне значення:

$$\rho_{12} < 0.$$



Коефіцієнти  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{12}$  – це часткові фазові щільності пористого насиченого середовища або ефективні щільності середовища, де  $\rho_{11}$  – це загальна ефективна маса пружного скелету, що рухається в рідині, і є рівною:

$$\rho_{11} = \rho_1 + \rho_a, \quad (1.7)$$

$$\rho_{22} = \rho_2 + \rho_a, \quad (1.8)$$

де  $\rho_a$  – щільність приєднаної маси, яка вводиться для опису взаємодії пружного скелету і рідини:

$$\rho_a = -\rho_{12} = c \cdot \beta \cdot \rho_f, \quad (1.9)$$

$c$  – коефіцієнт, який залежить від геометрії пор та від частоти збурення (параметр викривлення порових каналів).

Коефіцієнти  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{12}$  це динамічні коефіцієнти, при чому перші два з них мають бути додатними:

$$\rho_{11} > 0, \quad \rho_{22} > 0,$$

$$\rho_{11} \cdot \rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0$$

Ці умови виконуються, оскільки  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  і  $\rho_a$  по своїй природі є позитивними.

Ще однією особливістю пористого насиченого рідиною середовища є введені М.А.Біо в [20, 17] та розвинені в [38] модулі поропружного матеріалу  $Q$ ,  $R$ ,  $B$  і  $M$ , які виражаються через пористість  $\beta$ , коефіцієнт ефективних напружень Біо  $\alpha$  та модулі об'ємного стиснення неосушеного та осушеного пористого матеріалу  $K_u$  і  $K$ :

$$Q = \frac{\beta(\alpha - \beta)(K_u - K)}{\alpha^2}, \quad (1.10)$$

$$R = \frac{\beta^2(K_u - K)}{\alpha^2}, \quad (1.11)$$

$$B = \frac{\alpha M}{K + \alpha^2 M}, \quad (1.12)$$

$$M = \frac{R}{\beta^2}. \quad (1.13)$$

Коефіцієнт ефективних напружень Біо визначається [38]:

$$\alpha = \frac{\beta(Q + R)}{R}. \quad (1.14)$$

Модулі об'ємного стиснення визначаються лабораторним шляхом:

$$K = \frac{V \cdot \Delta P}{\Delta V}, \quad (1.15)$$

$$K_u = \frac{V_u \cdot \Delta P}{\Delta V_u}, \quad (1.16)$$

де  $V$  і  $V_u$  – початковий об'єм осушеного і неосушеного пористого матеріалу,  $\Delta P$  – навантаження, прикладене на зразок, у вигляді зростаючого в часі тиску,  $\Delta V$  і  $\Delta V_u$  – зміна об'єму осушеного і неосушеного зразка після дії навантаження.

#### 1.4. Висновки за розділом

Аналіз праць показує, що, не зважаючи на значну кількість досліджень, залишаються проблемними деякі аспекти в питаннях поропружності:

- в більшості тривимірних задач, в яких використовувались МГЕ та МГР, присвячені застосуванню інтегрального перетворення Лапласа, в той час як для частотної області задачі досліджувались в основному в двовимірній постановці;
- незважаючи на те, що в літературі присутні варіанти сингулярних ГР, є лише одиничні гранично-елементні розв'язки крайових динамічних задач поропружності.
- в більшості робіт досліджувались тіла простої геометричної форми і практично відсутні дослідження присвячені розв'язкам задач коливань елементів будівельних споруд.

Враховуючи зроблені висновки, можна стверджувати, що побудова інтегральних представлень рішень задач поропружності в математичній постановці є актуальною сьогодні.

## РОЗДІЛ 2.

### ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ГАРМОНІЧНОЇ ПОРОПРУЖНОСТІ

#### 2.1. Постановка задачі

В даній роботі розглядаються питання, пов'язані з вивченням НДС пористих насичених рідиною тіл при дії динамічного навантаження в тривимірній постановці. Деформований стан пружно-пористого насиченого середовища характеризується двома полями усереднених векторів зміщень: вектор  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x_k, t)$  жорсткого пористого каркасу і вектор  $\mathbf{U}=\mathbf{U}(x_k, t)$  для рідини в поровому просторі. Тут зовнішнім проявом деформації є поле зміщень  $\mathbf{u}$ , яке, наприклад, безпосередньо можуть зареєструвати прилади, та тиск рідини  $p$ . А от зміщення  $\mathbf{U}$  ніяк не вимірюється, проте може бути враховане в результаті розв'язання відповідних математичних задач.

Розглянемо одиничний куб з пружно-пористого насиченого рідиною матеріалу. Тензор напружень може бути представлений у вигляді сукупності двох компонент. Перша з них викликана дією навантаження на твердий скелет кожної поверхні куба [20]:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{array} \right\}, \quad (2.1)$$

де  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$  – напруження, що виникають в каркасі вздовж осей  $x, y, z$ .

Друга визначається дією сил на рідку фазу:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array} \right\}, \quad (2.2)$$

Тут величина  $s$  пропорційна тиску в рідині  $p$  відповідно до:

$$s = -\beta \cdot p. \quad (2.3)$$

При цьому приймається, що розмір одиничного куба набагато більший в порівнянні з розміром пор.

Тензор деформацій твердої фази записується наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} e_x & \frac{1}{2}\gamma_z & \frac{1}{2}\gamma_y \\ \frac{1}{2}\gamma_z & e_y & \frac{1}{2}\gamma_x \\ \frac{1}{2}\gamma_y & \frac{1}{2}\gamma_x & e_z \end{array} \right\}, \quad (2.4)$$

до складу якого входять наступні компоненти:

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\gamma_x = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_z = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

де  $u_x, u_y, u_z$  – компоненти вектора переміщень в каркасі. Вектор переміщень визначається як переміщення всього матеріалу, усереднене по всьому елементу. Аналогічним чином можна визначити вектор усередненого переміщення рідкого заповнювача  $U_x, U_y, U_z$  (переміщення рідини через наскрізні пори представляється як об'ємний потік).

Деформація в рідині визначається як дилатація:

$$e = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Всі сім компонент тензорів напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, s$  вважаються лінійними функціями компонент тензорів деформацій  $e_x, e_y, e_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, e$ . У випадку відсутності сил дисипації та припускаючи, що система знаходиться в рівновазі в ненавантаженому стані залежності між напруженнями та деформаціями мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu e_x + \lambda e + Qe \\ \sigma_y &= 2\mu e_y + \lambda e + Qe \\ \sigma_z &= 2\mu e_z + \lambda e + Qe \\ \tau_x &= \mu\gamma_x \\ \tau_y &= \mu\gamma_y \\ \tau_z &= \mu\gamma_z \\ s &= Q \cdot e + R \cdot e \end{aligned}, \quad (2.6)$$

де  $e = e_x + e_y + e_z$ ;  $\lambda$  і  $\mu$  коефіцієнти Ляме теорії пружності,  $\mu$  – модуль зсуву матеріалу,  $R$  – величина тиску, яку необхідно прикласти на рідину, щоб змінити об'єм заповнювача до певної величини в той час, коли загальний об'єм залишається стабільним,  $Q$  – співвідношення між зміною об'єму твердої фази і рідкого заповнювача.

Загальне навантаження, що прикладене на каркас на одиницю об'єму в  $i$ -ому напрямі як  $q_i$ , а навантаження, прикладене на рідину на одиницю об'єму як  $Q_i$ , по осі  $x$ :

$$q_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$Q_x = \frac{\partial s}{\partial x}$$

По осям  $y$  та  $z$  аналогічно. Динамічні рівняння, в свою чергу, мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_x + \rho_{12} U_x) \\ \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_x + \rho_{22} U_x) \end{cases} \quad (2.8)$$

У випадку, коли середнє переміщення в рідині  $U_i=0$ , через коефіцієнт  $\rho_{12}$  прискорення точок твердої фази, за відсутності руху в рідкому заповнювачі, є причиною появи градієнту тиску в рідині. Це фізично пояснюється масовим ефектом заповнювача на каркас.

## 2.2. Вихідні співвідношення теорії поропружності

Рівняння поропружності, по своєму змісту, є відповідними до рівнянь для пружного середовища і складаються з рівнянь закону Гука та рівнянь загального середовища. Ці рівняння ускладнюються врахуванням дисперсії та дисипації. В однорідному середовищі основним ефектом дисипації є тертя між рідиною та скелетом на границях пор, так званий механізм в'язкої дисипації, що і призводить до необхідності включення додаткових параметрів в рівняння руху. Вплив дисипації проявляє себе по-різному для різних типів хвиль. Найбільш сильно в'язка дисипація проявляється при розповсюдженні повільної поздовжньої хвилі з частотно-залежним затуханням, в результаті чого цю хвилю найскладніше спостерігати у флюїдонасичених тілах.

Представимо рівняння рівноваги для лінійної динамічної поропружності відповідно до М.А.Біо [20].

$$\tau_{ij,j} + X_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i), \quad (2.9)$$

$$\tau_{,j} + X'_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - U_i), \quad (2.10)$$

де  $u_i$ ,  $U_i$  – компоненти векторів переміщень в твердій та фазах;  $\tau_{ij}$  – напруження в твердій речовині;  $\tau$  – напруження в рідині, яке співвідноситься з тиском в рідині  $p$  відповідно:

$$\tau = -\beta \cdot p, \quad (2.11)$$

$\omega$  – колова частота,  $X_i$ ,  $X'_i$  – масові (об'ємні) сили,  $b$  – коефіцієнт дисипації:

$$b = \frac{\eta^* \beta^2}{\kappa}, \quad (2.12)$$

де  $\kappa$  – проникність середовища,  $\eta^*$  – в'язкість рідкого заповнювача.

Фізичні співвідношення поропружності виглядають таким:

$$\tau_{ij} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) \delta_{ij} e + 2\mu e_{ij} + Q \delta_{ij} \varepsilon, \quad (2.13)$$

$$\tau = Qe + R\varepsilon, \quad (2.14)$$

де  $e_{ij}$  є деформацією в пружному каркасі:

$$e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.15)$$



$\varepsilon$  і  $e$  є дилатацією в твердій та рідкій фазах відповідно:

$$\varepsilon = U_{i,i}, \quad (2.16)$$

$$e = u_{i,i}, \quad (2.17)$$

$\lambda$  і  $\mu$  – константи Ляме,  $E$  – модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E = \frac{\mu(2\mu+3\nu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Переміщення точок твердої та рідкої фаз, що входять до складу рівнянь, між собою є залежними. Переміщення в рідкому заповнювачі визначаються:

$$U_i = \frac{\tau_{,i} + X_i' + (i\omega b + \omega^2 \rho_{12})u_i}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (2.18)$$

У випадку, якщо розглядається встановлений режим гармонічних коливань, враховуючи переміщення в рідині, отримуємо рівняння для твердого каркасу, де шість компонент переміщень записані як чотири змінні, а саме: три компоненти переміщень в скелеті  $u_i$  та напруження в рідині  $\tau$ :

$$\begin{aligned} & \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) e_{,i} + \tau_{,i} \left( \frac{Q^2}{R} + \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \right) + \\ & + u_i \omega^2 \frac{\omega^2 (-\rho_{11} \rho_{22} + \rho_{12}^2) + i\omega b (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12})}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} + \quad , \text{ де } i=1,2,3 \quad (2.19) \\ & + X_i + \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} X_i' = 0 \end{aligned}$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Рівняння для заповнювача (четверте рівняння) виглядає:

$$\Delta\tau + \frac{\tau}{R}(-i\omega b + \omega^2 \rho_{12}) + e\left(i\omega b\left(1 + \frac{Q}{R}\right) + \omega^2\left(\rho_{12} - \rho_{22}\frac{Q}{R}\right)\right) + X'_{i,i} = 0. \quad (2.20)$$

Аналогію між термопружністю та поропружністю для гармонічної в часі поведінки помітив ще Дж.Боннет [23]. Надалі еквівалентність розвинув у своїй праці Дж.Домінгез [40].

### 2.3. Хвильові рівняння термопружності

Враховуючи аналогію між теоріями поропружності та термопружності, розглянемо для початку основи термопружності, які розглядали в своїх працях В.Д.Купрадзе [202] та В.Новацький [191, 192].

Таблиця 2.1 – Еквівалентність між величинами в теоріях термопружності та поропружності

Термопружність	Поропружність
$\mathbf{u}_i$	$u_i$
$\theta$	$\tau$
$\gamma$	$\gamma^* = -\frac{Q}{R} - \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}$
$\rho$	$\rho^* = \frac{\omega^2(-\rho_{11}\rho_{22} + \rho_{12}^2) + i\omega b(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{12})}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}$
$\kappa$	$\kappa^* = \frac{R}{b + i\omega\rho_{22}}$
$\eta$	$\eta^* = -b\left(1 + \frac{Q}{R}\right) + i\omega\left(\rho_{12} - \rho_{22}\frac{Q}{R}\right)$

$F_i$	$X_i + \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} X_i'$
$S/\kappa$	$X_i'$

Тут для термопружності введені позначення:  $\theta = T - T_0$  – приріст температури, де  $T$  – абсолютна температура точки  $x$  середовища, яка залежить від положення точки і від часу,  $T_0$  – температура тіла в початковому стані;  $F_i$  – компоненти вектора масових сил, прикладених до тіла,  $S$  – інтенсивність теплового джерела,  $\gamma$  – коефіцієнт, який визначається:

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \quad (2.21)$$

де  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення;

$$\eta \equiv \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}, \quad (2.22)$$

де  $\lambda_0$  – коефіцієнт теплопровідності;

$$\kappa = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, \quad (2.23)$$

де  $c_\varepsilon$  – питома теплоємність при постійній деформації  $\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}\|$ .

Теорія пружності в своїх гіпотезах не враховує температуру середовища, приймаючи, що температура у всіх точках однакова і при деформації не змінюється. В дійсності деформації середовища супроводжуються зміною температури, а зміна температури супроводжує деформації, які спричиняються

тепловим розширенням, навіть за відсутності зовнішніх напружень та масових сил.

Розповсюдження хвиль в пружному тілі тісно пов'язане зі зміщенням та деформаціями його елементів. Саме таким чином передається збудження від однієї точки тіла до іншої. Важливо при цьому розрізнити рух часточок середовища, який пов'язаний з розповсюдженням хвиль, та рух самого збудження. В теорії пружності модель середовища можна повністю охарактеризувати трьома величинами: двома пружними постійними та щільністю в стані спокою. Тому закономірності процесу поширення хвиль в пружному середовищі описуються системою рівнянь, які відображають зв'язок між вектором переміщення  $\mathbf{u}$ , тензорами деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  і напружень  $\boldsymbol{\sigma}$  та щільністю  $\rho$ .

Внаслідок дії зовнішнього навантаження, тобто масових, поверхневих сил, а також при дії внутрішніх теплових джерел, нагріву чи охолодження поверхні в момент часу  $t$  тіло переходить в деформований стан з температурою  $T$ . Зміну температури супроводжує виникнення переміщень  $u_i$ , деформацій  $\varepsilon_{ij}$  та напружень  $\sigma_{ij}$ . Перераховані величини  $u_i$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  є функціями координат  $x_i$  та часу  $t$ .

Рівняння і задачі термопружності є подальшим уточненням співвідношень і задач класичної теорії пружності. Повна система рівнянь термопружності складається з рівнянь руху в переміщеннях і доданого до них рівняння теплопровідності [191].

Рівняння руху записуються у вигляді:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j} + F_i = \gamma \theta_{,i} + \rho \ddot{u}_i. \quad (2.24)$$

Рівняння теплопровідності виглядає:

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{j,j} = -\frac{S}{\kappa}. \quad (2.25)$$

де:

$$\ddot{u}_i \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_i^2 u_i, \quad \dot{\theta} \equiv \frac{\partial \theta}{\partial t} = \partial_i \theta.$$

Ці рівняння складають повну систему диференціальних рівнянь термопружності, в якій сталі Ляме відповідають ізотермічному стану ( $\mu = \mu_T$ ,  $\lambda = \lambda_T$ ); в рівняння руху входить, окрім переміщень, температура  $\theta$ , а в рівняння теплопровідності входить, окрім температури, швидкість зміни об'єму  $\dot{\epsilon}$ :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{jj} = \dot{u}_{j,j}. \quad (2.26)$$

У виведених рівняннях шуканими функціями є переміщення  $u_i$  та температура  $\theta$ .

Виразимо компоненти напруженого стану через компоненти деформованого стану і температуру за допомогою співвідношення Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} (\lambda \epsilon - \gamma \theta) + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2.27)$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь термопружності (2.24)-(2.25) у векторній формі:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{F} = \gamma \text{grad } \theta + p \mathbf{u}, \quad (2.28)$$

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \text{div } \mathbf{u} = -\frac{S}{\kappa}, \quad (2.29)$$

Для початку припустимо, що теплові джерела та масові сили відсутні. Розкладемо в (2.28) і (2.29) вектори переміщення і масових сил на потенціальну і соленоїдальну частини для розкладу хвиль на поздовжні та поперечні:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{F} = \rho(\text{grad}\mathcal{G} + \text{rot}\boldsymbol{\chi}). \quad (2.31)$$

Потенціал  $\Phi$  відповідає поздовжнім хвилям та пов'язаний зі зміною об'єму тіла. Вектор  $\boldsymbol{\psi}$  описує розповсюдження поперечних хвиль, які викликають зміну форми.

Отримуємо після підстановки:

$$\left[ \nabla^2 - \left( \frac{1}{\kappa} \right) \partial_t \right] \theta - \eta \nabla^2 \Phi = -S/\kappa, \quad (2.32)$$

$$\left[ \nabla^2 - \left( \frac{1}{C_1^2} \right) \partial_t^2 \right] \Phi = m\theta - \left( \frac{1}{C_1^2} \right) \mathcal{G}, \quad (2.33)$$

$$\left[ \nabla^2 - \left( \frac{1}{C_2^2} \right) \partial_t^2 \right] \boldsymbol{\psi} = - \left( \frac{1}{C_2^2} \right) \boldsymbol{\chi}, \quad (2.34)$$

де:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R},$$

$C_1, C_2$  – швидкість розповсюдження поздовжньої та поперечної хвиль відповідно:

$$C_1^2 \equiv \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (2.35)$$

$$C_2^2 \equiv \mu / \rho, \quad (2.36)$$

$$m \equiv \gamma / (\lambda + 2\mu). \quad (2.37)$$

Після введення диференціальних операторів:

$$\Pi_\alpha^2 \equiv \nabla^2 - \left(1/C_\alpha^2\right) \partial_t^2, \quad \alpha=1,2,$$

$$\Pi_3^2 \equiv \nabla^2 - \left(1/\kappa\right) \partial_t^2.$$

система рівнянь (2.32) – (2.34) може бути представлена у вигляді:

$$\Pi_3^2 \theta - \eta \nabla^2 \Phi = -S/\kappa, \quad (2.38)$$

$$\Pi_1^2 \Phi = m\theta - \left(1/C_1^2\right) \mathcal{G}, \quad (2.39)$$

$$\Pi_2^2 \Psi = -\left(1/C_2^2\right) \chi. \quad (2.40)$$

Виключаючи із цієї системи температуру, отримуємо два хвильових рівняння:

$$\left(\Pi_1^2 \Pi_3^2 - \eta \partial_t \nabla^2\right) \Phi = -m S/\kappa - \left(1/C_1^2\right) \Pi_3^2 \mathcal{G}, \quad (2.41)$$

$$\Pi_2^2 \Psi = -\left(1/C_2^2\right) \chi. \quad (2.42)$$

Перше з цих рівнянь визначає поздовжню хвилю – хвилю розширення, а друге – поперечну хвилю. Хвиля розширення пов'язана з температурою  $\theta$ ,

розповсюдження цієї хвилі розширення пов'язане з виробництвом тепла. Механічна енергія хвилі розширення частково переходить в тепло, що стає причиною зростання температури. Хвиля розширення підлягає затуханню та дисперсії. Елементи тіла при зміні форми зберігають свій об'єм, і цей процес не викликає зміни температури. Оскільки при  $\theta=0$ , ентропія рівна нулю, поперечна хвиля не затухає і не підлягає дисперсії.

Одним із видів хвильового руху є рух, при якому радіальне переміщення  $u_R$  залежить тільки від радіуса  $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ , функція  $u_R(R;t)$  при постійному  $t$  постійна на будь-якій сфері радіусом  $R$ . Поздовжні хвилі такого виду виникають під дією, наприклад, точкових зосереджених теплового джерел або «центрів стиску». Такі хвилі виникають також в необмеженому середовищі, в якому на поверхні сферичної порожнини заданий вплив у вигляді рівномірного нагріву, рівномірної деформації або рівномірного навантаження.

За відсутності масових сил та внутрішніх теплових джерел вихідними рівняннями є:

$$\Pi_3^2 \theta - \eta \nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.43)$$

$$\Pi_1^2 \Phi = m \theta, \quad (2.44)$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є вирази для функцій  $\Phi$  та  $\theta$  які мають вигляд:

$$\Phi(R,t) = \frac{1}{R} \left( \Phi^0 e^{-i\omega t + ik_1 R} + \frac{m}{\sigma^2 - k_2^2} \theta^0 e^{-i\omega t + ik_2 R} \right), \quad (2.45)$$

$$\theta(R,t) = \frac{1}{R} \left( \theta^0 e^{-i\omega t + ik_2 R} + \frac{\eta \kappa q k_1^2}{q - k_1^2} \Phi^0 e^{-i\omega t + ik_1 R} \right). \quad (2.46)$$



Ці функції описують термопружні хвилі, які розходяться. За відомого потенціалу  $\Phi$  можна визначити переміщення, напруження і деформації. В декартовій системі координат:

$$u_i = \Phi_{,i}, \quad \varepsilon_{ij} = \Phi_{,ij}, \quad e = \nabla^2 \Phi.$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij} \Phi_{,kk}) + \rho \delta_{ij} \ddot{\Phi}.$$

В сферичній системі координат з врахуванням симетрії задачі будемо мати:

$$u_R = \partial \Phi / \partial R, \quad \sigma_{RR} = -\left(4\mu/R\right) \left(\partial \Phi / \partial R\right) + \rho \ddot{\Phi},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \rho \ddot{\Phi}.$$

Оскільки функція  $\Phi$  є комплекснозначною, а переміщення і напруження дійсні, то в кінцевому розрахунку необхідно приймати лише дійсні значення правих сторін співвідношень.

#### **2.4. Фундаментальний розв'язок та граничні інтегральні рівняння термопружності**

Матриця фундаментальних розв'язків рівняння для рівнянь термопружності згідно з [202] має вигляд:

$$\begin{aligned}
\Phi_{kj}(x, \omega) = U_{ij}(x, \omega) = \sum_{l=1}^3 \left\{ (1 - \delta_{i4})(1 - \delta_{j4}) \left( \frac{\delta_{ij}}{2\pi\mu} \delta_{3l} - \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \right. \\
\left. + \beta_l \left[ i\omega\eta\delta_{i4}(1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma\delta_{j4}(1 - \delta_{i4}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] + \delta_{i4}\delta_{j4}\gamma_l \right\} \frac{e^{i\lambda_l r}}{r}, \quad (2.47) \\
\alpha_l = \frac{(-1)^l (1 - i\omega\kappa^{-1}\lambda_l^{-2})(\delta_{1l} + \delta_{2l})}{4\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - \frac{\delta_{3l}}{2\pi\rho\omega^2}, \quad \sum_{l=1}^3 \alpha_l = 0, \\
\beta_l = \frac{(-1)^l (\delta_{1l} + \delta_{2l})}{4\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \sum_{l=1}^3 \beta_l = 0, \\
\gamma_l = \frac{(-1)^l (\lambda_l^2 - k_1^2)(\delta_{1l} + \delta_{2l})}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \sum_{l=1}^3 \gamma_l = 1.
\end{aligned}$$

Для величин  $\lambda_1^2$  і  $\lambda_2^2$  повинні виконуватись рівності:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\kappa} + \frac{i\omega\eta}{\lambda + 2\mu} + k_1^2, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^3 = \frac{i\omega}{\kappa} k_1^2, \\
\lambda_3^3 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}.
\end{aligned}$$

Даний фундаментальний розв'язок В.Д.Купрадзе (2.47) можна представити як чотири компоненти. Перша з них визначає переміщення точок термопружного середовища в напрямі осі  $x_k$ , що виникають в результаті дії прикладеної вздовж осі  $x_j$  сили, яка рівна одиниці:

$$U_{jk}(r, \omega) = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 a_m(\omega) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r}, \quad k, j=1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Тут  $r$  є відстанню від точки прикладання одиничної сили до точки, в якій необхідно визначити переміщення.

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - k_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_2(\omega) = \frac{k_1^2 - \lambda_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_3(\omega) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2}.$$

Після проведення процедури диференціювання виразу (2.48) маємо:

$$U_{jk}(r, \omega) = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 a_m(\omega) [\delta_{jk} U_0(r, \omega, m) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m)], \quad (2.49)$$

$$U_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [i\lambda_m(\omega)r - 1], \quad (2.50)$$

$$U_2(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2]. \quad (2.51)$$

Друга компонента матриці фундаментальних розв'язків визначає температуру точок пружного середовища, яка викликана дією прикладеної вздовж осі  $x_j$  рівною одиниці сили:

$$U_{j4}(r, \omega) = \sum_{m=1}^3 \beta_m(\omega) i\omega\eta \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r}, \quad (2.52)$$

$$\beta_1(\omega) = -\beta_2(\omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda - 2\mu)}.$$

Взявши похідну виразу маємо в результаті:

$$U_{j4}(r, \omega) = \frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,j} r [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)], \quad (2.53)$$

Друга компонента матриці фундаментальних розв'язків представляє собою переміщення, викликане дією зосередженого теплового джерела:

$$U_{4k}(r, \omega) = -\sum_{m=1}^3 \beta_m(\omega) \gamma \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r}, \quad (2.54)$$

Тут інтенсивність джерела  $S$  є рівною коефіцієнту теплопровідності  $\lambda_0$ , в результаті співвідношення  $S/\lambda_0=1$ . Провівши диференціювання маємо наступний вираз:

$$U_{4k}(r, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]. \quad (2.55)$$

Четверта частина матриці фундаментальних розв'язків задачі визначає розподіл температури в термопружному середовищі, яку, в свою чергу, викликає дія зосередженого теплового джерела. Ця компонента задається за допомогою виразу:

$$U_{44}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)r} [(\lambda_2^2 - k_1^2)e^{i\lambda_2(\omega)r} - (\lambda_1^2 - k_1^2)e^{i\lambda_1(\omega)r}]. \quad (2.56)$$

Напруження задаються виразами, які мають назву співвідношення Дюгамеля-Неймана. Якщо приймати до уваги, що між переміщеннями точок і деформаціями є лінійний зв'язок, то в результаті отримаємо вирази для обчислення амплітудних значень напружень, що виникають в точках простору на площадках з нормаллю  $\mathbf{n}$ :

$$\sigma_{kj} = \delta_{kj}(\lambda u_{m,m} - \gamma\theta) + \mu(u_{k,j} + u_{j,k}). \quad (2.57)$$

В результаті прикладення одиничної сили виникають напруження, які можна визначити наступним чином:

$$T_{jk}(r, \omega) = n_j [\lambda U_{lk,l} - \gamma U_{4k}] + \mu n_l [U_{jk,l} + U_{lk,j}], \quad (2.58)$$

Після визначення похідної:

$$T_{jk}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right] r U_0(r, \lambda_3) + \\ + \sum_{m=1}^3 (\lambda \lambda_m^2 \alpha_m - i \omega \gamma \eta \beta_m) n_j r_{,k} r U_0(r, \lambda_m) - \\ - 2\mu \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right) \frac{1}{r} U_2(r, \lambda_m) + \sum_{m=1}^3 \alpha_m r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} T_3(r, \lambda_m) \right\} \quad (2.59)$$

$$T_3(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4} [-i\lambda_m^3 r^3 + 6\lambda_m^2 r^2 + 15i\lambda_m r - 15]. \quad (2.60)$$

Напруження, які викликані дією зосередженого теплового джерела задаються:

$$T_{j4}(r) = n_j [\lambda U_{l4,l} - \gamma U_{44}] + \mu n_l [U_{j4,l} + U_{l4,j}], \quad (2.61)$$

Та після проведення операції диференціювання та зведення:

$$T_{j4}(r) = \frac{\gamma\mu}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)r^3} [n_j [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)] + \\ + r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} [U_2(r, \omega, 1) - U_2(r, \omega, 2)]] \quad (2.62)$$

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} \left[ \frac{\rho\omega^2}{2\mu} r^2 - \lambda_m^2 r^2 - i\lambda_m r + 1 \right]. \quad (2.63)$$

В свою чергу формула для визначення теплового потоку, який виникає від дії одиничного точкового навантаження, має вигляд:

$$U_{k4}(r, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]. \quad (2.64)$$

Тепловий потік, який викликаний дією зосередженого теплового джерела:

$$T_{44}(r, \omega) = \frac{\partial U_{44}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} r \frac{\partial r}{\partial n} [(\lambda_2^2 - k_1^2)U_0(r, \omega, 2) - (\lambda_1^2 - k_1^2)U_0(r, \omega, 1)]. \quad (2.65)$$

Застосування для розв'язання задач термопружності МГІР є можливим, якщо відомими є вирази для фундаментальних розв'язків та їх узагальнених похідних. В еластостатиці встановлюються формули, які пов'язують переміщення  $u_i$  всередині тіла з переміщеннями і навантаженнями на його поверхні (границі). Ці формули мають назву теорем Соміліани-Гріна. В термопружності ці формули виражають переміщення  $u_i$  і температуру  $\theta$  всередині тіла через розподіл переміщень  $u_i$ , навантаження  $p_i$ , температури  $\theta$  і похідної від температури  $\theta_{,n}$  на поверхні тіла. При цьому використовуємо позначення:  $\Omega$  – область, яку займає тіло, що розглядається;  $\Gamma$  – границя області даного тіла:

$$\begin{aligned} u_k p + \int_{\Gamma} u_j(Q) T_{jk}(p, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q) U_{jk}(p, Q) d\Gamma = \\ = \frac{\gamma}{i\omega\eta} \left[ \int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{4k}(p, Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{44}(p, Q) d\Gamma \right], \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \theta(p) + \int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{44}(p, Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{44}(p, Q) d\Gamma = \\ = \frac{i\omega\eta}{\gamma} \left[ \int_{\Gamma} u_j(Q) T_{j4}(p, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q) U_{j4}(p, Q) d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Позначені в рівняннях точки є такими, що одна з них розміщена всередині розрахункової області (точка  $p$ ), а друга розміщена безпосередньо на границі знаходиться  $\Gamma$  (точка  $Q$ ).

$$\frac{\partial U_{4k}(r, \omega)}{\partial n} = \frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ n_k [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)] + r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} [U_2(r, \omega, 2) - U_2(r, \omega, 1)] \right\} \quad (2.68)$$

Якщо направити точку  $p$  до точки  $P$ , яка розташована на самій границі  $\Gamma$ , то в результаті будуть одержані ГР відносно незаданих граничними умовами функцій. У випадку, коли ця точка  $P$  знаходиться на гладкій ділянці границі, ГР будуть виглядати таким чином:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_k(P) + \int_{\Gamma} u_j(Q) T_{jk}(P, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q) U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \\ & = \frac{\gamma}{i\omega\eta} \left[ \int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{44}(P, Q) d\Gamma \right], \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \theta(P) + \int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{44}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{44}(P, Q) d\Gamma = \\ & = \frac{i\omega\eta}{\gamma} \left[ \int_{\Gamma} u_j(Q) T_{j4}(P, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q) U_{j4}(P, Q) d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Дані ГР, одержані завдяки математичним перетворенням, представляють собою алгоритмічну основу для дослідження та вирішення динамічних задач термопружності у випадку коливань масивних тіл. В цих рівняннях присутні інтеграли, кожен з яких є сингулярним і таким, що розуміється за Коші.

## 2.5. Рівняння рівноваги для динамічної гармонічної поропружності

Система рівнянь рівноваги (2.19)-(2.20) у випадку поширення гармонічних хвиль для лінійної динамічної поропружності має вигляд [40]:

$$\tau_{ij,j} + X_i = -\omega^2(\rho_{11}u_i + \rho_{12}U_i) + i\omega b(u_i - U_i), \quad (2.71)$$

$$\tau_{,i} + X'_i = -\omega^2(\rho_{12}u_i + \rho_{22}U_i) - i\omega b(u_i - U_i), \quad (2.72)$$

Інтегральні вирази для  $u_i$  отримуються підстановкою фундаментальних розв'язків, отриманих з наступних виразів для об'ємних сил:

$$X_i^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta_{ij}, \quad X_i'^* = 0, \quad (2.73)$$

де  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  – дельта функція Дірака;  $\boldsymbol{\xi}$  – точка прикладання дельта функції;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Маємо:

$$c_{ij}u_i + \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_j^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega} (X_i u_i^* - X_i' U_{ij}^*) d\Omega, \quad (2.74)$$

де  $i, j=1, 2, 3$  для тривимірної задачі, 1, 2 для плоскої (індекс  $j$  визначає рядок фундаментального розв'язку);  $c_{ij}=\delta_{ij}$  для точок всередині тіла  $\Omega$ ,  $c_{ij}=0$  для точок ззовні,  $c_{ij}=0,5\delta_{ij}$  для граничних точок у випадку, коли границя є гладкою,  $\mathbf{n}$  – нормаль до границі, символом \* позначені фундаментальні розв'язки.

Для отримання інтегральних виразів для напружень в рідині використовуються фундаментальні розв'язки, які відповідають наступним об'ємним силам:



$$X_i^* = \left[ \frac{1}{2\pi} \ln r \right]_{,i} \quad \text{для 2-D,} \quad (2.75)$$

$$X_i^* = \left[ \frac{-1}{4\pi r} \right]_{,i} \quad \text{для 3-D,} \quad (2.76)$$

$$X_i^* = \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} X_i^*, \quad (2.77)$$

де  $r$  – відстань до точки  $\zeta$ , біля якої представлені напруження в рідині. У цьому випадку сили в обох фазах існують одночасно.

Оскільки переміщення в рідині задаються співвідношенням (2.18) і приймаючи до уваги, що

$$X_{i,i}^* = \delta(x - \zeta), \quad (2.78)$$

отримуємо інтегральний вираз для напружень в рідині:

$$\begin{aligned} & \frac{c\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} + \int_{\Gamma} (t_{ij}^* u_i + \tau_j^* U_n) d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ t_i u_{ij}^* + \tau \left( U_{nj}^* + \frac{X_i^* n_i}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \right) \right] d\Gamma + . \\ & + \int_{\Omega} \left[ X_i u_{ij}^* + X_i' \left( U_{ij}^* + \frac{X_i^*}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.79)$$

Індекс  $j$  відповідає тут фундаментальному розв'язку, який відповідає другому типу об'ємних сил. Об'ємні сили  $X_i^*$  прикладені до твердої фази для зрівноваження безпосередньої об'ємних сил, прикладених до рідини, та передаються на тверду речовину шляхом дисипації. Ці сили є такими, що загальна сума сил у рівнянні стає нульовою.

Рівняння (2.77) і (2.79) є ГІР поропружності. Об'ємні інтеграли в цих виразах включають лише масові сили та фундаментальні розв'язки.

## 2.6. Фундаментальні розв'язки для гармонічної поропружності

Під дією нульових об'ємних сил інтегральні рівняння (2.77) і (2.79) можна записати:

$$c_{ij}u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_j^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{nj}^* d\Gamma, \quad (2.80)$$

$$\int_{\Gamma} t_{i3}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_3^* U_n d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{i3}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau (U_{n3}^* - JX_i^* n_i) d\Gamma + Jc_{33}\tau, \quad (2.81)$$

де коефіцієнт  $J$  визначається:

$$J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}. \quad (2.82)$$

У векторному вигляді система має вигляд:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma, \quad (2.83)$$

де  $u$  і  $p$  – вектори полів змінних переміщень та напружень відповідно:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tau \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ U_n \end{bmatrix},$$

а  $p^*$  і  $u^*$  тензори фундаментальних розв'язків:

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* & -\tau_1^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* & -\tau_2^* \\ u_{13}^* & u_{23}^* & -\tau_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}^* & \psi_{21}^* & -\psi_1^* \\ \psi_{12}^* & \psi_{22}^* & -\psi_2^* \\ \psi_{13}^* & \psi_{23}^* & -\psi_3^* \end{bmatrix},$$

$$p^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{21}^* & -U_{n1}^* \\ t_{12}^* & t_{22}^* & -U_{n2}^* \\ t_{13}^* & t_{23}^* & -\hat{U}_{n3}^* \end{bmatrix},$$

де введені позначення:

$$Z = \frac{J}{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}, \quad (2.84)$$

$$c^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -J \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

для гладких ділянок границі.

Фундаментальні розв'язки поропружності є аналогічними до розв'язків термопружності, отриманих при  $F_i = \delta(\mathbf{x}-\xi)\delta_{ij}$ ,  $S/\kappa=0$  і для  $F_i=0$ ,  $S/\kappa= \delta(\mathbf{x}-\xi)\delta_{ij}$ . Використовуючи фундаментальні розв'язки для термопружності з тривимірною частотною областю, надані В.Д.Купрадзе [202], та аналогію із таблиці 2.1, Дж.Домінгез [40] отримав фундаментальні розв'язки для двовимірної поропружності:

$$\psi_{kj}^* = \sum_{m=1}^3 \left\{ A_{kjm} \mathbf{K}_0(i\lambda_m r) + \left( B_{kjm} r_{\gamma j} + C_{kjm} r_{\gamma k} + D_{kjm} \frac{1}{r} \right) \mathbf{K}_1(i\lambda_m r) + E_{kjm} r_{\gamma k} r_{\gamma j} \mathbf{K}_2(i\lambda_m r) \right\}, \quad (2.86)$$

де  $K_1$  і  $K_2$  – модифіковані функції Бесселя другого роду першого та другого порядку відповідно:

$$\begin{aligned}
 A_{kjm} &= (1 - \delta_{k3})(1 - \delta_{j3}) \frac{\delta_{kj} \delta_{3m}}{2\pi\mu} + c_m \delta_{k3} \delta_{j3}, \\
 B_{kjm} &= \lambda_m b_m \omega \eta \delta_{k3} (1 - \delta_{j3}), \\
 C_{kjm} &= i \lambda_m b_m \gamma \delta_{j3} (1 - \delta_{k3}), \\
 D_{kjm} &= i \lambda_m a_m \delta_{kj} (1 - \delta_{k3}) (1 - \delta_{j3}), \\
 E_{kjm} &= \lambda_m^2 a_m (1 - \delta_{k3}) (1 - \delta_{j3}).
 \end{aligned}$$

$$a_1(\omega) = \frac{-1 - i\omega / K\lambda_1^2}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)}, \quad a_2(\omega) = \frac{1 + i\omega / K\lambda_2^2}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)}, \quad a_3(\omega) = \frac{-1}{2\pi\rho\omega^2};$$

$$b_1(\omega) = \frac{-1}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)}, \quad b_2(\omega) = \frac{1}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)}, \quad b_3(\omega) = 0;$$

$$b_1(\omega) = \frac{\frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)} - \lambda_1^2}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad b_2(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)}}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad c_3(\omega) = 0;$$

$$K(\omega) = \frac{R}{b + i\omega\rho_{22}}.$$

В гармонічній поропружності  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – це хвильові числа двох видів поздовжньої хвилі, в той час як  $\lambda_3$  є хвильовим числом поперечної хвилі. Аналізуючи фундаментальні розв'язки можна зауважити, що три види хвиль виникають тоді, коли навантаження прикладене до точки в твердій речовині, в той час як поперечна хвиля не виникає у випадку, коли навантаження у вигляді тиску прикладене до рідкої фази. Фундаментальний розв'язок також показує, що не може існувати тиск в рідині при поширенні поперечної хвилі.

Коли переміщення в твердій речовині та тиск в рідині, які відповідають фундаментальним розв'язкам, є відомими можна визначити граничні напруження, користуючись співвідношеннями (2.13-2.14).

Враховуючи, що індекс  $j$  визначає  $j$ -ий рядок фундаментального розв'язку і те, що  $\alpha=1, 2$  і  $\beta=1, 2$ , отримуємо:

$$t_{\alpha j}^* = \left( \lambda e_j^* + \frac{Q}{R} \psi_{3j} \right) n_\alpha + 2\mu e_{\alpha j}^*, \quad (2.87)$$

$$e_{\alpha j}^* = e_{\alpha\beta j}^* n_\beta,$$

$$e_{\alpha\beta j}^* = \frac{1}{2} (\psi_{\alpha j, \beta} + \psi_{\beta j, \alpha}),$$

$$e_j^* = e_{\alpha\alpha j}^*.$$

Нормальні переміщення в рідині:

$$U_{nj}^* = U_{\alpha j}^* n_\alpha = J \left( \psi_{3j, \alpha}^* + \frac{1}{2\pi} \frac{r_{, \alpha}}{r} \right) n_\alpha + Z \psi_{\alpha j} n_\alpha. \quad (2.88)$$

Після чого отримуємо:

$$\begin{aligned} U_{n1}^* &= J \tau_{1, \alpha}^* + Z u_{\alpha 1}^* n_\alpha \\ U_{n2}^* &= J \tau_{2, \alpha}^* + Z u_{\alpha 2}^* n_\alpha, \\ \hat{U}_{n3}^* &= J \tau_{3, \alpha}^* + Z u_{\alpha 3}^* n_\alpha \end{aligned} \quad (2.90)$$

Для тривимірної поропружності матриця фундаментальних розв'язків, використовуючи аналогію з термопружністю, може бути представлена у вигляді сукупності чотирьох частин, які записуються наступним чином:

– переміщення в напрямі  $x_k$  осі точок пружного простору від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі  $x_j$ :

$$U_{jk}^*(r, \omega) = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 a_m(\omega) [\delta_{jk} U_0(r, \omega, m) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m)], \quad k, j, l=1, 2, 3 \quad (2.92)$$

де  $U_0$  і  $U_2$  визначаються за допомогою виразів (2.50) і (2.51),  $r$  – це відстань між точкою, в якій визначається переміщення, та точкою, де діє зосереджена сила,

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - k_1^2}{4\pi\rho^* \omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad (2.93)$$

$$\alpha_2(\omega) = \frac{k_1^2 - \lambda_1^2}{4\pi\rho^* \omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad (2.94)$$

$$\alpha_3(\omega) = -\frac{1}{4\pi\rho^* \omega^2}, \quad (2.95)$$

$$k_1^2(\omega) = -\frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad (2.96)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega\eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*}, \quad (2.97)$$

$$\lambda_3^2(\omega) = -\frac{\rho^* \omega^2}{\mu}; \quad (2.98)$$

– напруження в рідині, яке виникає від дії тієї ж одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі  $x_j$ :

$$U_{4k}(r, \omega) = \frac{i\omega\eta^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)]; \quad (2.99)$$

– переміщення в напрямі  $x_k$  осі точок пружного простору від дії масових сил  $X_i^*$  та  $X_i^*$  що прикладені до рідкого заповнювача та пружного скелету, відповідно, та визначені в (2.76), (2.77) для 3-D випадку:

$$U_{j4}(r, \omega) = \frac{\gamma^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,j} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]; \quad (2.100)$$

— напруження в рідині, спричинене прикладеними до рідкого заповнювача та пружного каркасу масовими силами  $X_i^*$  та  $X_i^*$ :

$$U_{44}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)r} [(\lambda_2^2 - k_1^2)e^{i\lambda_2(\omega)r} - (\lambda_1^2 - k_1^2)e^{i\lambda_1(\omega)r}]. \quad (2.101)$$

Користуючись формулою для напружень на площинці з компонентами нормалі  $\mathbf{n}$ :

$$t_{ij} = \sigma_{ij} n_j = n_i \left( \lambda u_{k,k} + \frac{Q}{R} \tau \right) + n_j (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.102)$$

а також виразом для переміщень в рідині, можемо отримати:

— напруження на площинці з нормаллю  $\mathbf{n}$  від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі  $x_k$ :

$$\begin{aligned} T_{jk}(r, \omega) = & \frac{1}{4\pi} \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right) r \cdot U_0(r, \omega, 3) + \\ & + \sum_{m=1}^3 \left( \lambda \lambda_m^2 \alpha_m - i \omega \gamma^* \frac{Q}{R} \beta_m \right) r r_{,k} n_j U_0(r, \lambda_m) - \\ & - 2\mu \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right) \frac{1}{r} U_2(r, \lambda_m) - \sum_{m=1}^3 \alpha_m r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} T_3(r, \lambda_m) \right\} \end{aligned} \quad (2.103)$$

— нормальне переміщення в рідині від дії одиничної зосередженої сили, прикладеної до пружного каркасу вздовж осі  $x_k$ :

$$T_{4k}(r, \omega) = \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12})U_{jk}n_j - \frac{\partial U_{4k}}{\partial n}}{(i\omega b + \omega^2 \rho_{22})}, \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{4k}(r, \omega)}{\partial n} = & \frac{i\omega\eta^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \{n_k[U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)] + \\ & + r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]\} \end{aligned} \quad ; \quad (2.105)$$

— напруження в каркасі на площинці з нормаллю  $\mathbf{n}$  від дії масових сил, що прикладені до рідкого заповнювача  $X_i'^*$  та пружного скелету  $X_i^*$ :

$$\begin{aligned} T_{jk}(r, \omega) = & \frac{1}{4\pi} \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right) r \cdot U_0(r, \omega, 3) + \\ & + \sum_{m=1}^3 \left( \lambda \lambda_m^2 \alpha_m - i\omega\gamma^* \frac{Q}{R} \beta_m \right) r r_{,k} n_j U_0(r, \lambda_m) - \\ & - 2\mu \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right) \frac{1}{r} U_2(r, \lambda_m) - \sum_{m=1}^3 \alpha_m r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} T_3(r, \lambda_m) \right\} \\ & A(r, \omega, m) = \lambda_m^2 (R\gamma^* \lambda - Q\lambda - 2Q\mu) + Q\rho^* \omega^2 \end{aligned} \quad ;(2.106)$$

— нормальне переміщення в рідині, спричинене прикладеними до тіла масовими силами  $X_i'^*$  та  $X_i^*$ :

$$T_{44}(r, \omega) = \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12})U_{j4}n_j - \frac{\partial U_{44}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}}{(i\omega b + \omega^2 \rho_{22})}, \quad (2.107)$$



де величина  $\partial U_{44}/\partial n$  визначається за допомогою виразу (2.65).

## 2.7. Висновки за розділом

У другому розділі представлена в загальному вигляді постановка динамічної задачі поропружності. НДС пористих насичених тіл визначаються переміщеннями та напруженнями в пружному каркасі та рідині, які представлені в векторній формі. Ці вихідні параметри визначаються рівняннями лінійної динамічної поропружності, які складаються з рівнянь закону Гука та рівнянь загального середовища.

Представлені ГР тривимірної термо- та поропружності, які базуються на узагальнених формулах Соміліани-Гріна. Наведені вирази для компонент матриці фундаментальних розв'язків тривимірної лінійної динамічної поропружності. Виведені співвідношення узагальненої похідної фундаментальних розв'язків, що є компонентами представлених ГР.

### РОЗДІЛ 3.

## РОЗРОБКА ПІДХОДУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОРИСТИХ ТІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 3.1. Порівняння значень параметрів напружено-деформованого стану точок границі кругового отвору в пружному та поропружному середовищах при розповсюдженні циліндричних хвиль

При виконанні робіт з проектування та розрахунку споруд та конструкцій важливим є використання більш складних моделей матеріалів для реалістичнішого представлення поведінки та роботи конструкцій. В зв'язку з тим, що велика кількість будівельних матеріалів містить у своїй структурі пори, поширеними є моделі поропружного середовища, які враховують цю особливість, але водночас до них можна застосовувати гіпотезу про суцільність [38, 161, 67].

Розглянемо задачу поширення хвиль в пористому насиченому середовищі, що представляє собою нескінченний простір з порожниною кругового перерізу із заданим на границі отвору радіальним навантаженням.

В якості вихідних даних взяті параметри матеріалу, притаманні піщанику (Berea sandstone) [38]: константи Ляме  $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{Па}$ ,  $\mu=6 \cdot 10^9 \text{Па}$ ; коефіцієнт дисипації  $b=0.19 \cdot 10^9 \text{кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ , ефективні щільності середовища  $\rho_{11}=2418 \text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{22}=340 \text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{12}=-150 \text{кг}/\text{м}^3$ .

Система рівнянь рівноваги, за допомогою яких можна описати усталені гармонічні коливання двофазного поропружного середовища, має наступний вигляд:

$$\mu u_{j \rightarrow kk} + (\lambda + \mu) u_{k \rightarrow kj} + \rho^* \omega^2 u_j - \gamma^* \tau_{,j} = 0, \quad (3.1)$$

$$\tau_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa^*} \tau + i\omega\eta^* \dot{u}_{k,k} = 0, \quad (3.2)$$

Фізичні співвідношення поропружності між напруженнями та деформаціями задаються виразами (2.13), (2.14):

Можна спостерігати певну схожість між диференціальними рівняннями (3.1), (3.2) та диференціальними співвідношеннями, які застосовуються для опису усталених коливань однорідного термопружного простору для випадку, коли внутрішні теплові джерела відсутні:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho \omega^2 u_j - \gamma \theta_{,j} = 0, \quad (3.4)$$

$$\theta_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa} \theta + i\omega\eta u_{k,k} = 0, \quad (3.5)$$

де  $\gamma = 3K\alpha_t$ ,  $K$  – модуль об'ємного стиснення:

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}.$$

Не зважаючи на дану подібність, застосовувати точні розв'язки задач термопружності із заміною певних величин:  $\rho$  на  $\rho^*$ ,  $\gamma$  на  $\gamma^*$ ,  $\kappa$  на  $\kappa^*$ ,  $\eta$  на  $\eta^*$  не є коректним в зв'язку з тим, що фізичні вирази термопружності (2.27) суттєво відмінні від рівності (2.13).

Хоча при розгляді задачі про розповсюдження циліндричних хвиль від кругової порожнини в поропружному просторі є можливість скористатись методикою та певними результатами, наведеними в [191].

Завдяки розкладу вектора переміщень на потенціальну та соленоїдальну частини отримуємо:

$$u_j = \Phi_{,j} + \epsilon_{jkl} \psi_{l,k}, \quad (3.6)$$

де  $\epsilon_{jkl}$  – тензор Леві-Чивіти, тобто антисиметричний тензор, якому притаманні такі особливості: у випадку коли два індекси рівні ( $\epsilon_{112}, \epsilon_{223}, \epsilon_{333}$ ), то  $\epsilon_{jkl} = 0$ ; коли  $jkl$  є парною перестановкою чисел 1, 2, 3 ( $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312}$ ), то  $\epsilon_{jkl} = 1$ ; коли  $jkl$  є непарною перестановкою чисел 1, 2, 3 ( $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321}$ ), то  $\epsilon_{jkl} = -1$ .

Як результат маємо рівності:

$$\Delta\Phi + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Phi = \frac{\gamma^*}{\lambda + 2\mu} p, \quad (3.7)$$

$$\Delta\psi + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \psi = 0, \quad (3.8)$$

$$\Delta p + \frac{i\omega}{\kappa^*} p + i\omega\eta^* \Delta\Phi = 0, \quad (3.9)$$

де  $\Delta$  - оператор Лапласа ( $\Delta = \Delta\Phi = \Phi_{,kk}$ ).

НДС при поширенні циліндричних хвиль від кругового отвору є осесиметричним, а тому є залежним лише від радіальної координати:  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ . Маємо:

$$\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad \psi = 0, \quad u_r = \frac{d\Phi}{dr}.$$

Якщо з рівняння (3.7) вивести величину  $p$  з використанням значення потенціалу  $\Phi$  та підставити у рівність (3.9), то можна одержати одне диференціальне рівняння:

$$\left[ \Delta\Delta + \left( \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega\eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu} \right) \Delta + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*} \right] \Phi = 0, \quad (3.10)$$

або

$$(\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)\Phi = 0. \quad (3.11)$$

Тут значення  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  у випадку поропружності повинні відповідати рівностям (2.97).

Розв'язок рівняння (3.9) розшукується у виді:

$$\Phi(r) = A_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r) + A_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r), \quad (3.12)$$

також:

$$u_r = \frac{d\Phi}{dr} = -[A_1 \lambda_1 H_1^{(1)}(\lambda_1 r) + A_2 \lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 r)], \quad (3.13)$$

де  $H_k^{(1)}$  - функція Ганкеля 1-го роду порядку  $k$ , а значення  $A_1$  і  $A_2$  можна знайти з використанням граничних умов.

З використанням рівняння (3.7) знаходяться вирази для напружень в рідині:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma^*} \Delta\Phi + \frac{\rho^* \omega^2}{\gamma^*} \Phi = \\ &= \frac{A_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r)}{\gamma^*} [\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu)\lambda_1^2] + \frac{A_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r)}{\gamma^*} [\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu)\lambda_2^2], \end{aligned} \quad (3.14)$$

та для напружень в пружному скелеті:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \lambda \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{Q}{R} \tau = \\ &= A_1 \lambda_1 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{r} - (\lambda + 2\mu) \lambda_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r) \right] + \\ &+ A_2 \lambda_2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{r} - (\lambda + 2\mu) \lambda_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r) \right] + \frac{Q}{R} \tau \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \lambda \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{Q}{R} \tau = \\
&= -A_1 \lambda_1^2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_1 r) \right] - \\
&\quad - A_2 \lambda_2^2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} - \lambda H_0^{(1)}(\lambda_2 r) \right] + \frac{Q}{R} \tau
\end{aligned} \tag{3.16}$$

А з застосуванням виразу (2.18) визначається рівність для переміщень в рідині:

$$\begin{aligned}
U_r &= \frac{u_r (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - \frac{d\tau}{dr}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} = \\
&= \frac{A_1 \lambda_1 H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[ \frac{\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_1^2}{\gamma^*} - (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) \right] + \\
&\quad + \frac{A_2 \lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[ \frac{\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_2^2}{\gamma^*} - (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Вищенаведені величини є параметрами осесиметричного НДС поропружної задачі

Розглянемо випадок, коли на границі порожнини, яка має радіус  $a$ , задаються такі граничні умови:

$$\sigma_{rr} |_{r=a} = -q_0, \quad \tau = 0. \tag{3.18}$$

Відповідно тиск, який прикладений, сприймає лише пружний скелет. Тоді, відповідно, з використанням виразів (3.14), (3.15) маємо вирази для констант:

$$A_1 = -q_0 \frac{(k_1^2 - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a)}{(k_1^2 - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a) g_1 - (k_1^2 - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a) g_2}, \tag{3.19}$$

$$A_2 = q_0 \frac{(k_1^2 - \lambda_1^2)H_0^{(1)}(\lambda_1 a)}{(k_1^2 - \lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)g_1 - (k_1^2 - \lambda_1^2)H_0^{(1)}(\lambda_1 a)g_2}, \quad (3.20)$$

де для поропружності:

$$g_\alpha = \lambda_\alpha^2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_\alpha a)}{\lambda_\alpha a} + (\lambda + 2\mu)H_0^{(1)}(\lambda_\alpha a) \right], \quad \alpha=1, 2.$$

При виконанні чисельних обчислень почала спостерігатись закономірність: разом із збільшенням значення частоти коливань  $\omega$  доволі швидко збільшувалось значення модуля комплексного параметра  $\lambda$ . Це призвело до того, що значення величин  $H_0^{(1)}(\lambda_1 a)$  і  $H_1^{(1)}(\lambda_1 a)$  стали практично нульовими. І, відповідно, значення знаменників виразів (3.19), (3.20) також наблизились до нуля, від чого постраждала точність розрахунку даної задачі.

Щоб побороти цю перепону був використаний підхід, при якому при обрахунку граничних значень переміщень та напружень чисельник і знаменник виразів для  $u_r$  і  $\sigma_{\theta\theta}$  одночасно ділились на  $H_1^{(1)}(\lambda_1 a)$ . Зважаючи на співвідношення (3.13), (3.16) та задані граничні умови, було отримано в результаті:

$$u_r|_{r=a} = q_0 \frac{(k_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1 H_0^{(1)}(\lambda_2 a) - (k_1^2 - \lambda_1^2)\lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 a)B(\lambda_1 a)}{(k_1^2 - \lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)f - (k_1^2 - \lambda_1^2)B(\lambda_1 a)g_2}, \quad (3.21)$$

$$B(\lambda_1 a) = \frac{H_0^{(1)}(\lambda_1 a)}{H_1^{(1)}(\lambda_1 a)},$$

$$f = \lambda_1^2 \left[ \frac{2\mu}{\lambda_1 a} - (\lambda + 2\mu)B(\lambda_1 a) \right].$$

Вираз для обчислення нормальних тангенціальних напружень приймав наступний вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = q_0 \frac{(k_1^2 - \lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)\lambda_1^2 h_1 - (k_1^2 - \lambda_1^2)B(\lambda_1 a)\lambda_2^2 h_2}{(k_1^2 - \lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)f_1 - (k_1^2 - \lambda_1^2)B(\lambda_1 a)g_2}, \quad (3.22)$$

$$h_1 = \frac{2}{\lambda_1 a} + \lambda B(\lambda_1 a),$$

$$h_2 = \frac{2}{\lambda_2 a} + H_1^{(1)}(\lambda_2 a) + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_2 a).$$

Щоб визначити значення функції  $B(t)$  у випадку немалих значень аргументу можна використати наближеними формули для модифікованих функцій Бесселя з [200]:

$$K_n(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right], \quad (3.23)$$

$$\mu = 4n^2.$$

Зважаючи на те, що функції Ганкеля співвідносяться з модифікованими функціями Бесселя:

$$H_0^{(1)}(t) = -\frac{2i}{\pi} K_0(-it),$$

$$H_1^{(1)}(t) = -\frac{2}{\pi} K_1(-it),$$

та при утриманні перших п'яти членів в розвиненні (3.23), одержуємо в результаті:

$$B(\lambda_1 a) = \frac{iK_0(s)}{K_1(s)} \approx i \frac{32s\{8s[9-16s(1-8s)]-75\}+3675}{32s\{8s[16s(3+8s)-15]+105\}-4725}, \quad (3.24)$$

$$s = -i\lambda_1 a.$$



На рисунках 3.1, 3.2 представлені результати розрахунку граничних нормованих значень параметрів НДС  $u_r \mu / a q_0$  та  $\sigma_{\theta\theta} / q_0$  за допомогою виразів (3.21) і (3.22) при різних значеннях частоти коливань  $\omega$ .

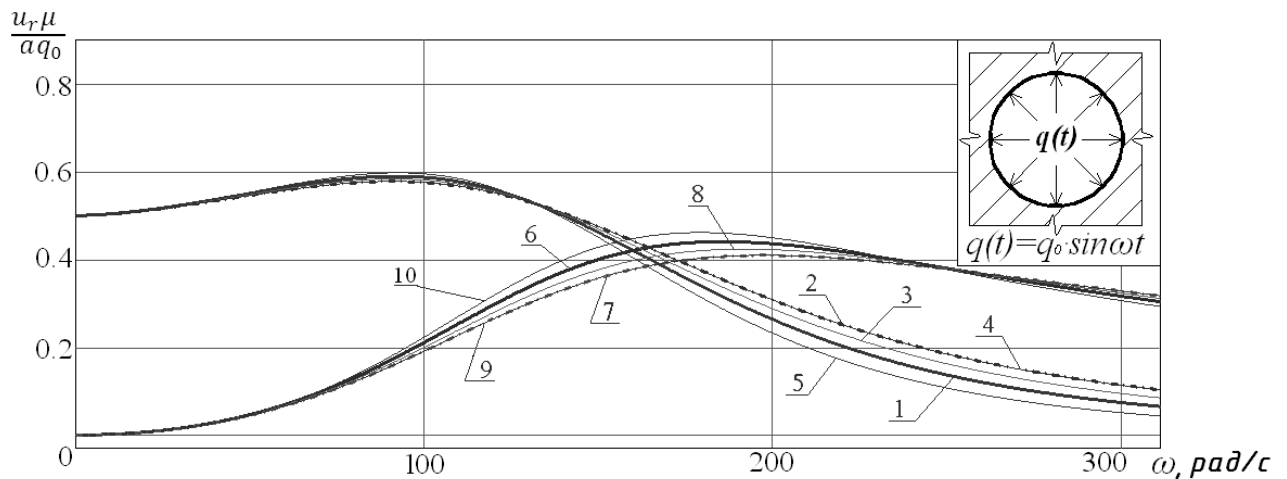


Рис. 3.1. Нормовані радіальні переміщення точок границі.

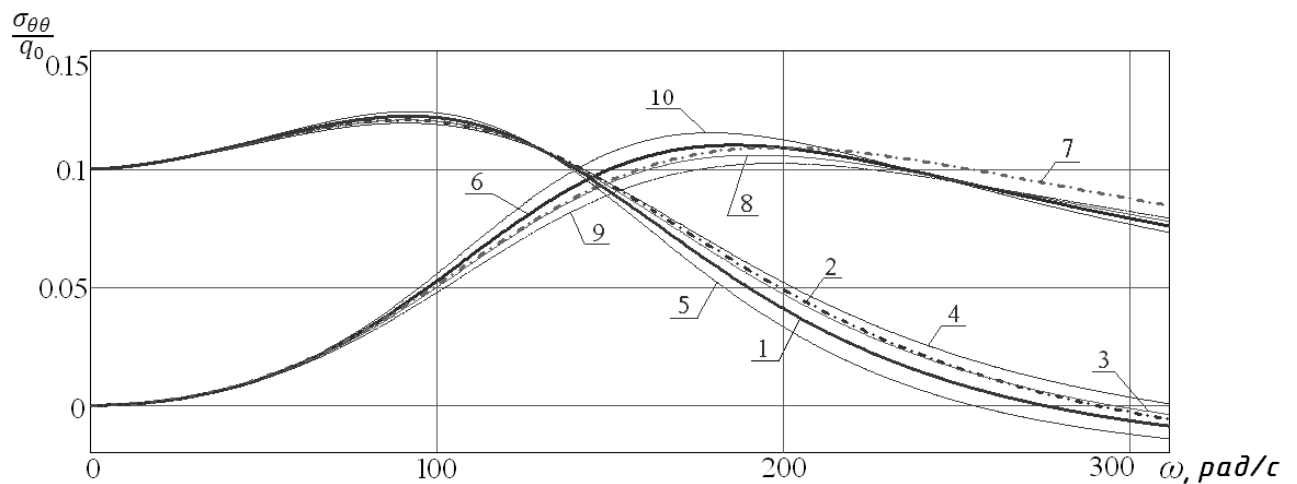


Рис. 3.2. Нормовані тангенціальні нормальні напруження на границі отвору.

На даних рисунках числа 1 і 6 позначають криві дійсних і уявних частин відповідних параметрів НДС, які обраховані при значеннях поропружних параметрів:  $\beta=0,19$ ,  $Q/R=0,32$ . Цифри 2 і 7 позначають графіки для відповідних параметрів НДС пружної області без наявності пор. Числа 3 і 8 визначають графіки зі значеннями, які обраховані при  $\beta=0,1$ ,  $Q/R=5$ , а числа 4 і 9 – при

$\beta=0,01$ ,  $Q/R=0,800$ . Позначення 5 і 10 введені для кривих, які одержані при значеннях параметрів  $\beta=0,4$ ,  $Q/R=0,32$ .

З графіків видно, що найбільші розбіжності між значеннями для пружної та поропружної областей припадають на максимуми кривих, а саме діапазоні частот  $140\div 200$  рад/с для дійсних частин та  $180\div 280$  рад/с для уявних частин. Змінюючи значення певних параметрів середовища криві для поропружної області можна наближати до аналогічних для пружної

### **3.2. Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності рівнянь рівноваги теорії термопружності**

Під час тривалого експлуатування будівельних та інших інженерних споруд нерідко відбувається одночасне завантаження елементів тривалими та значними по величині температурними і силовими навантаженнями. Якщо нагрівання або охолодження відбувається протягом сувимірного періоду часу, тобто з власним періодом коливань за першою формою, це приводить до взаємодії силових та температурних полів і, як результат, отримуємо зв'язану задачу термопружності. Такого типу динамічні задачі в загальному виді, зазвичай, розв'язуються чисельно, окрім певних винятків. МГЕ в основній кількості наукових праць використовується при розгляді незв'язаних коливань [104, 103, 88], хоч є певні роботи з дослідженням зв'язаної термопружності. В певних працях температурне навантаження представлене рівномірно розподіленням по об'єму тіла і обрахування об'ємних інтегралів виконується з використанням алгоритму двоїстого взаємного МГЕ, який також називається DRBEM [69, 70, 54], або ж відповідного йому RIBEM [47]. Застосування такого процесу розрахунку призводить до додаткових похибок апроксимації, хоч і робить математичні вирази простішими. Поряд інших роботах при застосуванні МГЕ приймаються фундаментальні розв'язки зв'язаної задачі [114, 109, 141]. Вирази для таких фундаментальних розв'язків (для двовимірної задачі в [40] і для тривимірної в [202]) мають певну особливість, а саме: в знаменнику містять

відстань між джерелом і точкою спостереження  $r$  у високому степені, що сприяє ускладненню процесу розрахунку сингулярних інтегралів, які містять ці розв'язки. Тому необхідно знаходити шляхи, щоб обійти цю перепону.

Процес розрахунку будь-якої задачі з використанням МГЕ відбувається, зазвичай, із розділом поверхні розрахункової області  $\Gamma$  на певну кількість  $N$  елементів  $(\Delta_n)$ , які мають задану геометрію та є доволі малими, і тому приймається, що в межах кожного з них шукані функції змінюються за наперед заданим законом.

Система ГІР термопружності, які описують тривимірні гармонічні зв'язані коливань, задається виразами (2.69), (2.70). У випадку якщо  $Q \notin \Delta_n$ , то інтеграли в системі рівнянь є регулярними і їх можна обрахувати за кубатурними формулами. Але з врахуванням того, що у задачі тривимірних термопружних коливань вирази для компонент фундаментальних розв'язків  $U_0$ ,  $U_2$  та їх узагальненої похідної  $T_3$ ,  $T_0$  мають величини  $r^3$  та  $r^4$  у знаменниках, проводити процедуру безпосереднього чисельного інтегрування рівностей (2.50), (2.51), (2.60), (2.63) та виразу:

$$\frac{U_2}{r}(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4} [3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2] \quad (3.25)$$

по граничним елементам, з розміщеним на них полюсом, не є можливим. Тому варто застосувати для подальшого розв'язку задачі розклад даних величин в ряд Маклорена по аналогії з [140]. Після чого можемо одержати:

$$U_0(r, \omega, m) = -\frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot r^{(n-2)}}{(n+1)!}, \quad (3.26)$$

$$U_2(r, \omega, m) = \frac{3}{r^3} + \frac{\lambda_m^2(\omega)}{2r} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+3)} \frac{n \cdot r^n}{(n+1)!(n+3)}, \quad (3.27)$$

$$T_3(r, \omega, m) = -\frac{15}{r^4} - 1,5 \frac{\lambda_m^2(\omega)}{r^2} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega)r)^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1)!(n+3)}, \quad (3.28)$$

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega)r)^{(n+1)} \cdot r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + \\ + 0,5\lambda_3^2(\omega) \left[ \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^n \cdot \frac{r^{n-1}}{n!} \right]. \quad (3.29)$$

Формули (3.26)- (3.28) також мають  $r^3$  і  $r^4$  у своїх знаменниках, але у виразах для фундаментальних розв'язків кожна з наведених величин множиться на  $\alpha_m(\omega)$  при  $m=1,2,3$ , тому в результаті три добутки складаються (з врахуванням, що  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ ). Відповідно, отримуємо:

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot r^{(n-2)}}{(n+1)!}, \quad (3.30)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot (n-2) \cdot r^{n-2}}{(n+1)!}, \quad (3.31)$$

$$U_{kj}(r, \omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot r^{n-2}}{(n+1)!} [\delta_{kj} + (n-2)r_{,j} r_{,k}], \quad (3.32)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot r^{n-3}}{(n+1)!}. \quad (3.33)$$

У отриманих рівностях (3.30)-(3.32) величина  $r$  знаходиться в знаменниках не вищому за перший степінь, а у (3.33) не вищому, ніж другий. Це означає, що сингулярність цих співвідношень відповідає особливостям відповідних ядер задачі статики, а інтегрування не буде проблемним.

Результат розвитку виразу для компоненти  $T_0$  має у знаменнику величину  $r^3$ , але у виразі (2.62) міститься різниця  $[T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$ , тому до складу рівнянь буде входити її наступний розвиток:

$$T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1) = \sum_{n=1}^N [(i\lambda_1(\omega)r)^{(n+1)} - (i\lambda_2(\omega)r)^{(n+1)}] \cdot r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + \\ + 0.5(\lambda_3(\omega))^2 \sum_{n=1}^N [(i\lambda_1(\omega))^n - (i\lambda_2(\omega))^n] \cdot r^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \quad (3.34)$$

Результати обчислень значень безрозмірних величин  $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$ ,  $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m)$ ,  $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m)$ ,  $r^3 [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$  за допомогою точних виразів (2.50), (2.51), (2.60), (2.63) та за допомогою отриманих наближених формул (3.30), (3.31), (3.33), (3.34) при різній кількості членів ряду і різних значеннях безрозмірного параметра частоти  $\omega r / C_2$  представлені в таблицях 3.1-3.4.

Таблиця 3.1 – Результати обчислень величини  $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$  за формулами (2.50) та (3.30)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(2.50)	(3.30) M=4	(3.30) M=8	(3.30) M=12	(2.50)	(3.30) M=4	(3.30) M=8	(3.30) M=12
0.4	0.053	0.053	0.053	0.053	0.0086	0.0086	0.0086	0.0086
1.2	0.047	0.047	0.047	0.047	0.025	0.026	0.025	0.025
2	0.037	0.036	0.037	0.037	0.038	0.043	0.038	0.038
2.8	0.023	0.019	0.023	0.023	0.048	0.06	0.048	0.048
3.6	0.0063	-0.004	0.0063	0.0063	0.052	0.078	0.052	0.052
4	-0.002	-0.018	-0.002	-0.002	0.0519	0.0862	0.0523	0.0519
4.4	-0.01	-0.032	-0.011	-0.011	0.051	0.095	0.051	0.051
5.2	-0.025	-0.067	-0.026	-0.025	0.044	0.112	0.047	0.044
6	-0.037	-0.106	-0.04	-0.037	0.033	0.129	0.04	0.033
6.8	-0.045	-0.152	-0.051	-0.045	0.019	0.147	0.035	0.019
7.6	-0.048	-0.203	-0.063	-0.048	0.0037	0.164	0.038	0.0045
8	-0.047	-0.231	-0.07	-0.048	-0.004	0.172	0.044	-0.0028

Таблиця 3.2 – Результати обчислень величини  $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m)$  за формулами (2.51) та (3.31)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(2.51)	(3.31) M=4	(3.31) M=8	(3.31) M=12	(2.51)	(3.31) M=4	(3.31) M=8	(3.31) M=12
0.4	-0.054	-0.054	-0.054	-0.054	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$
1.2	-0.06	-0.06	-0.06	-0.06	-0.0021	-0.0022	-0.0021	-0.0021
2	-0.068	-0.071	-0.068	-0.068	-0.0092	-0.0096	-0.0092	-0.0092
2.8	-0.077	-0.088	-0.077	-0.077	-0.024	-0.027	-0.024	-0.024
3.6	-0.082	-0.111	-0.082	-0.082	-0.045	-0.058	-0.045	-0.045
4	-0.081	-0.125	-0.082	-0.081	-0.058	-0.08	-0.059	-0.058
4.4	-0.079	-0.14	-0.08	-0.079	-0.073	-0.106	-0.073	-0.073
5.2	-0.064	-0.174	-0.07	-0.064	-0.102	-0.175	-0.104	-0.102
6	-0.038	-0.213	-0.05	-0.038	-0.128	-0.269	-0.134	-0.128
6.8	$6.6 \cdot 10^{-4}$	-0.259	-0.04	$7.3 \cdot 10^{-4}$	-0.147	-0.391	-0.164	-0.147
7.6	0.047	-0.31	-0.054	0.045	-0.151	-0.547	-0.197	-0.152
8	0.072	-0.338	-0.078	0.068	-0.148	-0.637	-0.22	-0.149

Таблиця 3.3 – Результати обчислень величини  $4\mu r^2 \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m)$  за формулами (2.60) та (3.33)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(2.60)	(3.33) M=4	(3.33) M=8	(3.33) M=12	(2.60)	(3.33) M=4	(3.33) M=8	(3.33) M=12
0.4	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$
1.2	-0.335	-0.334	-0.335	-0.335	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$7.1 \cdot 10^{-12}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$
2	-0.362	-0.357	-0.362	-0.362	-0.003	$1.2 \cdot 10^{-11}$	-0.003	-0.003
2.8	-0.41	-0.39	-0.41	-0.41	-0.014	$1.7 \cdot 10^{-11}$	-0.014	-0.014
3.6	-0.479	-0.436	-0.476	-0.479	-0.047	$2.3 \cdot 10^{-11}$	-0.046	-0.047
4	-0.52	-0.463	-0.513	-0.52	-0.0755	$2.6 \cdot 10^{-11}$	-0.0736	-0.0755
4.4	-0.564	-0.493	-0.55	-0.564	-0.116	$2.9 \cdot 10^{-11}$	-0.111	-0.116
5.2	-0.652	-0.561	-0.601	-0.652	-0.238	$3.6 \cdot 10^{-11}$	-0.219	-0.238

6	-0.718	-0.641	-0.562	-0.715	-0.423	$1.22 \cdot 10^{-9}$	-0.356	-0.422
6.8	-0.728	-0.732	-0.321	-0.718	-0.672	$5.3 \cdot 10^{-11}$	-0.471	-0.668
7.6	-0.648	-0.834	0.299	-0.609	-0.967	$6.3 \cdot 10^{-11}$	-0.44	-0.954
8	-0.564	-0.89	0.829	-0.493	-1.121	$1.73 \cdot 10^{-9}$	-0.301	-1.096

Таблиця 3.4 – Результати обчислень величини  $r^3 [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$  за формулами (2.63) та (3.34)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(2.63)	(3.34) M=4	(3.34) M=8	(3.34) M=12	(2.63)	(3.34) M=4	(3.34) M=8	(3.34) M=12
0.4	1.013	1.013	1.013	1.013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
1.2	1.116	1.116	1.116	1.116	0.034	0.034	0.034	0.034
2	1.296	1.297	1.296	1.296	0.154	0.154	0.154	0.154
2.8	1.507	1.507	1.507	1.507	0.405	0.405	0.404	0.404
3.6	1.686	1.726	1.686	1.686	0.807	0.815	0.807	0.807
4	1.741	1.816	1.742	1.741	1.066	1.084	1.066	1.066
4.4	1.762	1.892	1.762	1.762	1.361	1.395	1.361	1.361
5.2	1.663	2.011	1.664	1.663	2.036	2.145	2.037	2.036
6	1.328	2.128	1.333	1.328	2.777	3.068	2.778	2.777
6.8	0.715	2.362	0.732	0.715	3.501	4.186	3.505	3.501
7.6	-0.191	2.915	-0.141	-0.191	4.112	5.57	4.124	4.112
8	-0.75	3.401	-0.668	-0.75	4.341	6.405	4.363	4.341

Під час проведення розрахунків були використані наступні значення фізико-механічних характеристик середовища: сталі Ляме  $\lambda = \mu = 8 \cdot 10^{10}$  Па, коефіцієнт теплового розширення  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ , коефіцієнт температуропровідності  $\kappa = 2 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{c}$ , коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_0 = 30 \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , густина  $\rho = 7800 \text{кг}/\text{м}^3$ , радіус  $r = 0,5 \text{м}$ .

Аналіз табличних даних показує, що збільшення кількості членів ряду в виразах з використанням розвитку в ряд Маклорена до восьми та дванадцяти дозволяє отримати значення величин однакові з тими, які одержані за

допомогою точних формул, що говорить про вірність та надійність отриманих співвідношень.

Також для вирахування інтегралів є можливість одержати доволі невеликі формули, якщо граничний елемент  $\Delta_n$  є плоским. Необхідно ввести на площині, в межах якої знаходиться сам елемент, місцеву систему координат  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , яка матиме початок в точці  $P$ . Також введемо позначення  $e_{1i}, e_{2i}$  для напрямних косинусів осей  $\eta_1, \eta_2$  відносно глобальної системи координат  $x_1, x_2, x_3$ . Важливо, щоб напрям третьої осі  $\eta_3$  був однаковим з напрямом зовнішньої нормалі до елемента. Розташування точки  $Q$  в області  $\Delta_n$  повинне при цьому задаватись радіус-вектором  $\rho$  і полярним кутом  $\varphi$ , для якого відлік відбувається від осі  $\eta_1$  (рис. 3.3).

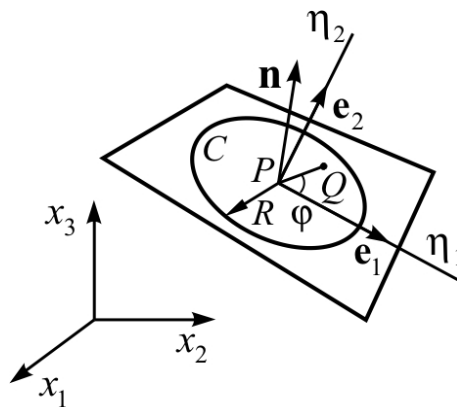


Рис. 3.3. Місцева система координат при інтегруванні по круговій області.

Розглянемо інтеграл, визначивши при цьому в області  $\Delta_n$  круг  $C$  з радіусом  $R$ :

$$\int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R U_{jk}(P, Q) \rho d\rho d\varphi, \quad (3.35)$$

де  $U_{jk}$  визначається за допомогою (2.49).

Після операції інтегрування одержуємо:



$$\int_C \frac{e^{i\lambda_3 r}}{r} d\Gamma = \frac{2\pi}{i\lambda_3} (e^{i\lambda_3 R} - 1), \quad (3.36)$$

$$\int_0^{2\pi R} \int_{\varepsilon} \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^3} (i\lambda_m r - 1) r dr d\varphi = 2\pi \left( \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} - \frac{e^{i\lambda_m \varepsilon}}{\varepsilon} \right)$$

в результаті чого:

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \int_C U_0(r, \omega, m) d\Gamma = 2\pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left( \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} - i\lambda_m \right). \quad (3.37)$$

При цьому було враховано, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{m=1}^3 \alpha_m \frac{e^{i\lambda_m \varepsilon}}{\varepsilon} = \sum_{m=1}^3 \alpha_m i\lambda_m,$$

а також:

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) = 0.$$

Якщо використати, що

$$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_i(Q) - x_i(P)}{r} = e_{1j} \cos \varphi + e_{2j} \sin \varphi, \quad (3.38)$$

як результат матимемо:

$$\int_0^{2\pi} r_{,j} r_{,k} d\varphi = \pi(e_{1j} e_{1k} + e_{2j} e_{2k}) = \pi(\delta_{jk} - n_j n_k). \quad (3.39)$$

Після чого отримати матимемо співвідношення:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \int_C r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m) d\Gamma = \\ & = \pi(\delta_{kj} - n_j n_k) \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left( \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

З врахуванням вищенаведених отриманих результатів інтегрування (3.36)-(3.40), будемо мати кінцевий вираз:

$$\begin{aligned} & \int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \frac{\delta_{jk}}{2i\lambda_3 \mu} (e^{i\lambda_3 R} - 1) - \\ & - \pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left\{ \delta_{kj} \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 1) + n_j n_k \left[ \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Безпосереднє інтегрування по іншій області граничного елемента, а саме  $\Delta_n$ - $C$ , яка містить полюс  $P$ , може бути проведеним на основі кубатурних формул.

Якщо в задачі має місце гіпотетичну середовище, тобто те, в якому немає теплового розширення (коефіцієнт теплового розширення  $\alpha_i$  нульовий), отримана рівність (3.41) приймає вид:

$$\int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \delta_{kj} \left[ 2ik_2 - \frac{e^{ik_2R}}{R} (ik_2R + 1) - \frac{e^{ik_1R}}{R} (ik_1R - 1) \right] + \right. \\ \left. + n_j n_k \left[ \frac{e^{ik_1R}}{R} (ik_1R - 3) - \frac{e^{ik_2R}}{R} (ik_2R - 3) + 2i(k_1 - k_2) \right] \right\}, \quad (3.42)$$

де,  $k_2 = \lambda_3$ .

Цей отриманий вираз повністю, разом із позначеннями, відповідає аналогічному, який був представлений у праці [197] для використання при визначенні сингулярної частини інтегралу від фундаментального розв'язку, тривимірної задачі еластодинаміки.

Проведемо процедуру розгляду кругового інтеграла від компоненти узагальненої похідної фундаментального розв'язку:

$$\int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon T_{jk}(P, Q) \rho d\rho d\varphi, \quad (3.43)$$

де  $T_{jk}$  визначається виразом (2.103), в якому кожна компонента суми має у своєму складі множник  $\partial r / \partial n$ ,  $r_{,k}$  або  $r_{,j}$  в першому степені. Враховуючи те, що на площині, яка в якій знаходяться і точка  $P$ , і точка  $Q$ ,  $\partial r / \partial n = 0$  та той факт, що:

$$\int_0^{2\pi} r_{,j} d\varphi = \int_0^{2\pi} (e_{1j} \cos \varphi + e_{2j} \sin \varphi) d\varphi = 0, \quad (3.44)$$

отримуємо в результаті:

$$\int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = 0. \quad (3.45)$$

Аналогічно, відповідно до цієї причини, нульовими будуть значення кругових інтегралів для частин фундаментального розв'язку  $U_{j4}$ ,  $U_{4k}$  та  $\partial U_{44}/\partial n$ :

$$\int_C \frac{U_{k4}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = 0, \quad (3.46)$$

$$\int_C \frac{U_{4j}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = 0, \quad (3.47)$$

$$\int_C \frac{\partial U_{44}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = 0. \quad (3.48)$$

Для обчислення сингулярних інтегралів по кругу  $C$ , які містять компоненти  $T_{j4}$  та  $\partial U_{4k}/\partial n$ , після математичних перетворень були одержані формули:

$$\begin{aligned} \int_C T_{j4}(P, Q) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi R} \int_\varepsilon T_{j4}(P, Q) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R [T_0(r, \omega, 1) - T_0(r, \omega, 2)] r dr = \\ &= \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ e^{i\lambda_2 R} \left[ \frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - e^{i\lambda_1 R} \left[ \frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1} \right] + 0.5i\lambda_3^2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad , \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi R} \int_\varepsilon^\varepsilon \partial U_{4k}(P, Q) r dr d\varphi = \\
&= \frac{i\omega\eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)] r dr =. \quad (3.50) \\
&= \frac{i\omega\eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{e^{i\lambda_2 R} - e^{i\lambda_1 R}}{R} + i\lambda_1 - i\lambda_2 \right]
\end{aligned}$$

Представлені співвідношення є частинами системи виразів для обчислення сингулярних частин інтегралів по колу, з використанням яких можуть бути визначені діагональні компоненти алгебраїчного аналога системи інтегральних рівнянь. Також одержані результати є базисом числового алгоритму для розгляду з використанням МГЕ динамічних термопружних задач про зв'язані тривимірні гармонічні коливання масивних тіл.

### **3.3. Визначення значень параметрів напружено-деформованого стану точок сферичної порожнини в термопружному середовищі при розповсюдженні гармонічних хвиль**

Для рішення проблем термопружності зв'язаного типу використовувати апарату методу потенціалу розпочали в своїх працях В.Новацький [191] і В.Д.Купрадзе та ін. [202]. Зокрема, вони здійснили узагальнення формули Соміліани та одержали розв'язок системи рівнянь термопружності, яка також називається функцією Гріна для безмежного термопружного простору. Такий граничний аналог формули Соміліани зазвичай застосовується в задачах як система ГР відносно функцій навантажень, переміщень, температури і теплового потоку, які не задаються граничними умовами. Пізніше чисельній реалізації МГР присвячувалось немало статей та публікацій, зокрема, [114, 104, 37, 110, 154], але аналітичні можливості даного методу певним чином не враховувались при проведенні розрахунків. Вони впроваджувались, в основному, при розгляді тіл канонічної форми, не зважаючи на те, що поле їх

застосування може бути розширеним за умови чіткого та контрольованого використання.

Розглянемо приклад розповсюдження гармонічних хвиль від сферичної порожнини в термопружному середовищі аналітичним шляхом та із застосуванням МГІР. Вихідні дані: сталі Ляме  $\lambda=\mu=8\cdot 10^{10}$  Па, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,25$ , густина  $\rho=7800\text{кг/м}^3$ , коефіцієнт теплового розширення  $\alpha_t=1,5\cdot 10^{-4}\text{град}^{-1}$ , коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_0=30\text{Вт/(м}\cdot\text{град)}$ , коефіцієнт температуропровідності  $\kappa=2\cdot 10^{-5}\text{м}^2/\text{с}$ , радіус порожнини  $a=3\text{м}$ .

За наведених умов потенціал амплітуд радіальних переміщень представляється наступним чином:

$$\Phi = \frac{A_1 e^{ik_1 R} + A_2 e^{ik_2 R}}{R}. \quad (3.51)$$

де  $R$  є радіальною координатою.

Значення температури визначається надалі з рівності:

$$(\Delta + k_1^2)\Phi - m\theta = 0. \quad (3.52)$$

З врахуванням того, що задача симетрична відносно центральної осі, після визначення похідної маємо:

$$\Delta\Phi(R) = -\frac{A_1 \lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R} + A_2 \lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}}{R},$$

а скориставшись рівністю (3.52) одержимо:

$$\theta(R) = \frac{A_1 (k_1^2 - \lambda_1^2) e^{i\lambda_1 R} + A_2 (k_1^2 - \lambda_2^2) e^{i\lambda_2 R}}{mR}. \quad (3.53)$$

Для того, щоб визначити значення радіальних переміщень та напружень, використаємо вирази:

$$u_R(R) = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{A_1(i\lambda_1 R - 1)e^{i\lambda_1 R} + A_2(i\lambda_2 R - 1)e^{i\lambda_2 R}}{R^2}, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= -\frac{4\mu}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \rho\omega^2 \Phi = \\ &= -\frac{4\mu}{R^3} \left[ A_1(i\lambda_1 R - 1 + 0,25\lambda_3^2 R^2)e^{i\lambda_1 R} + A_2(i\lambda_2 R - 1 + 0,25\lambda_3^2 R^2)e^{i\lambda_2 R} \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Вищенаведені рівності (3.52)-(3.55) дозволяють розв'язувати динамічні термопружні задачі у випадку розповсюдження сферичних гармонічних хвиль. Якщо, для прикладу, розглянути задачу з наступними граничними умовами:

$$u_R(a) = 0, \quad \theta(a) = \theta_a,$$

після підстановки у рівності (3.53) і (3.55) значення  $R=a$ , враховуючи задані граничні умови, можна одержати систему рівнянь з коефіцієнтами  $A_1, A_2$ , вирази для яких отримаємо після розв'язку самої системи:

$$A_1 = -\frac{\theta_a m a}{Z_u} (i\lambda_2 a - 1)e^{-i\lambda_1 a},$$

$$A_2 = \frac{\theta_a m a}{Z_u} (i\lambda_1 a - 1)e^{-i\lambda_2 a}.$$

$$Z_u = (k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_1 a - 1) - (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1)$$

Відповідно рішення задачі представляється після перетворень приймає такий вид:

$$\theta(R) = \frac{\theta_a a}{RZ_u} \left[ (k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_1 a - 1)e^{i\lambda_2(R-a)} - (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1)e^{i\lambda_1(R-a)} \right], \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \theta(R)}{\partial R} = -\frac{\theta_a a}{R^2 Z_u} \left[ (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1)(i\lambda_1 R - 1)e^{i\lambda_1(R-a)} - (k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_1 a - 1)(i\lambda_2 R - 1)e^{i\lambda_2(R-a)} \right], \quad (3.57)$$

$$u_R(R) = \frac{\theta_a ma}{R^2 Z_u} \left[ (i\lambda_2 R - 1)(i\lambda_1 a - 1)e^{i\lambda_2(R-a)} - (i\lambda_1 R - 1)(i\lambda_2 a - 1)e^{i\lambda_1(R-a)} \right], \quad (3.58)$$

$$\sigma_{RR} = -\frac{4\mu\theta_a ma}{R^3 Z_u} \left[ i\lambda_1 a - 1)(1 - i\lambda_2 R - 0,25\lambda_3^2 R^2)e^{i\lambda_2(R-a)} - (i\lambda_2 a - 1)(1 - i\lambda_1 R - 0,25\lambda_3^2 R^2)e^{i\lambda_1(R-a)} \right], \quad (3.59)$$

Граничні значення параметрів НДС середовища:

$$u_R(a) = 0, \quad \theta(a) = \theta_a,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{\partial \theta(a)}{\partial R} = \frac{\theta_a}{aZ_u} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1)(i\lambda_1 a - 1), \quad (3.60)$$

$$t_R = -\sigma_{RR}(a) = \frac{\theta_a ma}{Z_u} i\mu(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3^2, \quad (3.61)$$

Цей приклад можна розв'язати також за допомогою МГІР, взявши за базис співвідношення (2.69), (2.70). Якщо використати центральну симетрію задачі, дані рівняння набудуть виду:

$$\begin{aligned} u_R(a) & \left[ \frac{1}{2} + \int_{\Gamma} n_k(P)n_j(Q)T_{jk}(P,Q)d\Gamma \right] - t_R \int_{\Gamma} n_k(P)n_j(Q)U_{jk}(P,Q)d\Gamma = \\ & = \frac{\gamma}{i\omega\eta} \left[ \theta_a \int_{\Gamma} n_k(P) \frac{\partial U_{4k}}{\partial n}(P,Q)d\Gamma - \frac{\partial \theta}{\partial n} \int_{\Gamma} n_k(P)U_{44}(P,Q)d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$



$$\begin{aligned}
& \theta_a \left[ \frac{1}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial U_{44}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma \right] - \frac{\partial \theta}{\partial n} \int_{\Gamma} U_{44}(P, Q) d\Gamma = \\
& = -\frac{i\omega\eta}{\gamma} \left[ u_R(a) \int_{\Gamma} n_j(Q) T_{j4}(P, Q) d\Gamma - t_R \int_{\Gamma} n_j(Q) U_{j4}(P, Q) d\Gamma \right].
\end{aligned} \tag{3.63}$$

В отриманих рівностях присутні інтеграли по поверхні сфери. Для подальших розрахунків їх варто обчислити аналітично [142]. Як результат матимемо:

$$\int_{\Gamma_S} U_{44}(P, Q) d\Gamma = \frac{i}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[ \frac{(\lambda_1^2 - k_1^2)}{\lambda_1} (e^{2i\lambda_1 a} - 1) - \frac{(\lambda_2^2 - k_1^2)}{\lambda_2} (e^{2i\lambda_2 a} - 1) \right], \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_S} \frac{\partial U_{44}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \left\{ (\lambda_1^2 - k_1^2) \left[ e^{2i\lambda_1 a} \left( 1 - \frac{1}{i\lambda_1 a} \right) + \frac{1}{i\lambda_1 a} \right] - \right. \\
& \left. - (\lambda_2^2 - k_1^2) \left[ e^{2i\lambda_2 a} \left( 1 - \frac{1}{i\lambda_2 a} \right) + \frac{1}{i\lambda_2 a} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_S} n_j(Q) U_{j4}(P, Q) d\Gamma = \frac{m}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \left[ i \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{e^{2i\lambda_2 a}}{a} \left( 1 - \frac{1}{i\lambda_2 a} \right) - \frac{e^{2i\lambda_1 a}}{a} \left( 1 - \frac{1}{i\lambda_1 a} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_S} n_j(Q) T_{j4}(P, Q) d\Gamma = \frac{\mu m}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \left[ i \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left( \frac{2}{a^2} - \frac{k_2^2}{2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{e^{2i\lambda_2 a}}{a} \left( 2 - \frac{2}{i\lambda_2 a} + \frac{k_2^2 a}{2i\lambda_2} \right) - \frac{e^{2i\lambda_1 a}}{a} \left( 2 - \frac{2}{i\lambda_1 a} + \frac{k_2^2 a}{2i\lambda_1} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_S} n_k(P) U_{4k}(P, Q) d\Gamma = \frac{i\omega\eta}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} & \left[ \frac{i}{a} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \right. \\
& \left. + e^{2i\lambda_2 a} \left( 1 - \frac{1}{i\lambda_2 a} \right) - e^{2i\lambda_1 a} \left( 1 - \frac{1}{i\lambda_1 a} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\int_{\Gamma_S} n_k(P) \frac{\partial U_{4k}}{\partial n}(P, Q) d\Gamma = \frac{i\omega\eta}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left[ i(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{i}{a^2} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{e^{2i\lambda_2 a}}{a} \left( 2 - \frac{1}{i\lambda_2 a} - i\lambda_2 a \right) - \frac{e^{2i\lambda_1 a}}{a} \left( 2 - \frac{1}{i\lambda_1 a} - i\lambda_1 a \right) \right], \quad (3.69)$$

$$\int_{\Gamma_S} n_k(P) n_j(Q) U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \frac{i}{2\mu a^2 \lambda_3^2} \left[ 1 + a^2 \lambda_3^2 + e^{2ia\lambda_3} (a^2 \lambda_3^2 + 2ia\lambda_3 - 1) - 2\pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left[ \frac{e^{2ia\lambda_m}}{a} \left( 2 - ia\lambda_m - \frac{1}{ia\lambda_m} \right) - i\lambda_m + \frac{1}{ia^2 \lambda_m} \right] \right], \quad (3.70)$$

$$\int_{\Gamma_S} n_k(P) n_j(Q) \Gamma_{jk}(P, Q) d\Gamma_s = \frac{\lambda}{2\mu} \left[ e^{2ia\lambda_3} \left( 1 - \frac{1}{ia\lambda_3} \right) + \frac{1}{ia\lambda_3} \right] + \frac{e^{2ia\lambda_3}}{a^3 \lambda_3^3} (a^3 \lambda_3^3 + 3ia^2 \lambda_3^2 - 4a\lambda_3 - 2i) + ia^2 \lambda_3^2 + 2i + 2\pi \sum_{m=1}^3 (\lambda \lambda_m^2 a_m - i\omega\eta\gamma\beta_m) \left[ e^{2ia\lambda_m} \left( 1 - \frac{1}{ia\lambda_m} \right) + \frac{1}{ia\lambda_m} \right] - 2\mu \frac{\pi}{a^2} \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left[ e^{2ia\lambda_m} \left( 8 - 6ia\lambda_m - \frac{4}{ia\lambda_m} - 2a^2 \lambda_m^2 \right) - 6ia\lambda_m + \frac{4}{ia\lambda_m} \right]. \quad (3.71)$$

Тому, з врахуванням отриманих виразів, система ГПР (2.69), (2.70) приймає вид наступної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} A_{21} t_R - B_{21} \frac{\partial \theta}{\partial n} = B_{11} \theta_a \\ A_{22} t_R - B_{22} \frac{\partial \theta}{\partial n} = B_{12} \theta_a \end{cases}. \quad (3.72)$$

в якій були прийняті позначення:

$$A_{21} = - \int_{\Gamma_S} n_k(P) n_j(Q) U_{jk}(P, Q) d\Gamma,$$

$$A_{22} = -\frac{i\omega\eta}{\gamma} \int_{\Gamma_s} n_j(Q) U_{j4}(P, Q) d\Gamma,$$

$$B_{21} = -\frac{\gamma}{i\omega\eta} \int_{\Gamma_s} n_k(P) U_{4k}(P, Q) d\Gamma,$$

$$B_{11} = \frac{\gamma}{i\omega\eta} \int_{\Gamma_s} n_k(P) \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma,$$

$$B_{22} = -\int_{\Gamma_s} U_{44}(P, Q) d\Gamma,$$

$$B_{11} = \frac{1}{2} + \int_{\Gamma_s} \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma.$$

Розв'язання системи дозволяє остаточно вирішити задачу за МГПР. Розв'язок системи (3.72) має вигляд, який відповідає аналітичному рішенню, а саме виразам (3.60), (3.61).

Графіки зміни значень шуканих параметрів НДС термопружного простору в точках границі отвору в залежності від значення безрозмірного параметру частоти  $p = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$  наведені на рисунку 3.4. Криві, позначені числами 1 і 2, представляють графіки дійсної та уявної частин нормованої функції граничних радіальних навантажень  $t_R^{norm} = \frac{t_R}{\mu m \theta_a} \cdot 10^5$ , а числами 3 і 4, – графіки дійсної та уявної частин нормованої величини нормальної похідної температури  $\frac{\partial \theta_R^{norm}}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{a}{\theta_a} \cdot 10^{-4}$ . Наведені графіки відповідають результатам, які були одержані аналітичним шляхом; значення функцій, обчислені за МГПР, позначені на рисунку точками.

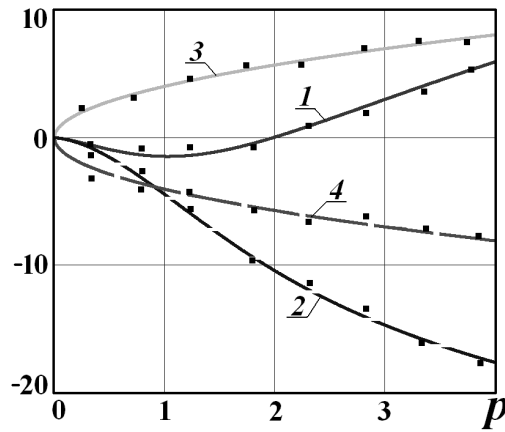


Рис. 3.4. Графіки зміни нормованих значень граничних радіальних навантажень та нормальної похідної температури

Вирази для рішення задач про поширення хвиль в термопружному просторі із іншими заданими граничними умовами представлені у праці [191]. Якщо розглянути випадок з однаковими амплітудними граничними значеннями температури та за відсутності силового навантаження, тобто

$$t_R(a) = 0, \quad \theta(a) = \theta_a,$$

матимемо наступні вирази для граничних значень параметрів:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{\theta_a}{aZ_t} [(k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_2 a - 1)q_1 - (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_1 a - 1)q_2], \quad (3.73)$$

$$u_R(a) = \frac{\theta_a m}{aZ_t} [(i\lambda_1 a - 1)q_2 - (i\lambda_2 a - 1)q_1], \quad (3.74)$$

$$q_1 = 4\mu(1 - i\lambda_1 a - 0,25k_2^2 a^2),$$

$$q_2 = 4\mu(1 - i\lambda_2 a - 0,25k_2^2 a^2),$$

$$Z_t = (k_1^2 - \lambda_1^2)q_2 - (k_1^2 - \lambda_2^2)q_1.$$

Початкова система ГР (2.69), (2.70) в результаті приймає вид системи рівнянь з невідомими радіальними переміщеннями та нормальною похідною температури  $u_R(a)$  і  $\partial\theta/\partial n$ :

$$\begin{cases} A_{11}u_R(a) - B_{21}\frac{\partial\theta}{\partial n} = B_{11}\theta_a \\ A_{12}u_R(a) - B_{22}\frac{\partial\theta}{\partial n} = B_{12}\theta_a \end{cases} \quad (3.75)$$

Тут прийняті позначення з системи (3.72) та додаткові до них:

$$A_{11} = \frac{1}{2} + \int_{\Gamma_s} n_k(P)n_j(Q)T_{jk}(P,Q)d\Gamma,$$

$$A_{12} = \frac{i\omega\eta}{\gamma} \int_{\Gamma_s} n_j(Q)T_{j4}(P,Q)d\Gamma.$$

Після розв'язання отриманої з системи ГР отримаємо розв'язок, відповідний до аналітичного (3.73), (3.74). на рисунку 3.5 представлені графіки зміни нормованих значень амплітуд радіальних переміщень та нормальної похідної температури в точках границі порожнини.

Позначення 1 і 2 введені для кривих дійсної та уявної частин

$u_R^{norm} = \frac{u_R(a)}{am\theta_a} \cdot 10^5$ , позначення 3 і 4 – для відповідних частинам

$$\frac{\partial\theta^{norm}}{\partial n} = \frac{\partial\theta}{\partial n} \frac{a}{\theta_a} \cdot 10^{-4}.$$

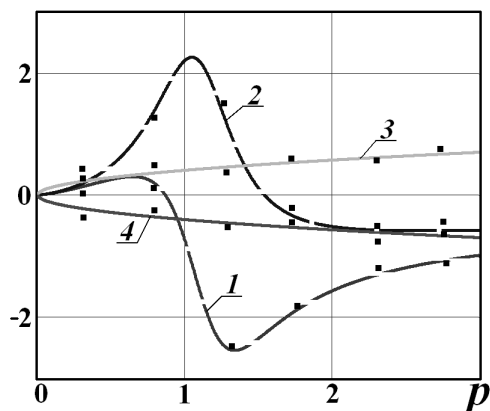


Рис. 3.5. Графіки зміни нормованих значень амплітуд граничних радіальних переміщень та нормальної похідної температури

У разі іншого варіанту умов на границі кругового отвору, а саме: коли немає коливань температури і всі амплітудні значення радіальних силових навантажень рівні між собою:

$$t_R(a) = t_R, \quad \theta(a) = 0,$$

маємо аналітичне рішення задачі відповідно до [202]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{t_R a}{m Z_t} (k_1^2 - \lambda_2^2)(k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - i\lambda_1 a), \quad (3.76)$$

$$u_R(a) = \frac{t_R a m}{Z_t} [(k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_1 a - 1) - (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1)]. \quad (3.77)$$

В свою чергу, система ГР з невідомими радіальними переміщеннями та нормальною похідною температури приймає спрощений вид:

$$\begin{cases} A_{11}u_R(a) - B_{21}\frac{\partial \theta}{\partial n} = -A_{21}t_R \\ A_{12}u_R(a) - B_{22}\frac{\partial \theta}{\partial n} = -A_{22}t_R \end{cases} \quad (3.78)$$

Розв'язок системи після деяких математичних перетворень зводиться до виду (3.76), (3.77). Графіки зміни нормованих значень величин:  $u_R^{norm} = \frac{u_R(a)}{a} \frac{\mu}{t_R}$

– криві, позначені числами 1 (дійсна частина) та 2 (уявна частина) та

$\frac{\partial \theta^{norm}}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\mu n}{t_R} \cdot 10^{-5}$  – криві з позначками 3 і 4 відповідно.

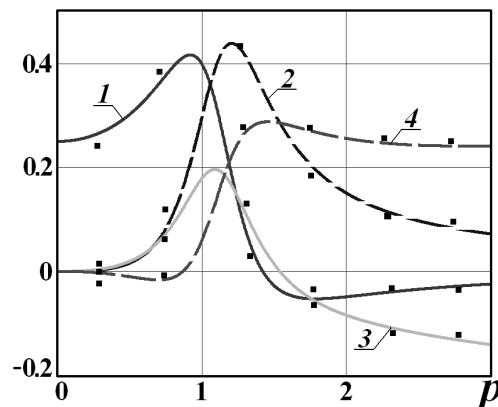


Рис. 3.6. Графіки зміни нормованих значень амплітуд граничних радіальних переміщень та нормальної похідної температури

Значення, отримані за допомогою двох різних підходів, близькі та мають хорошу збіжність, що вказує на вірність проведення розрахунків, проміжних і остаточних результатів.

### 3.4. Чисельне визначення параметрів напружено-деформованого стану поропружного масиву при гармонічних коливаннях

Розглянемо гармонічні коливання поропружного шару з піщаника (Berea sandstone) [38] при дії рівномірно розподіленого навантаження (рис. 3.7). Для цього розглянемо двофазну модель поропружного тіла.

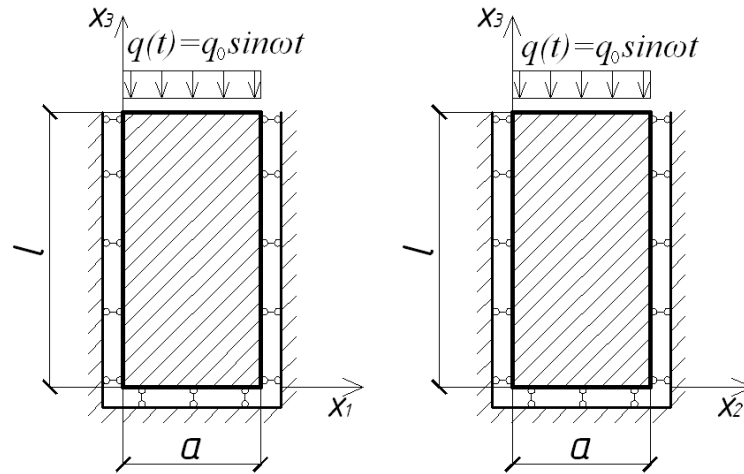


Рис. 3.7. Насичений пористий шар під дією гармонічного навантаження

Вихідними даними є характеристики піщаника (Berea Sandstone): константи Ляме  $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{Па}$ ,  $\mu=6 \cdot 10^9 \text{Па}$  коефіцієнт Пуассона осушеного матеріалу  $\nu_u=0.33$ ; пористість  $\beta=0.19$ , модулі попружного середовища  $Q=1.399 \text{Па}$ ,  $R=0.444 \text{Па}$ , коефіцієнт дисипації  $b=0.19 \cdot 10^9 \text{кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ , коефіцієнт ефективних напружень Біо  $\alpha=0,79$ ; ефективні щільності середовища  $\rho_{11}=2418 \text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{22}=340 \text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{12}=-150 \text{кг}/\text{м}^3$ .

Система диференціальних рівнянь для усталених гармонічних коливань має вигляд (3.1)-(3.2) [143]. Застосуємо до цієї задачі МГПР. Рівняння рівноваги для тривимірної лінійної динамічної поропружності в цьому випадку матимуть вигляд:

$$c_{ij}u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_j^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \tau U_{nj}^* d\Gamma, \quad (3.79)$$

$$\frac{c\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} + \int_{\Gamma} (t_{ij}^* u_i + \tau_j^* U_n) d\Gamma = \int_{\Gamma} [t_i u_{ij}^* + \tau U_{nj}^*] d\Gamma. \quad (3.80)$$

де  $j=1, 2, 3$  індекс, що визначає рядок фундаментального розв'язку.

За заданих умов у колоні не виникають переміщення  $u_1, u_2, U_1, U_2$ , а переміщення  $u_3$  є функціями лише координати  $x_3$ . Компоненти напруженого стану  $\sigma_{ij}, \tau$  також залежать тільки від координати  $x_3$ . В результаті система



диференціальних рівнянь в частинних похідних перетворюється на систему двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} + \rho^* \omega^2 u_3 - \gamma^* \frac{d\tau}{dx_3} = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{d^2 \tau}{dx_3^2} + \frac{i\omega}{\kappa^*} \tau + i\omega \eta^* \frac{du_3}{dx_3} = 0, \quad (3.91)$$

Розв'язок системи рівнянь шукаємо у вигляді:

$$u_3(x_3) = u e^{ikx_3}, \quad \tau(x_3) = \tau e^{ikx_3}, \quad (3.92)$$

Підставляємо розв'язок (3.92) в систему (3.90)-(3.91), скорочуємо на  $e^{ikx_3}$ , після чого отримуємо:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\omega^2}{C_1^2} - k^2 \right) & -ikm \\ -k\omega m & \left( \frac{i\omega}{\kappa^*} - k^2 \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \tau \end{pmatrix} = 0. \quad (3.93)$$

Нетривіальний розв'язок можливий тільки за умови:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \left( \frac{\omega^2}{C_1^2} - k^2 \right) & -ikm \\ -k\omega m & \left( \frac{i\omega}{\kappa^*} - k^2 \right) \end{bmatrix} = 0$$

або

$$k^4 - zk^2 + q = 0, \quad (3.94)$$

$$z = \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{\omega^2}{C_1^2} + im\omega\eta,$$

$$q = \frac{i\omega}{\kappa^*} \frac{\omega^2}{C_1^2}.$$

Отримавши корені біквдратного рівняння (3.94):

$$k_{1,2}^2 = 0,5 \left\{ z \pm \sqrt{z^2 - 4q} \right\}, \quad (3.95)$$

запишемо розв'язок

$$u_3(x_3) = u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} + u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} + u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3}. \quad (3.96)$$

Оскільки система алгебраїчних рівнянь (3.90)-(3.91) є однорідною, то величину тиску  $\tau$  можна виразити через величину  $u$ :

$$\tau(x_3) = X_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + X_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right], \quad (3.97)$$

$$X_i = \frac{1}{ik_1 m} \left( \frac{\omega^2}{C_1^2} - k_i^2 \right), \quad i=1,2.$$

Запишемо вираз для інших параметрів НДС поропружного шару:

$$\varepsilon_{33}(x_3) = \frac{du_3(x_3)}{dx_3} = ik_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + ik_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right]; \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_3) &= (\lambda + 2\mu) \frac{du_3(x_3)}{dx_3} + \frac{Q}{R} \tau = \\ &= Z_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + Z_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right], \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$Z_i = (\lambda + 2\mu) \left( ik_i + \frac{Q}{R} \frac{1}{ik_i \gamma} \left( \frac{\omega^2}{C_1^2} - k_i^2 \right) \right), \quad i=1,2;$$

$$\frac{d\tau(x_3)}{dx_3} = X_1 ik_1 [u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3}] + X_2 ik_2 [u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} + u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3}]; \quad (3.100)$$

$$U_3(x_3) = \frac{1}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[ (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) u_3 - \frac{d\tau(x_3)}{dx_3} \right] =, \quad (3.101)$$

$$= Y_1 [u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3}] + Y_2 [u_1^{(+)} e^{ik_2 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_2 x_3}]$$

$$Y_i = \frac{1}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left( (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - \frac{1}{m} \left( \frac{\omega^2}{C_1^2} - k_i^2 \right) \right), \quad i=1,2.$$

В даному прикладі для визначення величин  $u_1^{(+)}$ ,  $u_1^{(-)}$ ,  $u_2^{(+)}$ ,  $u_2^{(-)}$  використаємо чотири граничні умови:

- 1)  $u_3(0) = 0$ ,
- 2)  $U_3(0) = 0$ , враховуючи формулу (3.101), маємо:  $\frac{d\tau(0)}{dx_3} = 0$ ,
- 3)  $\sigma_{33}(l) = -P_0$ ,
- 4)  $\tau(l) = 0_0$ .

Враховуючи вирази (3.96), (3.97), (3.99), (3.101), після подальших перетворень отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$u_1^{(+)} + u_1^{(-)} + u_2^{(+)} + u_2^{(-)} = 0,$$

$$X_1 ik_1 (u_1^{(+)} + u_1^{(-)}) + X_2 ik_2 (u_2^{(+)} + u_2^{(-)}) = 0,$$

$$Z_1 (u_1^{(+)} e^{ik_1 l} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 l}) + Z_2 (u_2^{(+)} e^{ik_2 l} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 l}) = -P_0,$$

$$X_1 (u_1^{(+)} e^{ik_1 l} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 l}) + X_2 (u_2^{(+)} e^{ik_2 l} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 l}) = 0.$$

Отримавши розв'язок, можна знайти значення всіх параметрів НДС.

На рисунку 3.8 представлені графіки зміни значень граничних переміщень  $u_3$  в та пружній області (1) та пружному каркасі поропружної області (2) в діапазоні частоти  $\omega$  від 0 до  $5\omega_1$ , де  $\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E_u}{\rho}}$ ,  $E_u = \frac{2\mu(1-\nu_u)}{(1-2\nu_u)}$ ,  $l$  – висота шару:

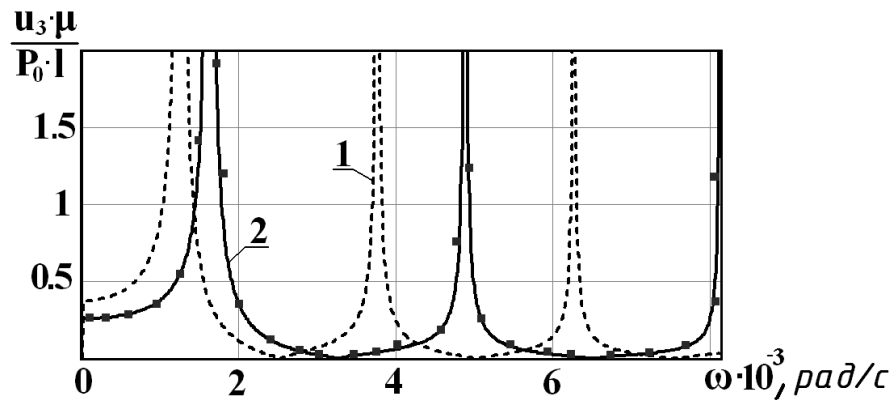


Рис.3.8. Графіки залежності значень переміщень  $u_3$  від частоти  $\omega \cdot 10^3$ .

На рисунку 3.9 наведені графіки зміни значень напружень  $\sigma_{33}$  в точках границі колони, які виникають в пружній області без пор (крива з позначкою 1) та пружному каркасі поропружної області (крива з позначкою 2) в аналогічному діапазоні частоти  $\omega$ :

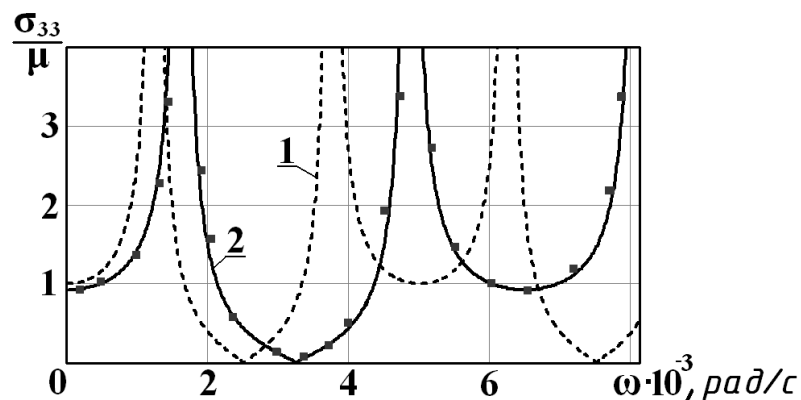


Рис.3.9. Графіки залежності значень напружень  $\sigma_{33}$  від частоти  $\omega \cdot 10^3$ .

Розглянемо цю колону за інших граничних умов:

- 1)  $u_3(0) = U_0$ ,
- 2)  $U_3(0) = -m\omega^2 U_0 (\rho_{12} + \rho_{22})$ ,
- 3)  $\sigma_{33}(l) = 0$ ,
- 4)  $\tau(l) = 0$ .

Складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(+)} + u_1^{(-)} + u_2^{(+)} + u_2^{(-)} &= U_0, \\
 X_1 i k_1 (u_1^{(+)} + u_1^{(-)}) + X_2 i k_2 (u_2^{(+)} + u_2^{(-)}) &= m\omega^2 U_0 (\rho_{12} + \rho_{22}), \\
 Z_1 (u_1^{(+)} e^{i k_1 l} - u_1^{(-)} e^{-i k_1 l}) + Z_2 (u_2^{(+)} e^{i k_2 l} - u_2^{(-)} e^{-i k_2 l}) &= 0, \\
 X_1 (u_1^{(+)} e^{i k_1 l} - u_1^{(-)} e^{-i k_1 l}) + X_2 (u_2^{(+)} e^{i k_2 l} - u_2^{(-)} e^{-i k_2 l}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Маючи розв'язок системи, можна обчислити значення параметрів НДС в залежності від значення величини частоти коливань  $\omega$ . На рисунку 3.10, 3.11 зображені графіки зміни значень переміщень  $u_3$  та напружень  $\sigma_{33}$  в пружній області (крива з позначкою 1) та пружному каркасі поропружної області (крива з позначкою 2) в діапазоні частоти  $\omega$  від 0 до  $5\omega_1$  при другому варіанті граничних умов. Точками на графіках зображені значення, отримані за допомогою МГПР.

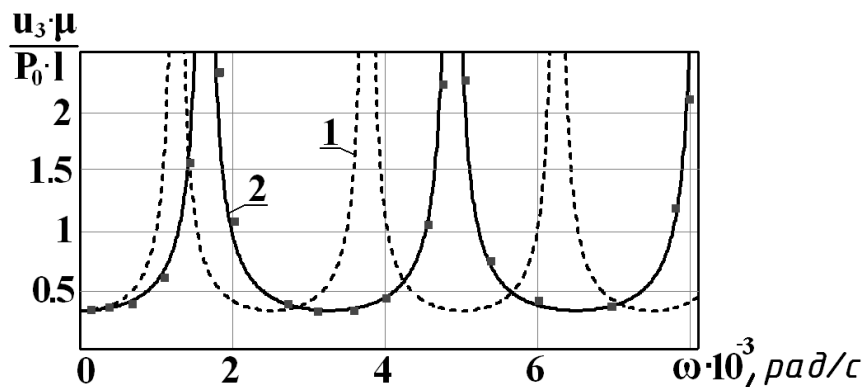


Рис.3.10. Графіки залежності значень переміщень  $u_3$  від частоти  $\omega \cdot 10^3$ .

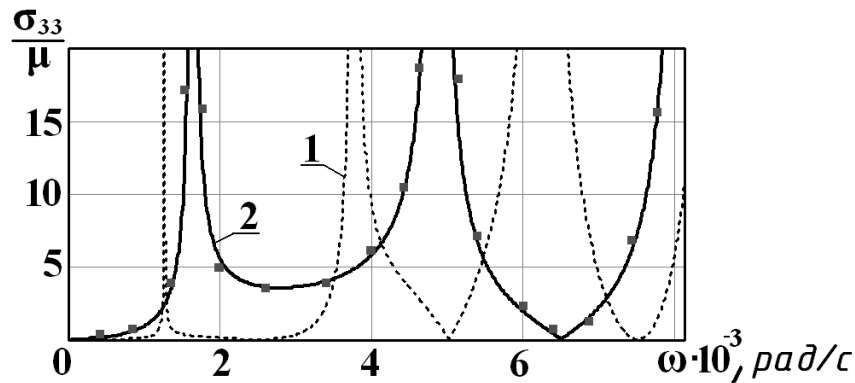


Рис.3.11. - Графіки залежності значень напружень  $\sigma_{33}$  від частоти  $\omega \cdot 10^3$ .

З рисунків видно, що графіки переміщень та напружень в пружній області та пружному скелеті поропружної області мають однаковий характер, але відрізняються значеннями в залежності від величини частоти коливань  $\omega$ . Це свідчить про те, що тіло, в якому містяться пори, не можна моделювати як суцільне однорідне пружне середовище, а необхідно застосовувати двофазну модель та рівняння поропружності. Оскільки значення, отримані різними способами, добре узгоджуються, МГІР можна застосовувати для визначення параметрів НДС тривимірних поропружних тіл при гармонічних коливаннях.

### 3.5. Висновки за розділом

При розробці алгоритму для розрахунку задач про тривимірні коливання з використанням МГІР виведені співвідношення для визначення сингулярних частин інтегралів по колу, що є компонентами фундаментальних розв'язків та їх узагальненої похідної, з використанням розвитку в ряд Маклорена. При проведенні розрахунків значення, обчислені за допомогою отриманих виразів співпадали з зі значеннями, отриманими за допомогою точних виразів функцій. На прикладі чисельних задач наведений алгоритм визначення значень НДС точок пористих тіл при дії динамічного навантаження.

Проведені чисельні розрахунки показують, що пористість природного матеріалу та присутність рідкого заповнювача в них суттєво впливають на поведінку та НДС тіл. Зокрема, змінюються графіки нормованих функцій переміщень і напружень на границі кругового отвору в пористому матеріалі та на границі поропружної колони при гармонічних коливаннях. Ці особливості слід враховувати при проектуванні споруд з пористих матеріалів та при моделюванні реальної поведінки споруд в умовах експлуатації.

## РОЗДІЛ 4.

### ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОЧОК СТИНОК ПІДЗЕМНИХ РЕЗЕРВУАРІВ ПРИ ДІЇ ВИБУХУ

#### 4.1. Загальні особливості будівництва та експлуатації підземних сховищ

Протягом останніх років у зв'язку зі збільшенням об'ємів видобутку нафтопродуктів на території країни, збільшенням обсягів споживання природних вуглеводнів, створенням додаткових державних та стратегічних резервів збільшується потреба в об'ємах зберігання нафти та газу. Цьому сприяє також той факт, що характер споживання вуглеводневої сировини на протязі року є нерівномірним. Тому для задоволення потреб господарств, транспорту та стабільної роботи промисловості та нафтогазопроводів необхідними є сховища для нафти та продуктів її переробки.

Досить розповсюдженими сьогодні є надземні залізобетонні та металеві резервуари. Однак їм притаманні: досить значна потреба в матеріалах, велика площа забудови та підвищена пожежонебезпека, висока вартість будівництва та подальшої експлуатації, залежність температурного режиму від погодних умов – що є їх суттєвими недоліками. Починаючи з минулого століття для зберігання нафтопродуктів почали застосовувати природні або штучно створені підземні сховища (рис. 4.1). На відміну від наземних резервуарів, в підземних сховищах на температуру зберігання нафтопродуктів не впливають природні кліматичні умови та сезонні коливання температури верхніх шарів ґрунту.

Першими були сховища в пористих шарах гірських порід, після цього в другій половині сторіччя людство почало опановувати способи створення штучних пустот у верхній пластах земної кори з використанням камуфлетних вибухів. Підземні сховища для зберігання природного газу споруджують в



пористих породах (колекторах). Також для зберігання природного газу застосовуються великогабаритні сховища у водоносних шарах.

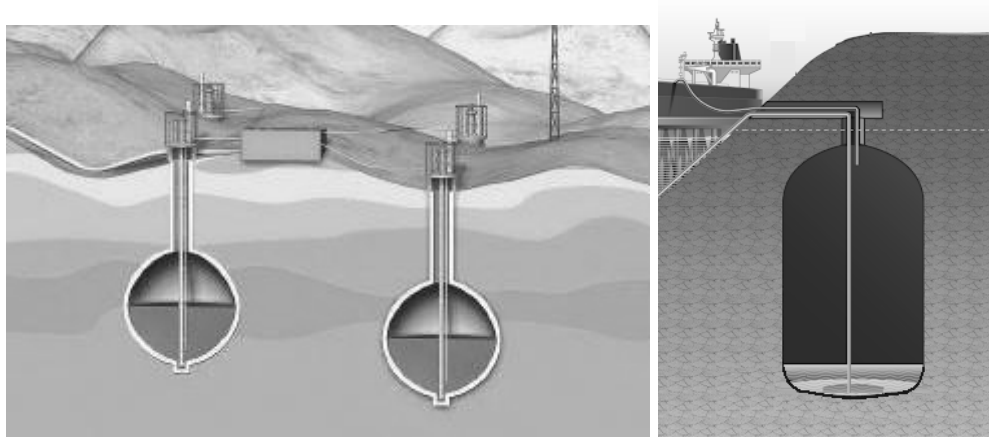


Рис.4.1. Підземні сховища для вуглеводнів

Для будівництва підземних резервуарів використовуються шари, в яких виділяється «робоча частина» потужністю мінімум 18-20 метрів [186]. Глибина закладання самої «робочої частини» залежить від призначення сховища: для рідких нафтопродуктів має складати 20-120 м; для зрідженого газу – 60-150 м; для рідких добрив – 20-50 м; для шкідливих викидів промисловості – від 100 до 120 м.

Можливість спорудження сховища оцінюється також за даними проникності порід. Надійним екраном для нафтопродуктів мають гірські породи з проникністю  $10^{-1}$  мД і менше.

Важливою особливістю підземного тривалого зберігання є безпосередній контакт продукту з гірською породою та заповнювачем пор. Тому необхідно враховувати такий фактор як вивчення хімічних властивостей рідкого заповнювача, оскільки рідина в гірській породі не повинна вступати в реакцію з речовинами, для тривалого зберігання яких передбачений підземний резервуар. Перевірка натурних умов продемонструвала, що при зберіганні контактування палива з водою, яка виступає заповнювачем пор, в ємностях не дає суттєвого впливу на фізико-хімічні властивості вуглеводнів.

На сьогодні найбільш розповсюдженими підземними сховищами є порожнини в пористих шарах: виснажені родовища та водоносні структури. Хоча з року в рік збільшується кількість інших видів сховищ, зокрема, в покладах кам'яної солі та в циліндричних шахтах, в які закладаються сталеві циліндри.

Досить поширеними в багатьох країнах є комплекси підземних сховищ для нафтопродуктів, тобто групові резервуари. При груповому способі спорудженні резервуарів важливим є вибір їх просторового розташування та визначення відстаней між ними.

Вибухи, аварії, пожежі – є одними з основних причин руйнування резервуарів для зберігання вуглеводнів. Будь-яка пожежа, яка відбувається у внутрішній порожнині резервуара представляє собою неорганізований фізико-хімічний процес горіння антропогенного або природного походження. Основними причинами виникнення вибухів та пожеж є:

- загазованість (при закачуванні нафти, яка недостатньо сепарована від газу на нафтопромислах; при перекачці із резервуарів нафти, яка має високу пружність парів);

- перевищення допустимого об'єму заповнення резервуара, швидкості заповнення чи випорожнення (обмеження швидкості заповнення і забору направлене на зменшення утворення зарядів статичної електрики, оскільки найбільш інтенсивно електризація протікає при взаємодії потоку нафтопродуктів з повітрям; контроль за об'ємом заповнення необхідний для попередження загоряння розлитих внаслідок переливу продуктів);

- самозаймання пірофорів (найбільш розповсюджені у місцях, видобутку та зберігання нафти з високим вмістом сірки);

- порушення умов очищення та ремонту елементів резервуарів (при очищенні ємностей перед оглядом; при проведенні ремонтних робіт, в тому числі вогняних, на попередньо очищених резервуарах; при ремонті і обслуговуванні сховищ без попереднього очищення);

– порушення умов експлуатації та пожежної безпеки в місцях розташування сховищ вуглеводнів.

Саме горіння – це складна некерована ланцюгова реакція окислення, основними компонентами якої виступають суміші горючих вуглеводневих газів (парів) та кисень. Розвиток пожежі в паливній ємності послідовно викликає нагрів та збільшення об'єму рідкої та газоподібної фаз нафтопродукту, які призводять до вибуху в замкненому просторі. В обмеженому просторі резервуара горіння палива починається у вигляді хімічного об'ємного вибуху, а потім, при потраплянні в атмосферу через отвори, які виникли в результаті руйнування конструкції, горіння вуглеводнів стабілізується і полум'я стає стійкішим.

#### **4.2. Розрахунок стінок підземних резервуарів на дію вибуху в одному із сховищ**

Розглянемо задачу, з врахуванням можливостей розробленого в попередніх розділах підходу [143, 142, 66], про зміну НДС стінок підземних нафтових резервуарів в результаті вибуху в одному із сховищ. Обидві сферичної форми ємності радіусом  $R=3\text{м}$  розташовані в покладах піщаника (Ruhr Sandstone) [38] з характеристиками: константи Ляме  $\lambda=4\cdot 10^9\text{Па}$ ,  $\mu=1,3\cdot 10^9\text{Па}$ , коефіцієнт Пуассона осушеного матеріалу  $\nu_u=0.31$ ; пористість  $\beta=0.1$ , модулі попружного середовища  $Q=0.507\text{Па}$ ,  $R=0.804\text{Па}$ , коефіцієнт ефективних напружень Біо  $\alpha=0,65$ ; щільності пористої породи  $\rho_s=2360\text{кг/м}^3$ , щільності рідкого заповнювача пор  $\rho_f=1000\text{кг/м}^3$ . Відстань між порожнинами:  $a=10\text{м}$  (рис. 4.2).

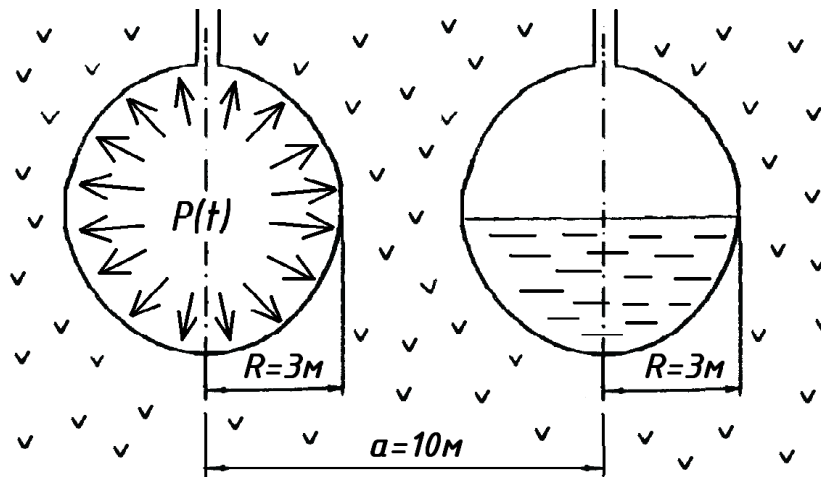


Рис.4.2. Два сферичних резервуари, в одному з яких відбувається вибух

Чисельно сферичний вибуховий процес моделюється як функція:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ A \cdot t \cdot \exp(-\beta t^2) & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $P(t)$  – функція, яка апроксимує експериментальну залежність для граничних значень порожнини при дії вибуху [185]; константи:  $A=5,83 \cdot 10^{13}$  Па/с;  $\beta=4,5 \cdot 10^9$  с<sup>-2</sup>.

Функцію навантаження можна представити у вигляді розкладу в ряд Фур'є:

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left( a_k \cos \frac{\pi k}{l} t + b_k \sin \frac{\pi k}{l} t \right), \quad (4.2)$$

де коефіцієнти  $a_0, a_k, b_k$  визначаються за формулами:

$$a_0(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l P(t) dt, \quad (4.3)$$

$$a_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l P(t) \cos \frac{\pi k t}{l} dt, \quad (4.4)$$

$$b_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l P(t) \sin \frac{\pi k t}{l} dt . \quad (4.5)$$

На рисунку 4.3 зображені графіки функції навантаження  $P(t)$ , які побудовані з використанням точної формули (4.1) – крива з позначенням 1, та за допомогою виразу (4.2) при кількості членів ряду 2 і 4 (криві з позначеннями 2 і 3 відповідно).

З рисунку видно, що достатньо приймати чотири члени ряду при розкладі в ряд Фур'є, щоб графік наближеної функції наближався до графіка точної функції.

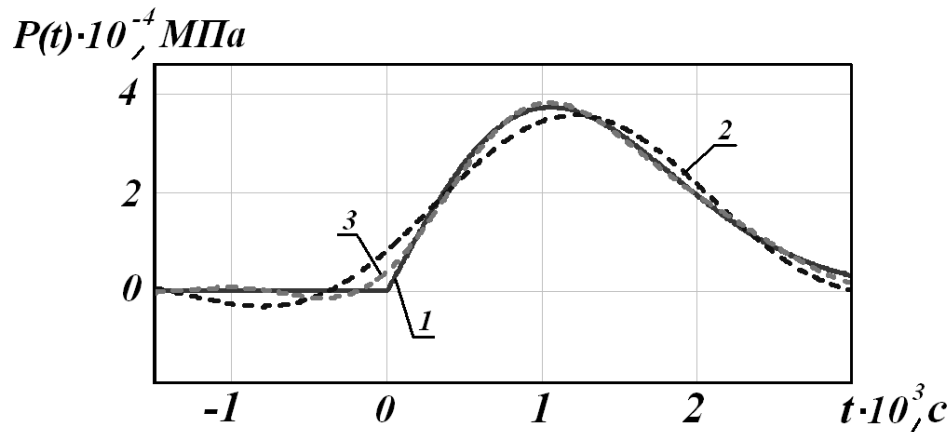


Рис.4.3. Графіки функції навантаження  $P(t)$ .

При чисельному дослідженні задачі за загальною гранично-елементною методикою поверхні обох порожнин подаються як сукупність тридцяти двох та ста двадцяти восьми (при згущенні сітки) плоских не викривлених трикутників (рис. 4.4). Частиною сховища, яка стосується свердловини, нехтуємо при проведенні розрахунків, оскільки її діаметр набагато менший за діаметр самого ємності. Відповідно, надалі розглядається лише сферична частина резервуару.

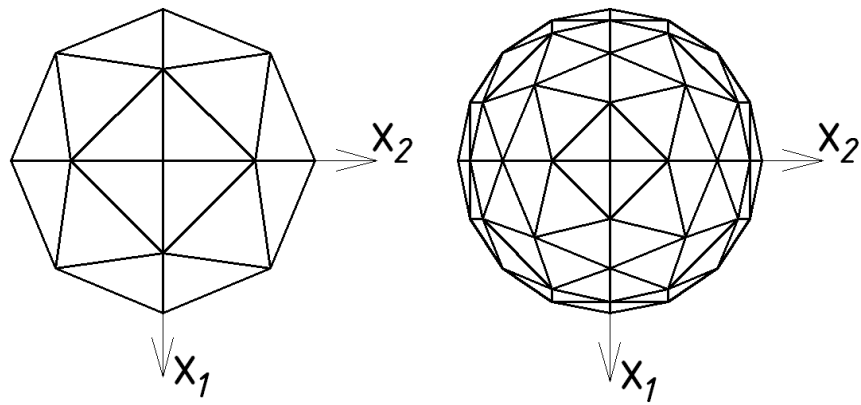


Рис.4.4. Граничноелемента сітка на основі 32-гранника та 128-гранника, вписаних в сферу (вид зверху).

В результаті розв'язання задачі були отримані дані про зміну значень параметрів НДС в характерних точках А, Б та В. Точка А є граничною точкою сферичної ємності, переміщення та напруження в якій змінюються від дії вибуху в сусідньому сховищі; точка Б належить порожнині, в якій відбувається вибух; точка В розташована на границі резервуару, в якому відбувається вибух, та є більш віддаленою від другої ємності, ніж точка Б, на відстань  $2R=6\text{м}$  (рис. 4.5).

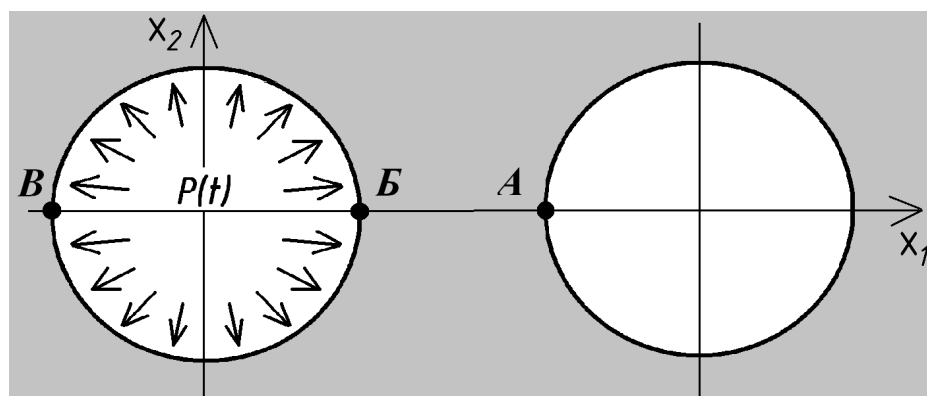


Рис.4.5. Схема розташування характерних граничних точок сховищ.

Чисельні результати показали, що найбільших значень переміщення та напруження в граничних точках набувають із деяким запізненням по відношенню до моменту, коли досягає максимуму вибуховий тиск. Графіки зміни значень радіальних переміщень  $u_r$  у характерних точках, одержані з

використанням 128-елементної граничноелементної сітки, в часовому діапазоні від  $3 \cdot 10^{-4}$  до  $3,7 \cdot 10^{-3}$  наведені на рисунках 4.6, 4.7, 4.8. Криві під номером 1 позначають переміщення в пористому насиченому середовищі від дії вибуху в лівій ємності, крива 2 – аналогічні переміщення в пружній області (без урахування пористої структури матеріалу).

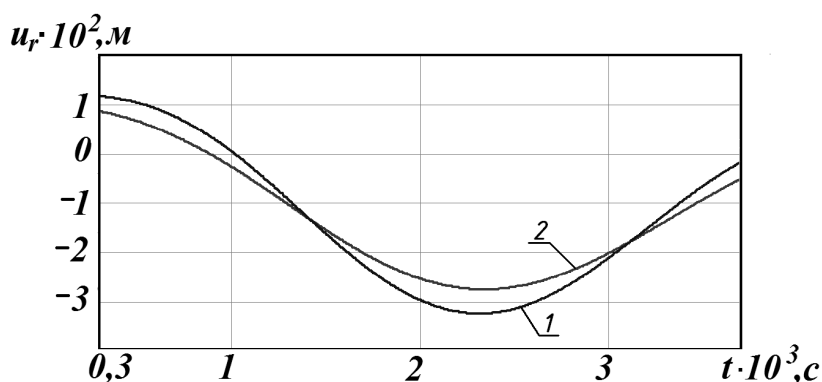


Рис.4.6. Графіки зміни значень граничних радіальних переміщень  $u_r$  в точці А.

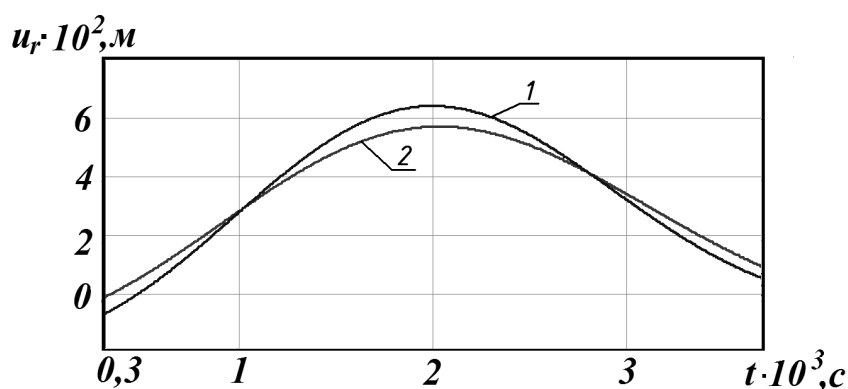


Рис.4.7. Графіки зміни значень граничних радіальних переміщень  $u_r$  в точці Б.

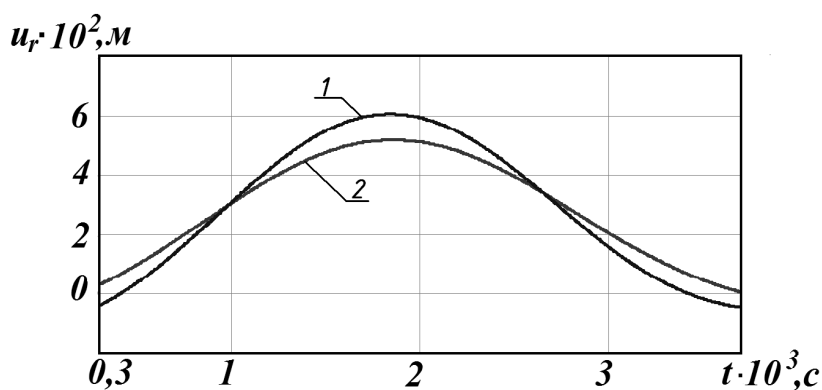


Рис.4.8. Графіки зміни значень граничних радіальних переміщень  $u_r$  в точці В.

На рисунках 4.9, 4.10, 4.11 представлені графіки зміни значень кільцевих нормальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в часовому діапазоні від  $5 \cdot 10^{-4}$  до  $3,7 \cdot 10^{-3}$ , які виникають у вищевказаних характерних точках в результаті дії вибуху в лівій ємності в пружно-пористій насиченій породі (крива з позначкою 1) та в пружному середовищі (крива з позначкою 2).

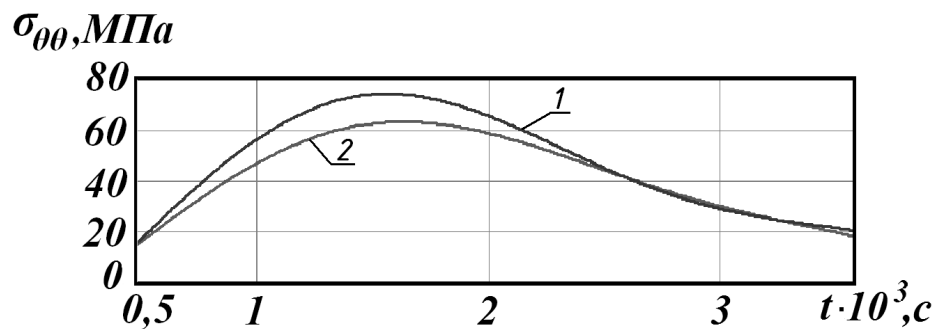


Рис.4.9. Графіки зміни значень граничних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в точці А.

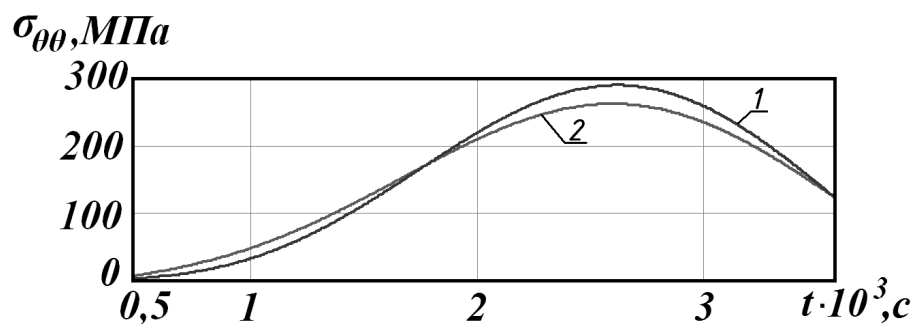


Рис.4.10. Графіки зміни значень граничних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в точці Б.

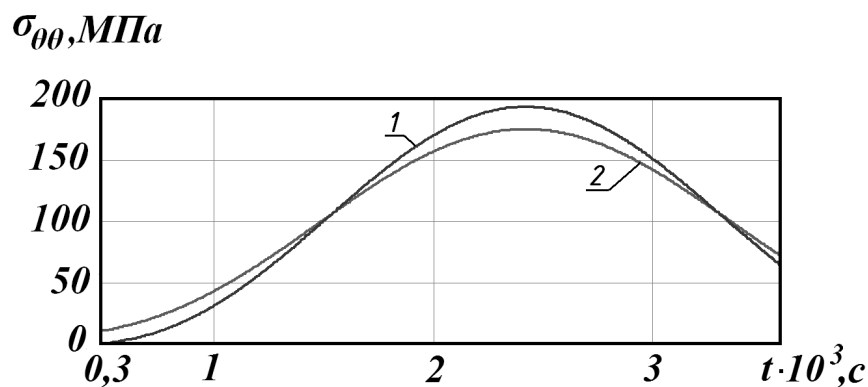


Рис.4.11. Графіки зміни значень граничних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  в точці В.



З графіків видно, що максимальні напруження в точці А, яка належить правій порожнині, досягають значення  $\sigma_{\theta\theta}=76\text{МПа}$  в момент часу  $t=1,6\cdot 10^{-3}\text{с}$ . Оскільки міцність піщаника на розрив  $\sigma_p=9,8\text{МПа}<\sigma_{\theta\theta}=76\text{МПа}$ , то можна зробити висновок, що, при розташуванні сховищ з відстанню між осями 10м одна від одної, стінки правої ємності, які підлягають дії вибуху в іншій ємності, будуть розрушені. Тому для уникнення вибухового впливу в одному резервуарі на інший відстань між сховищами в пористій насиченій рідиною породі необхідно збільшувати.

Аналіз представлених чисельних результатів показує, що наявність пор в матеріалі та присутність в них рідкого заповнювача сприяють збільшенню амплітудних значень параметрів НДС радіальних переміщень та кільцевих нормальних напружень в граничних точках підземних резервуарів в середньому на 10% для точок порожнини, в якій відбувається вибух та на 20% для точки, яка належить другій порожнині.

### 4.3. Висновки за розділом

Для перевірки ефективності та апробації розробленої в попередніх розділах методики проведений розрахунок задачі про зміну динамічного НДС точок огорожувальних елементів підземних резервуарів сферичної форми для зберігання нафти внаслідок дії вибуху речовин в одному із сховищ. Функція експоненціального навантаження була розкладена в ряд Фур'є. При розв'язанні прикладної задачі за МГІР сферичні поверхні підземних ємностей моделювались як сукупність тридцяти двох та ста двадцяти восьми плоских не викривлених трикутних елементів.

Одержані чисельні результати значень граничних радіальних переміщень та кільцевих нормальних напружень в точках стінок підземних порожнин. Визначений вплив пористості та наявності рідкого заповнювача в порах породи на зміну значень відповідних параметрів НДС. Встановлено, що задана відстань

між сховищами є недостатньою, оскільки від дії вибуху в резервуарі в точках стінок сусіднього сховища виникають напруження, які є більші за міцність пористої породи на розрив, а тому більші за розрахунковий опір підземної конструкції.

## ВИСНОВКИ

1. На основі МГІР розроблено ефективну методику аналізу і дослідження хвильових процесів в пружно-пористих насичених рідиною масивних тілах складної форми.

2. В процесі виконання дослідження були отримані наступні результати роботи:

- побудовані на основі МГІР розрахункові співвідношення для розв'язування просторових динамічних задач про поширення хвиль в поропружних середовищах насичених рідиною середовищах, які забезпечують високу точність результатів при мінімальних обчислювальних витратах

- отримано нові вирази для визначення узагальненої похідної фундаментальних розв'язків тривимірної поропружності, які входять до складу ГІР;

- розроблено та реалізовано чисельно-аналітичний підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегралів в задачах про коливання поропружних об'єктів;

- для випадку розташування полюсу інтегрування на плоских елементах границі виведені вирази для обчислення сингулярних частин граничних інтегралів.

- проведено апробацію запропонованого алгоритму визначення параметрів динамічного НДС пористих насичених рідиною середовищ шляхом співставлення результатів розрахунку тестових задач з аналітичними розв'язками;

- отримано розв'язок практичної задачі про еволюцію динамічних полів переміщень та напружень в поропружному просторі, який містить дві сферичні ємності для зберігання вуглеводнів; встановлений вплив пористості та заповнювача на зміну значень параметрів НДС в граничних точках, коли в одній з ємностей стається вибух.

3. Ефективність та достовірність розробленої методики підтверджена розв'язанням задач при різних граничних умовах та зовнішніх навантаженнях. Запропонований підхід реалізований у вигляді програмного засобу, орієнтованого на використання персональними комп'ютерами.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Abbas I.A. A two dimensional wave propagation in a poroelastic infinite circular cylinder / I.A.Abbas, A.N.Abd-alla // Journal of Physics. – 2012. – V. 1, № 3. – P.32-38.
2. Abou-Kassem J.H. Petroleum Reservoir Simulation: A Basic Approach / J.H.Abou-Kassem, S.M.Farouq Ali, M.R.Islam. — Gulf Publishing Company, 2006. – P. 445.
3. Acharya D.P. Reflection of longitudinal displacement plane waves from the flat boundary of a solid half-space containing a distribution of a void pores / D.P.Acharya, A.Mondal // Int. J. Appl. Mech. and Eng. – 2008. – V.13, № 3. – P. 609-625.
4. Adkins J.E. Diffusion of fluids through anisotropic highly elastic solids / J.E.Adkins // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1964. – V. 15. – P. 222–234.
5. Armero F. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems / F.Armero, J.C.Simo // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1992. – V. 35, № 4. – P. 737-766.
6. Ashayeri I. Laplace domain 3D dynamic fundamental solutions of unsaturated soils / I.Ashayeri, M.Kamalian, M.K.Jafari // The 4th International Conference on Geotechnical Engineering and Soil Mechanics, 2-3 November 2010, Tehran, Iran – 2010. – № 40. – P. 1-8.
7. Auriault J. Dynamic of porous saturated media, checking of generalized law Darcy / J.Auriault, L.Borne, R.Chambon // J. Acoust. Soc. Amer. – 1985. – V. 77. – P. 1641-1650.
8. Aziz K.Petroleum reservoir simulation / K.Aziz, A.Settari. — London: Applied Science Publishers Ltd., 1979. – P. 476.

9. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media / J.Bear. — New York: Dover Publications, 1972. — P.796.
10. BEM and FEM results of displacements in a poroelastic column / B.Albers [та ін.] // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2012. — Vol. 22, № 4. — P. 883-896.
11. Berryman J.G. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids / J.G.Berryman, L.Thigpen // J. Appl. Mech. — 1985. — V. 52. — P. 345–350.
12. Beskos, D.E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II, 1986–1996 / D.E.Beskos // Appl. Mech. Reviews. — 1997. — Vol. 50. — P. 149-197.
13. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material / M.A.Biot // J. Appl. Mech. — 1956. — V. 26. — P. 182–185.
14. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation / M.A.Biot // Journal of Applied Physics. — 1941. — V. 12, №. 2. — P. 155–164.
15. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media / M.A.Biot // J. Acoust. Soc. Amer. — 1962. — V. 34, № 5, Part 1. — P. 1254-1264.
16. Biot M.A. Mechanics of deformational and acoustic propagation in porous media / M.A.Biot // J. Appl. Physics. — 1962. — V. 33, № 4. — P. 1482-1498.
17. Biot M.A. The elastic coefficients of the theory of consolidation / M.A.Biot, D.G.Willis // J. Appl. Mechanics. — 1957. — P. 594-601.
18. Biot M.A. Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid / M.A.Biot // Journal of Applied Physics. — 1956. — V. 27, №. 5. — P. 459.
19. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid / M.A.Biot // J. Appl. Physics. — 1955. — V. 26, № 2. — P. 182-185.
20. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency Range / M.A.Biot // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — V. 28, № 2. — P.168-178.
21. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higer-Frequency Range / M.A.Biot // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — V. 28, № 2. — P. 179-191.

22. Birendra. J. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics / J.Birendra, J.Ruben // *ActaGeotechnica*. – 2007. – V. 2, №. 3. – P. 139-153.
23. Bonnet G. Basic singular solution for a poroelastic medium in the dynamic range / G.Bonnet // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1987. – V. 82. – P. 1758-1762.
24. Bowen R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixture/ R.M.Bowen // *International Journal of Engineering Science*. – 1982. – V. 20. – P. 697–735.
25. Bowen R.M. Theory of Mixtures. / R.M.Bowen, A.C.Eringen // *Continuum Physic*, Academic Press, New York. – 1976. – V. III. – P. 1–127.
26. Bowen R.M. Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures / R.M.Bowen // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1967. – V. 24. – P. 370–403.
27. Bowen R.M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures / R.M.Bowen // *International Journal of Engineering Science*. – 1980. – V. 18. – P. 1129–1148.
28. Brebbia C.A., Dominguez J. Boundary Elements: An Introductory Course, Second Edition / C.A.Brebbia, J.Dominguez. – Boston, Southampton: WIT PRESS. Computational Mechanics Publications, 1992. – 319 p.
29. Burrridge R. Poroelasticity equations derived from microstructure / R.Burrridge, J.Keller // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1981. – V. 70. – P. 1140–1146.
30. Cederbaum G. Poroelastic structures / G.Cederbaum, L.P.Li, K.Schulgasser. — Elsevier Science, 2000. – P.168. – (1 edition).
31. Chen, Z. Computational methods for multiphase flows in porous media / Z.Chen, G.Huan, Y.Ma. – Society for Industrial and Applied mathematics, 2006. – P. 184.
32. Cheng A.H.-D. Integral equations for dynamic poroelasticity in frequency domain with boundary element solution / A.H.-D.Cheng, T.Badmus, D.E.Beskot // *J. Eng. Mech.*, ASCE. – V. 117. – P. 1136-1157.
33. Cheng C.H. Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustic logs / C.H.Cheng, M.N.Toksoz // *Geophysics*. – 1991. – V. 46, N7. – P. 1042-1053.

34. Corcione J.M. Viscoelastic effective rheologies for modelling wave propagation in porous media / J.M.Corcione // *Geophys. Prospect.* – 1998. – V. 46. – P. 249-270.
35. Cruse T.A. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamics problem. 2 / T.A.Cruse // *Journ. Of Math. Analysis and its Appl.* – 1968. – V.22. – P. 341-355.
36. Cruse T.A., Rizzo F.I. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamics problem. 1 / T.A.Cruse, F.I.Rizzo // *Journ. Of Math. Analysis and its Appl.* – 1968. – V. 22. – P. 244-259.
37. Dargush G.F. Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity / G.F.Dargush, P.K.Banergee // *Int. J. Solid Struct.* – 1989. – № 25. – P. 999–1021.
38. Detournay E. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects* / E Detournay., A.H.-D.Cheng // *Analysis and Design Method* / ed. By C.Fairhurst. // Pergamon Press. – 1993. – V.II. – P. 113-171.
39. Dominguez J. Application of boundary element method in elastodynamics / J.Dominguez // *Betech '85. Proc. 1. Boundary Element Technol.* – 1985. – P. 105-127.
40. Dominguez J. *Boundary elements in dynamics* / J.Dominguez. – Computational Mechanics Publications. Southampton Boston, 1993. – 689 p.
41. Ehlers W. Challenges of porous media models in geo- and biomechanical engineering including electro-chemically active polymers and gels / W.Ehlers // *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematic* – 2009. – V. 1. – P.1–24.
42. Ehlers W. *Foundations of multiphasic and porous materials* / W.Ehlers, J.Bluh // *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, Springer, Berlin. – 2002. – P. 3–8.
43. Ehlers W. On thermodynamics of elasto-plastic porous media // *Archives of Mechanics.* – 1989 – V. 41 – P. 73–93.



44. Fick A. Ueber Diffusion / A.Fick // *Annalen der Physik und Chemie.* – 1855. – V. 94. – P. 59–86.
45. Fillunger P. Der Auftrieb in Talsperren / P.Fillunger // *Osterreichische Wochenschrift fur den offentlichen Baudienst.* – 1913. – V.19. – P. 532–556, 567–570.
46. Fjar E. Petroleum related rock mechanics / E.Fjar, R.M.Holt, A.M.Raaen et al. – Elsevier Science, 2008. – 514 p. – (2 edition).
47. Gao X. Radial integration BEM for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading / X.-W.Gao, B.-J.Zheng, K.Yang, Ch.Zhang // *Computers and Structures.* – 2015. – №158. – P. 140–147.
48. Gaspar F. J. A systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system / F.J.Gaspar, F.J.Lisbona, C.W.Oosterlee, R.Wienands // *Numerical Linear Algebra with Applications.* –2004. – V. 11, №. 23. – P. 93-113.
49. Gaspar F. J. On a decoupled algorithm for poroelasticity / F. J.Gaspar, F. J.Lisbona, C. W.Oosterlee // *Zaragoza-Pau on.* – 2006. – V. 424. – P. 419-424.
50. Gaspar F. J., Grigoriev A., Vabishchevich P. Explicit-implicit splitting schemes for some systems of evolutionary equations / F. J.Gaspar, A.Grigoriev, P.Vabishchevich // *International Journal of Numerical Analysis and Modeling.* – 2014. – V. 11, №. 2. – P. 346–357.
51. Gaspar F.J. A finite difference analysis of Biot’s consolidation model / F.J.Gaspar, F.J.Lisbona, P.N.Vabishchevich // *Applied numerical mathematics.* – 2003. –V. 44, №. 4. – P. 487–506.
52. Gaspar F.J. An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system / F.J.Gaspar, F.J.Lisbona // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2007. – V. 196, №. 8. – P. 1447–1457.
53. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Vabishchevich P.N. Staggered grid discretizations for the quasi-static Biot’s consolidation problem / F.J.Gaspar, F.J.Lisbona, P.N.Vabishchevich // *Applied Numerical Mathematics.* – 2006. – V. 56, №. 6. – P. 888–898.

54. Gaul, L. Boundary element methods for engineers and scientists / L.Gaul, M. Kogl, M.Wagner. – Berlin: Springer, 2003. – 488 p.
55. Geertsma J. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids / J.Geertsma, D. C.Smit // *Geophysics*. – 1961. – V. XXVI, № 2. – P. 169-181.
56. Gelinsky S. Dynamic poroelasticity of thinly layered structures / S.Gelinsky, S.A.Shapiro, T.Muller, B.Gurevich, // *Int. J. Structures*. – 1998. – V. 35. – P. 4739-4751.
57. Gelinsky S. Poroelastic Backus averaging for anisotropic layered fluid- and gas-saturated sediments / S.Gelinsky, S.A.Shapiro // *Geophysics*. – 1997. – V. 62, N6. – P. 1867-1878.
58. Gomes L.S. On the use of a 3-D fundamental solution for axisymmetric steady-state dynamic problems / L.S.Gomes, E.Alarcon, J.Dominguez // *Boundary Element Method Eng. Proc. 4th Int. Conf. Lake Como*. – 1985. – V. 1. – P. 297-311.
59. Green A.E. A contribution to the theory of non-linear diffusion / A.E.Green, J.E. Adkins // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1964. – V. 15. – P. 235–246.
60. Guiggiani M. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equation / M.Guiggiani, G.Krishnasamy, T.J.Rudolphi, F.J.Rizzo // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1992. – V. 59. – P. 604-614.
61. Gurevich B. Seismic attenuation in finely layered porous rocks: Effects of fluid flow and scattering / B.Gurevich, V.B.Zyrianov, S. L.Lopatnikov // *Geophysics*. – 1997. – V. 62, N1. – P. 310-324.
62. Gurevich B. Velocity and attenuation of elastic waves in finely layered porous rocks / B.Gurevich, S. L.Lopatnikov // *Geophys. J. Internat.* – 1995. – V. 121. – P. 933-947.
63. Hanyga A. Wave propagation in micro-heterogeneous porous media: A model based on an integro-differential wave equation / A.Hanyga, V.E.Rok // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2000. – V. 107, N6. – P. 2965-2972.

64. Jentsch L. Interaction between thermoelastic and scalar oscillation fields / L.Jentsch, D.Natroshvili // *Integral Equations Operator Theory*. – 1997. – №28. – P. 261-288.
65. Jones T. Pore fluids and frequency dependent wave propagation in rocks / T.Jones // *Geophysics*. – 1986. – V. 51. – P. 1939-1953.
66. Kara I.D. Numerical solution of the problem of porous solids vibration // *Strength of Materials and Theory of Structures*. – K.: KNUBA, 2017. – № 99. – P. 193 – 202.
67. Kara I.D. Peculiarities of wave propagation processes in poroelastic media // *Strength of Materials and Theory of Structures*. – K.: KNUBA, 2020. – № 105. – P. 247-254.
68. Kim J. Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics / J.Kim, H.Tchelepi, R.Juanes // *SPE Journal*. – 2011. – V. 12. – P. 2-4.
69. Kögl M. A dual reciprocity boundary element method for dynamic coupled anisotropic thermoelasticity / M.Kögl, L.Gaul. – Southampton (UK): WIT Press, 2000.
70. Kögl M.A. A Boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity / M.Kögl, L.Gaul // *Arch Appl Mech*. – 2003. – №73. – P. 377–98.
71. Lagnese J.E. Boundary stabilization of thin plates / J.E.Lagnese. — Philadelphia:Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989. – P. 185.
72. Li P. Boundary element formulation for partially saturated poroelastic media / P.Li, M.Schanz // *Poromechanics V* © ASCE. – 2013. – P. 834- 843.
73. Li P. Boundary element method for wave propagation in partially saturated poroelastic continua / P.Li. - Verlag der Technischen Universität Graz, 2012. – 143 p.
74. Mackerli, J. FEM and BEM in the context of information retrieval / J. Mackerli // *Computers and Structures*. – 2002. – № 80. – P. 1595-1604.

75. Manolis G.D. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity / G.D.Manolis, D.E.Beskos // *Acta Mechanica*. – 1989. – № 76. – P. 89-104.
76. Mavko G. Attenuation in partially saturated rocks / G.Mavko, A.Nur // *Geophysics*. – 1979. – V. 44. – P. 161-178.
77. Mavko G. Melt Squirt in Aesthenosphere / G.Mavko, A.Nur // *J. Geophys. Res.* – 1975. – V. 80. –P. 1444-1448.
78. Mikelic A. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics / A.Mikelic, M.F.Wheeler // *Computational Geosciences*. – 2012. – V. 17, №. 3. – P. 455-461.
79. Mukhrjee Y.X. Thermoelastic fracture mechanics with regularized hipersingular boundary integral equations / Y.X.Mukhrjee, K.Shah, S.Mukhrjee // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 1999. – № 83. – P. 673-684.
80. Muller I.A. thermodynamic theory of mixtures of fluids / I.A.Muller // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1968 – V. 28 – P. 1–39.
81. Nardini D. A new approach to free vibration analysis using boundary elements / D.Nardini, C.A.Brebbia // *Appl. Math. Model.* – 1983. – V. 7. – P. 157-162.
82. Nguyen K.V. A two-dimensional integral formulation with fundamental solutions for dynamic poroelasticity in time domain / K.V.Nguyen, B.Gatmiri // *13th World Conference on Earthquake Engineering, 1-6 August 2004, Vancouver, B.C., Canada – 2004*. – № 2449. – P. 1-13.
83. Norris A N. Low-frequency Dispersion and Attenuation in Partially Saturated Rocks / A N.Norris // *J.Acoust. Soc. Am.* – 1993. V. 94. –P. 359-370.
84. O’Connel R.J. Viscoelastic properties of fluid-saturated cracked solids / R.J.O’Connel, B.Budiansky // *J.Geophys. Res.* – 1977. – V. 82. – P. 5719-5735.
85. Osorio J L. A two-domain, 3D, fully coupled fluid-flow geomechanical simulation model for reservoirs with stress-sensitive mechanical and fluid-flow properties / J.G.Osorio, H.-Y.Chen, L.Teufel, S.Schaffer // *SPE/ISRM Eurock, Trondheim, Norway, 8–10 July*. – 1998.

86. Osorio J. Numerical simulation of the impact of flow-induced geomechanical response on the productivity of stress-sensitive reservoirs / J.G.Osorio, H.-Y.Chen, L.Teufel // SPE Reservoir Simulation Symposium. – 1999.
87. Osorio J.G. Numerical Simulation of Coupled Fluid-Flow Geomechanical Behavior of Tight Gas Reservoirs with Stress Sensitive Permeability / J.G.Osorio, H.-Y.Chen // SPE Fifth Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition. – 1997.
88. Park K.H. Two- and three-dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals / K.H.Park, P.K.Banerjee // Int J Solids Struct. – 2002. – №39. – P. 2871–92.
89. Parra J.O. Poroelastic model to relate seismic wave attenuation and dispersion to permeability anisotropy / J.O.Parra // Geophysics. – 2000. – V. 65, N1. – P. 202-210.
90. Parra J.O. The transversely isotropic poroelastic wave equation including the Biot and the squirt mechanisms: Theory and application / J.O.Parra // Geophysics. – 1997. – V. 62, N1. – P. 309-318.
91. Pride S. Biot slow-wave effects in stratified rock / S.Pride, E.Tromeur, J.Berryman // Geophysics. – 2002. – V. 67. – P. 271-281.
92. Pride S., Tromeur E., Berryman J. Biot slow-wave effects in stratified rock / S.Pride, E.Tromeur, J.Berryman // Geophysics. – 2002. – V. 67. – P. 271-281.
93. Pride S.R. Deriving the equations of motion for porous isotropic media / S.R.Pride, A. F.Gangi, F.D.Morgan // J. Acoust. Soc. Am. – 1992. – V. 6. – P. 3278–3290.
94. Rendulic L. Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen / L.Rendulic // Der Bauingenieur. – 1936. – №. 17. – P. 559–564.
95. Rizzo F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics / F.J.Rizzo // Quart. Appl. Math. – 1967. – V. 25, № 1. – P.83-95.
96. Rudnicki J.W. Linear poroelasticity / J.W.Rudnicki // Lemaitre Handbook of Materials Behavior Models. – 2001. – P. 1118-1125. – (Section 11.6).

97. Schanz M. Application of 3D time domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solid / M.Schanz // *Engineering Analysis with Boundary Elements* – 2001. – № 25. – P. 363-376.
98. Schanz M. Convolution quadrature boundary element method for quasi-static visco- and poroelastic continua / M.Schanz, H.Antes, T.Rüberg // *Computers and Structures*. – 2005. – № 83. – P. 673–684.
99. Schanz M. Quasi-static poroelastic boundary element formulation based on the convolution quadrature method / M.Schanz, T.Rüberg, V.Struckmeier // *Comput. Mech.* – 2005. – № 37. – P. 70–77.
100. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua / M.Schanz. – Berlin: Springer, 2001. –170 p.
101. Sharahi M.J. Dynamic analysis of 3D saturated poroelastic media with boundary element method / M.J.Sharahi, M.Kamalian // *The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, 1-6 October 2008, Goa, India – 2008. – P. 220-228.
102. Sharma M.D. Wave propagation in a general anisotropic poroelastic medium: Biot's theories and homogenization theory / M.D.Sharma // *J. Earth. Syst. Sci.* – 2007. – V. 116, № 4. – P. 357-367.
103. Shiah Y.C. Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity. / Y.C.Shiah, C.L.Tan // *Comput Mech.* – 1999. – № 23. – P. 87-96.
104. Sladek V. Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis / V.Sladek, J.Sladek // *Appl. Math. Modelling.* – 1984. –№ 7. – P. 241–253.
105. Stefan J. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen / J.Stefan // *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse.* – 1871. – V. Abteilung IIa 63. – P. 63–124.

106. Taber L.A. Axisymmetric deformation of poroelastic shells of revolution // *International journal of solids and structures* / L.A.Taber // – 1992. – V.29. – P. 3125-3143.
107. Taber L.A. Poroelastic Plate and Shell Theories / L.A.Taber, A.M.Puleo // *Mechanics of Poroelastic Media* / Ed. by A. P. S. Selvadurai. – Dordrecht : Springer Netherlands, 1996. – V. 35. – P. 323–337.
108. Tang X.M. Dynamic permeability and borehole Stoneley waves: a simplified Biot-Rosenbaum model / X.M.Tang, C.H.Cheng, M.N.Toksoz // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1991. – Vol. 90, N3. – P. 1632-1646.
109. Tehrani P.H. Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation / P.H.Tehrani, M.R.Eslami // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 1998. – V. 22, № 3, – P. 245-250.
110. Tehrani P.H. Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation / P.H.Tehrani, M.R.Eslami // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 1998. – V. 22, № 3, – P. 245-250.
111. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen / K.von Terzaghi // *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*. – 1923, – V. Abteilung IIa 132. – P. 125–138.
112. Theodorakopoulos D.D. Flexural vibrations of poroelastic plates / D.D.Theodorakopoulos, D.E.Beskos // *Acta Mechanica*. – 1994. – V. 203. — P. 191–203.
113. Torraca G. Porous Building Materials: materials science for architectural conservation / G.Torraca. – Rome: ICCROM, 2005. – P.149.
114. Tosaka N. Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems / N.Tosaka, I.G.Suh // *Computational Mechanics*. – 1991. – V. 8. – P. 331-342.

115. Truesdell C. Thermodynamics of diffusion / C.Truesdell // Rational Thermodynamics, 2nd edn, Springer, New York. – 1984. – P. 219–236.
116. Truesdell C.A. Sulle basi della termodinamica delle miscele / C.A.Truesdell // Rendiconti Lincei. – 1968. – V.44. – P. 381–383.
117. Truesdell C.A. Sulle basi della termomeccanica / C.A.Truesdell // Rendiconti Lincei. – 1957. – V.22. – P. 33–38.
118. Truesdell C.A. The classical field theories / C.A.Truesdell, R.A.Toupin // Handbuch der Physik, Springer, Berlin. – 1960. – V. III(1). – P. 226–902.
119. Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology / H.F.Wang. — Princeton University Pres, 2000. – P. 276.
120. Wang Jian-Hua, Lu Jian-Fei, Zhou Xiang-Lian. Complex variable function method for the scattering of plane waves by an arbitrary hole in a porous medium / Jian-Hua Wang, Jian-Fei Lu, Xiang-Lian Zhou // European Journal of Mechanics. – 2009. – V. 28, № 3. – P. 582-590.
121. Whitaker S. Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow / S.Whitaker // Transport in Porous Media. – 1986. – V. 1. – P. 105–125;
122. Woltman R. Beytrage zur Hydraulischen Architektur. Dritter Band / R.Woltman. – Gottingen:, Dietrich, 1794.
123. Yew C.H. The determination of Biot parameters for sandstone / C.H.Yew, P.N.Jogi // Experimental Mechanics. – 1978. – №.19. – P. 167-177.
124. Zoback M.D. Reservoir Geomechanics / M.D.Zoback. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – P. 461.
125. Абдуллаев С.А. Распространение упругих волн, вызванных движущейся нагрузкой, в изотропном пористом полупространстве, насыщенном жидкостью / С.А.Абдуллаев, А.С.Соатов // Известия Академии наук УзССР. Сер.: Технические науки. – 1986. – №6. – С. 64-67.
126. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций на протяженных цилиндрических полостях в упругих средах / Л.А.Алексеева,



- Г.К.Кайшибаева // 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Нижний Новгород, 2006. – С. 14.
127. Аменицкий А.В. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В.Аменицкий, А.А.Белов, Л.А.Игумнов, И.С.Карелин // Проблемы прочности и пластичности. 2009. Вып. 71. – С. 164-171.
128. Аменицкий А.В. Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах / А.В.Аменицкий, Л.А.Игумнов, И.С.Карелин // Проблемы прочности и пластичности. – 2008. – Вып. 70. – С. 71-78.
129. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементный анализ динамической осадки пороупругой колонны // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72. – С. 154-158.
130. Артиков Т.У. Волны в слоистых пористых средах / Т.У.Артиков. – Ташкент: Фан., 1987. – 268 с.
131. Баженов В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г.Баженов, Л.А.Игумнов. – М.: Физматлит, 2008, – 352 с.
132. Басниев К.С. Подземная гидромеханика / К.С.Басниев, И.Н.Кочина, В.М.Максимов.— М.: Недра, 1993. — 416 с.
133. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках. Пер. с англ. / П.Бенерджи, Р.Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. — 494 с.
134. Бидерман В.Л. Расчет цилиндрических и прямоугольных длинных резиновых амортизаторов сжатия / В.Л. Бидерман, Н.А. Сухова // Расчеты на прочность. – 1968. – №13. – С. 55-72.
135. Богачев И.В. Воздействие сосредоточенного усилия на анизотропную пороупругую плоскость / И.В.Богачев, В.В.Дударев, А.А.Ляпин // Инженерный вестник Дона. – 2013. – Т. 26, № 3. – С. 1-5.

136. Бреббиа К.А. Применение метода граничных элементов в технике / К.А.Бреббиа, С.Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
137. Ватульян А.О. О колебаниях функционально-градиентной пороупругой колонны / А.О. Ватульян, А.А. Ляпин, Ю.А. Святко // Естественные науки. Известия вузов. Северо-кавказский регион. – 2014. – Вып. 34. – С. 12–17.
138. Верюжский Ю.В. Определение частот собственных колебаний упругих тел методом потенциала / Ю.В.Верюжский, Ч.Б.Кьонг. – Киев. ин-т инж. гражд. авиации, 1990. – 13 с. – Дел. в ВИНТИ 9.01.90. № 161, В. 90.
139. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики / Ю.В.Верюжский – К.: Вища школа, 1978. – 183 с.
140. Ворона Ю.В. Граничноелементна методика дослідження коливань пружних масивів з урахуванням випадкового характеру констант матеріалу / Ворона Ю.В., Кара І.Д., Щербій В.І. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. – Вип. 100. – С. 59-70.
141. Ворона Ю.В. Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання динамічних задач термопружності / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 96. – С. 74-87.
142. Ворона Ю.В. Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.
143. Ворона Ю.В. Розповсюдження циліндричних хвиль у пороупругому середовищі / Ворона Ю.В., Кара І.Д. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 146-152.
144. Гарипов Т.Т. Математическое моделирование процессов фильтрации и пороупругости / Т.Т.Гарипов, М.Ю.Заславский, А.Х.Пергамент // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, №9. – С. 113-128.
145. Грабовский П.А. Пористые системы сбора и распределения воды. Конструкции и расчет / П.А.Грабовский, И.А.Грачев // Сборник докладов Международного конгресса ЕТВК. – 2015. – С. 83-86.

146. Донцов В.Е. Распространение ударных волн в пористой среде, насыщенной жидкостью с пузырьками растворимого газа / В.Е.Донцов, В.Е.Накоряков // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 91-102.
147. Дунин, С.З. Продольные волны в частично насыщенных пористых средах. Влияние газовых пузырьков / С.З. Дунин, Д.Н. Михайлов, В.Н. Николаевский // ПММ. – 2006. – Т. 70. – Вып. 2. – С. 282–294.
148. Дымников С.И. Расчет резинотехнических деталей при средних деформациях / С.И. Дымников // Механика полимеров. – 1968. – №2. – С. 271-275.
149. Дырда В.И. Обоснование и выбор параметров резинометаллических сейсмопор / В.И.Дырда, Н.Г.Марьенков и др. // Геотехническая механика. – 2009. – Вып. 84. – С. 17-23.
150. Ефремов А.В. Анализ напряженно-деформированного состояния круглой пористой пластины при нестационарном режиме нагрева / А.В.Ефремов, С.М.Шляхов // Математические методы в технике и технологиях ММТТ-21: сб. тр.ХХІ Междунар. науч. конф., 27-30 мая 2008 г. – Саратов, 2008. – Т. 1. – С. 188-191.
151. Ефремов А.В. Связанная нестационарная задача теплопроводности и термоупругости балки-пластинки из пористого материала / А.В.Ефремов, С.М.Шляхов // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – №2. – С. 28-30.
152. Игумнов Л.А. Моделирование динамики частично насыщенных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов / Л.А.Игумнов, А.Н.Петров // Вестник ПНИПУ. Механика.– 2016. – № 3. – С. 47–61.
153. Игумнов Л.А. Применение метода граничных интегральных уравнений для анализа задач трехмерной динамической теории термоупругости / Л.А.Игумнов, С.Ю.Литвинчук, В.П.Пазин // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72. – С. 146-153.

154. Игумнов Л.А. Применение метода граничных интегральных уравнений для анализа задач трехмерной динамической теории упругости / Л.А.Игумнов, С.Ю.Литвинчук, В.П.Пазин // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72. – С. 146-153.
155. Игумнов Л.А. Решение трехмерных задач динамической теории пороупругости методом граничных элементов с применением параллельных вычислений / Л.А.Игумнов, И.С.Карелин // Механика деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2011 – Вып. 3 (1). – С. 153–157.
156. Игумнов Л.А. Численно-аналитическое моделирование динамики трехмерных составных пороупругих тел: [электронное учебно-методическое пособие] / Л.А.Игумнов, С.Ю.Литвинчук, А.В.Аменицкий, А.А.Белов. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 52 с.
157. Игумнов Л.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: [учебно-методическое пособие] / Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А.. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – С. 43 с.
158. Имомназаров Х.Х. Сосредоточенная сила в однородной изотропной пористой среде / Х.Х.Имомназаров, С.Т.Туйчиева // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2015. – Т. 4, № 1. – С. 201-204.
159. Ипатов А.А. Исследование динамики трехмерных поровязкоупругих призматических тел и полупространства МГЕ / А.А.Ипатов, А.А.Белов, С.Ю.Литвинчук // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 4. – С. 248–262.
160. Каштан Б.М. Поле точеного источника, помещенного в скважину, окруженную пористой средой Био / Каштан Б.М., Бакулин А.В., Зиатдинов С.Р., Головина С.М. // Вопросы геофизики. СПб. – 2005. – Вып. 38. – С. 24-36. – (Ученые записки СПбГУ; № 438).
161. Ковтун Ал.А. Об уравнениях модели Био и их модификациях / Ал.А.Ковтун // Вопросы геофизики. СПб. – 2011. – Вып. 44. – С. 3-26. – (Ученые записки СПбГУ; №444).

162. Ковтун Ал.А. Поверхностные волны на границе упруго-пористой среды и жидкости / Ал.А.Ковтун // Вопросы геофизики. СПб. – 2013. – Вып. 46. – С. 14-25. – (Ученые записки СПбГУ; №446).
163. Колесов А.Є. Численное моделирование проблем пороупругости: дис. ... доктора физ.-мат. наук : 05.13.18 / Колесов Александр Егорович. – Якутск, 2015 – 124 с.
164. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А.Н.Коновалов. — Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
165. Копылова Г.Н. Оценка пороупругих параметров резервуаров подземных вод по данным уровнемерных наблюдений / Г.Н.Копылова, С.В.Болдина // Комплексные сейсмологические и геофизические исследования Камчатки. – 2004. – С. 405-421.
166. Костерин А. В. Численное исследование фильтрационной консолидации / А.В.Костерин, М.Ф.Павлова, Е.В.Шемуранова // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 9. – С. 63–70.
167. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. / С.Крауч, А.Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
168. Кузнецов А.В. Численное моделирование динамики трехмерных однородных пороупругих тел / А.В.Кузнецов, А.А.Белов, А.В.Аменицкий // Механика деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2011 – Вып. 4 (4). – С. 1554–1556.
169. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости / В.Д.Купрадзе. – М.: Государственное изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 473 с.
170. Кыонг Ч.В. Применение численных методов обращения преобразований Лапласа к решению динамических задач / Ч.В.Кыонг // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1976. – Вып. 28. – С. 110-116.
171. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий / Э.Э.Лавендел. М. Машиностроение, 1976. – 232с.
172. Лебедева Е.А. Метод ГИУ в краевых задачах трехмерной динамической теории вязкоупругости / Е.А. Лебедева, С.Ю. Литвинчук // Механика

- деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2011 – Вып. 4 (4). – С. 1569–1570.
173. Мальков В.М. Механика многослоных эластомерных конструкций / В.М.Мальков. – С-Пб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998. – 320с.
174. Марков И.П. Решение статических и динамических трехмерных задач линейной электромагнитоупругости с помощью МГЭ / И.П.Марков // Вестник ПНИПУ. МЕХАНИКА. – 2016. – Вып. 3. – С. 120–130.
175. Марфин Е.А. Упругие волны в насыщенных пористых средах: [учебно-методическое пособие] / Е.А.Марфин, М.Н.Овчинников. – Казань: Казанский университет, 2012. – 28 с.
176. Маслов Л.Б. Математическая модель структурной перестройки костной ткани / Л.Б.Маслов // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 17, № 2 (60). – С. 39–63.
177. Маслов Л.Б. Пороупругая модель колебаний твердых биологических тканей при гармоническом воздействии / Л.Б.Маслов // Вестник ИГЭУ. – 2009. – Вып. 3. – С. 1-4.
178. Маслов Л.Б. Пороупругие модели колебаний биологических тканей / Л.Б.Маслов // Мезо-, нано-, биомеханика и механика природных процессов. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – № 4 (2). – С.499–501.
179. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / Под ред. Т.Круза и Ф.Риццо. – М.: Мир, 1978. – 210 с.
180. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г.Михлин. – М.: Физматлит, 1962. – 254 с.
181. Молотков Л.А. Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред / Л.А.Молотков. – СПб.: Наука, 2001. – 347 с.

182. Москалев П.В. Математическое моделирование пористых структур / П.В. Москалев, В.В.Шитов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 120 с.
183. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта-функции от свободной поверхности / В.К.Мусаев // Весн. РУДН Сер. Пробл. Комплекс. Безоп. – 2008. – № 1. – С.43-51.
184. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
185. Нагорный В.П. Взрывные работы при добыче природных углеводородов, строительстве магистральных трубопроводов и подземных хранилищ / В.П.Нагорный., В.М.Глоба, И.И.Денисюк; под редакцией В.П.Нагорного // К: Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, 2009. – С. 330.
186. Нагорный В.П. Подземные хранилища углеводородов / В.П.Нагорный., В.М.Глоба; под редакцией В.П.Нагорного // К: Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, 2014. – С. 287.
187. Назаренко А.М. Дифракция плоских гармонических волн на периодической системе жестких цилиндров / А.М.Назаренко, А.М.Ложкин // Динам. системы. – 2006. – №20. – С. 59-67.
188. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И.Нигматулин. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
189. Николаевский В.Н. Механика насыщенных пористых сред / В.Н.Николаевский, К.С.Басниев, А.Т.Горбунов, Г.А.Зотов. – М.: Недра, 1970. – 339 с.
190. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред / В.Н.Николаевский. – М.:Недра, 1984. – 233 с.
191. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В.Новацкий. – М.: Мир, 1970 / Под ред. Г.С. Шапиро. – 256 с.
192. Новацкий В. Теория упругости / В.Новацкий; [пер. с польского Б.Е.Победри]. – М.:Мир, 1975. – 872 с.

193. Павлова М.Ф. Исследование неявной разностной схемы для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации / М.Ф.Павлова, Е.В.Рунг // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, № 4. – С. 33–48.
194. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости / В.З.Партон, П.И.Перлин. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
195. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости: [Электронный ресурс] / А.А.Белов [та ін.] // Труды МАИ. – № 40. – С. 1-20. – Режим доступа до журн.: <http://www.mai.ru/science/trudy/>
196. Прогульный В.И. Пористые конструкции для водопроводных сооружений / В.И.Прогульный // Сборник докладов Международного конгресса ЕТВК. – 2005. – С. 269-272.
197. Ройтфарб И.З. Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала / И.З.Ройтфарб, Ч.Б.Кыонг // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1976. – Вып. 29. – С. 32-38.
198. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э.Санчес-Паленсия. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
199. Сорокин К.Э. Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористых сред / К.Э.Сорокин, Х.Х.Имомназаров // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2010. – № 3(2). – С. 256-261.
200. Справочник по специальным функциям: довідник / [под. ред. М.Абрамовица, И.Стиган]. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
201. Сухова Н.А. К расчету резиновых амортизаторов, работающих на сжатие / Н.А.Сухова, В.Л. Бидерман // Расчеты на прочность. – 1962. – №8. – С.200-211.
202. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости: [монография] / [В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили,



- Г.В.Бурчуладзе] под общей редакцией В.Д.Купрадзе.; – М.: Наука, 1976. – 664 с.
203. Уайт Дж.Э. Низкочастотные сейсмические волны в флюидонасыщенных слоистых породах / Дж.Э.Уайт, Н. Г.Михайлова, Ф.М.Ляховицкий // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1975. – Т. 11, №10. – С. 654-659.
204. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г.Угодчиков, Н.М.Хуторянский. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986. – 295 с.
205. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве / Я.И.Френкель // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. – 1984. – Т.8, № 4. – С. 133-150.
206. Хуторянский Н.М. К решению стационарных динамических граничных задач трехмерной теории упругости / Н.М.Хуторянский // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1976. – Вып. 4. – С. 22-28.
207. Черный А.А., Черный В.А. Пористые материалы и изделия, их улучшение на основе математического моделирования: [Учеб. пособие] / А.А.Черный, В.А.Черный. – Пенза: Пенз.гос.ун-т, 2007. – 36 с.
208. Юречко В.З. Нпружено-деформований стан пористих еластомерних матеріалів в умовах нелінійного деформування: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Юречко Василь Зіновійович. – Запоріжжя, 2015 – 134 с.