Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет
будівництва і архітектури

ПІКУЛЬ АНАТОЛІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 539.3

Методика розрахунку нетонких пластин та оболонок на основі просторових криволінійних скінченних елементів

05.23.17 — будівельна механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті будівництва і архітектури МОН України.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор
Іванченко Григорій Михайлович,
Київський національний університет будівництва і архітектури МОН України,
декан будівельного факультету, професор кафедри будівельної механіки.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
Чирков Олександр Юрійович,
Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, провідний науковий співробітник відділу чисельних і експериментальних методів дослідження конструкційної міцності;

кандидат технічних наук, доцент
Андрусенко Олена Миколаївна,
Національний транспортний університет МОН України, доцент кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «4» липня 2019 р. о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, Повітрофлотський просп., 31.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури.

Автореферат розісланий «29» травня 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат технічних наук, доцент Михайловський Д. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В сучасному будівництві використовують нетонкі пластини та оболонки (фланцеві з'єднання вузлів металевих балок, плити опорних баз металевих колон, плитні фундаменти, підземні залізобетонні резервуари, елементи тунелів, захисні оболонки реакторів, муфти з'єднання арматурних стрижнів). Збільшення товщини таких елементів погіршує точність їх розрахунку в більшості програмних комплексів, де розрахунок базується на теорії тонких пластин і оболонок. Опорні та навантажуючі елементи, часто розміщені по області пластин, створюють складний напружено-деформований стан з великими перепадами функції напруження по товщині пластини. Побудова співвідношень на основі гіпотез Кірхгофа-Лява не дає можливості врахувати всі напруження, що призводить до великої похибки при розрахунку таких конструкцій.

Дослідженню та розрахункам товстостінних конструкцій присвячено багато праць, однак більшість з них відображає лише часткові випадки вирішення проблематики або ж є теоретичними і непридатними для розрахунків складних конструкцій в цілому за допомогою програмних комплексів широкого використання.

Чисельна реалізація алгоритму з використанням просторового криволінійного скінченного елемента для розрахунку нетонких пластин і оболонок дозволяє отримати більш адекватну оцінку напружено-деформованого стану конструкцій, що проектуються, у порівнянні з результатами розв'язку, отриманого на основі теорії тонких оболонок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відповідності з тематикою і загальним планом наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) і Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА, зокрема з держбюджетною темою 3 ДБ-2008 "Теоретичні основи та методики дослідження стійкості та руйнування просторових тонкостінних конструкцій пружних систем" (№ держ. реєстрації 0108U000230). Автор приймав безпосередню участь у виконанні цієї науково-дослідної роботи як співвиконавець.

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у створенні ефективної методики розрахунку конструкцій з нетонких пластин і оболонок на основі просторових криволінійних СЕ та розробці програмного забезпечення для її чисельної реалізації, а також, у виконанні дослідження напружено-деформованого стану конструкцій з нетонких пластин і оболонок.

Для досягнення мети було здійснено:

— досліджено проблему використання криволінійних СЕ;
— виведено співвідношення для нового просторового СЕ в криволінійній системі координат з векторною апроксимацією функції переміщень у радях Маклорена;
— побудовано узагальнену матрицю жорсткості просторового криволінійного СЕ;
— сформульовано алгоритм визначення приведених пружних характеристик просторових ортотропних СЕ, необхідних в процесі розрахунку біматеріальних конструкцій за допомогою МСЕ;
— впроваджено запропонований просторовий криволінійний СЕ в розрахунковий процесор ПК "ЛІРА-САПР";
— проведено числові експерименти для дослідження збіжності розв'язків задач нетонких пластин і оболонок із використанням розробленого СЕ;
— визначено межі застосування просторового криволінійного СЕ при розрахунку конструкцій за умов статичного навантаження;
— проведено розв'язання прикладних задач дослідження напружено-деформованого стану фланцевих з'єднань вузлів металевих конструкцій, опорної плити бази круглого пілона, товстої фундаментної плити 30-поверхової житлової будівлі.

Об'єктом дослідження є методика розв'язання задач про напружено-деформований стан нетонких пластин та оболонок на основі просторових криволінійних скінченних елементів.

Предметом дослідження є параметри НДС нетонких пластин та оболонок у фізично лінійній та нелінійній постановках.

Методи дослідження. Співвідношення просторового криволінійного СЕ побудовано на основі рівнянь теорії пружності. Для розв'язання задач про НДС нетонких пластин та оболонок застосований метод скінченних елементів. Для розв'язання задач у фізично нелінійній постановці використовується метод послідовних навантажень. Для розв'язання СЛАР використовується метод Гауса.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у створенні на основі методу скінченних елементів ефективної методики дослідження напружено-деформованого стану в задачах деформування нетонких плит та оболонок нульової або додатньої гаусової кривизни при статичному навантаженні.

При цьому:

— створено новий тип просторового криволінійного скінченного елемента оболонки з векторною апроксимацією функції переміщень у рядах Маклорена, для якого вперше отримані розрахункові співвідношення методу скінченних елементів;

— для розробленого скінченного елемента отримано узагальнену матрицю жорсткості, що враховує зміщення скінченного елемента як жорсткого цілого;

— отримано співвідношення для визначення деформацій та напружень у центрі скінченного елемента;

— отримані розрахункові співвідношення та алгоритми апробовано на великій кількості тестових задач пружного деформування при статичному навантаженні: товсті плити з різними умовами обпирання, згин трансверсально-ізотропних пластинок, розтяг товстостінного циліндра, рівновага товстостінних циліндра та сфери під дією внутрішнього та зовнішнього тиску;

— отримано нові результати розрахунку відповідальних конструкцій (фланцевих з'єднань вузлів металевих конструкцій, опорної плити бази круглого пілона, товстої фундаментної плити 30-поверхової житлової будівлі), у яких проаналізовано зміни в НДС при комплексній дії силових факторів - постійних, технологічних і позапроектних навантажень, а також амплітудних інерційних сил від вітрових та сейсмічних навантажень.

Практичне значення одержаних результатів полягає у створенні програмного забезпечення, що дозволяє ефективно досліджувати напружено-деформований стан нетонких пластин та оболонок нульової та додатньої гаусової кривизни. Розроблений у межах дисертаційної роботи просторовий криволінійний СЕ впроваджено в розрахунковий процесор ПК "ЛІРА-САПР". Запропоновані в дисертації методики можуть бути корисними для покращення точності розрахунку будівельних конструкцій – фланцевих з'єднань вузлів балок та колон, плит опорних баз колон в металевих конструкціях, товстих фундаментних плит, підземних резервуарів та інших конструкцій з нетонких пластин та оболонок. З іншого боку, запропонований СЕ дозволяє зменшити кількість елементів розрахункової схеми, що прискорює розрахунок, не погіршуючи його точність.

Особистий внесок здобувача. Сумісно з Євгеном Олександровичем Гоцуляком розроблено методику досліджень та сформульовано основні тестові задачі для тестування матриці жорсткості просторового криволінійного СЕ. Основні результати, що виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно. У наукових працях автору належить: [1,5-7] – участь у постановці задачі та виконання розрахунків, [2,8] – постановка проблеми та виведення співвідношень, [9] – участь у постановці проблеми та виведення співвідношень для визначення приведених жорсткостей, [3,10,11] – постановка та розв'язання прикладних задач, [12] – розв'язання тестових задач, [4] – участь у постановці проблеми та виведення основних співвідношень для запропонованого СЕ. Співавторам в [1,4–7,9] належить формулювання загальної проблеми дослідження, участь у постановці задач та вибір методів їх розв'язання, участь спільно зі здобувачем в обговоренні отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах: 71-а Науково-практична конференція КНУБА (2010 р.); 72-а Науково-практична конференція КНУБА (2011 р.); 73-а Науково-практична конференція КНУБА (2012 р.); IV Міжнародний симпозіум "Актуальні проблеми комп'ютерного моделювання конструкцій і споруд"(Російська Федерація, м. Челябінск, 2012 р.); Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів (КНУБА, 2012 р.); II Міжнародна польсько-українська науково-технічна конференція "Актуальні проблеми металевих конструкцій"

(Польща, м. Гданськ, 2014 р.); IV Міжнародна конференція "Актуальні проблеми інженерної механіки"ОДАБА (2017 р.); Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні методи і проблемно-орієнтовні комплекси розрахунку конструкцій та їх застосування в проектуванні та навчальному процесі"(КНУБА, 2017 р.); II Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні методи і проблемно-орієнтовні комплекси розрахунку конструкцій та їх застосування в проектуванні та навчальному процесі"(КНУБА, 2018 р.); "Інженерно-будівельне проектування у відповідності до європейських норм (Єврокодів)"(ВГО ‘‘Гільдія проектувальників у будівництві”, Київ, 2018 р.).

У повному обсязі дисертація доповідалась на кафедрі будівельної механіки КНУБА (Київ, 2019 р.).

Публікації. Результати досліджень, які представлені в дисертації, опубліковано в 12 наукових працях, з яких 6 – у наукових фахових виданнях України та іноземних держав, що включені до міжнародних наукометричних баз, у публікаціях матеріалів міжнародних та вітчизняних науково-практичних конференцій та симпозіумів – 6. Основні результати наведено в [1-12] .

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків. Обсяг дисертації становить 187 сторінок машинописного тексту, в т. ч. 59 рисунків, 27 таблиць та список використаних джерел із 185 найменування на 20 сторінках, 4 додатки на 13 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертаційної роботи; обгрунтовано актуальність теми дисертації, її зв’язок з науковими програмами; визначено мету роботи та задачі дослідження; наведено дані про апробацію результатів дисертації; показано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У **розділі 1** наведено огляд літературних джерел за темою дисертації та сформульовано постановку задачі.

На сьогоднішній день теорія оболонок є одним із найбільш актуальних розділів теорії пружності. Суттєвий внесок до формування загальних гіпотез і побудови розрахункових співвідношень теорії оболонок зробили відомі вчені Г. Кірхгоф, Г. Арон, Н. А. Алумяе, С. О. Амбарцумян, В. В. Болотін, В. І. Блох, І. Н. Векуа, В. З. Власов, А. М. Воїн, А. С. Вольмір, І. І. Ворович, К. З. Галімов, О. Л. Гольденвейзер, Е. І. Григолюк, О. М. Гузь, С. П. Демідов, А. А. Ільюшин, М. О. Кільчевський, А. І. Лур'є, А. Ляв, Х. М. Муштарі, В. В. Новожилов, Ю. М. Работнов, Г. М. Савін, С. П. Тимошенко, К. Ф. Черних, І. С. Чернишенко, Ю. М. Шевченко, J. Geckeler, W. T. Koiter, H. Reissner та ін.

Товщина пластини чи оболонки при згині має набагато більший вплив на її властивості ніж інші її розміри. Під нетонкими оболонками слід розуміти такі оболонки, товщина яких має один порядок з радіусами кривизни. Також варто вважати нетонкими оболонки при дослідженні напружено-деформованого стану в околі точок прикладання зосереджених сил. Наближені теорії тонких пластин не придатні для пластин значної товщини, особливо, якщо вони піддаються дії зосередженого навантаження. В таких випадках слід користуватися теорією товстих пластин та оболонок, де задача про пластини розглядається як тривимірна задача теорії пружності. Тому дослідження напружень набуває більш складного характеру і на даний час повний розв'язок існує лише для небагатьох часткових випадків.

Деякі наукові праці присвячені зведенню тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної на основі методу розкладу переміщення в нескінченний ряд, без застосування спрощуючих гіпотез. До таких досліджень відносяться роботи І. Н. Векуа, В. З. Власова, Б. Г. Гальоркіна, О. С. Космодаміанського, В. А. Шалдирвана, А. І. Лур'є, І. Ю. Хоми, Є. О. Гоцуляка та Д. І. Чернописького, В. К. Чибірякова, А. М. Станкевича. О. М. Палій вносить в теорію товстих оболонок додаткові силові та кінематичні гіпотези. О. О. Амосов, О. К. Аксентян, А. Г. Зеленський та G. J. Hutchins з A. I. Soler у своїх працях розглядають наближені методи розв'язування задач тривимірної теорії нетонких оболонок та плит. Зокрема, в процесі досліджень отримано, що зміна напружено-деформованого стану оболонки по товщині в області прикладання навантаження є значно нелінійною, а поперечні напруження мають однаковий порядок з тангенціальними.

У друкованих працях висвітлена значна кількість чисельних та аналітичних методів дослідження напружено-деформованого стану оболонок обертання та пологих оболонок. Це роботи М. П. Абовського, І. Я. Аміро, Д. Аргіріса, В. А. Баженова, Д. В. Вайнберга, А. Т. Василенка, В. В. Гайдайчука, Р. Галлагера, О. І. Голованова, О. С. Городецького, Є. О. Гоцуляка, Я. М. Григоренка, В. І. Гуляєва, О. І. Гуляра, М. І. Длугача, Д. Ешвела, О. Зенкевича, Б. Я. Кантора, В. В. Киричевського, В. М. Кислоокого, Р. Клафа, П. П. Лізунова, В. Г. Піскунова, В. О. Постнова, О. О. Рассказова, Л. О. Розіна, О. С. Сахарова, С. П. Тимошенка та ін.

Дж. Вальц, Р. Фултон та Н. Цирус аналітично показали, що при використанні викривленого елемента з поліноміальною функцією переміщень виникає велика похибка, яка не дозволяє розраховувати незакріплену конструкцію. Якщо функція переміщень не містить форм переміщень СЕ як жорсткого цілого, це приводить до уповільнення збіжності розв'язку. У статтях Ю. В. Клочкова розглядаються різні види апроксимації функції переміщень. На прикладі тонкої оболонки еліпсоїда обертання показано, що при ізопараметричній апроксимації чисельний розв'язок задачі залежить від величини зміщення тіла як жорсткого цілого. В той же час використання векторної апроксимації переміщень дозволяє отримати стійкий розв'язок.

О. С. Сахаров запропонував модифікацію МСЕ - моментну схему скінченних елементів. Особливістю МССЕ, порівняно зі звичайним варіантом МСЕ, є те, що для будь-яких СЕ і довільних законів апроксимуючих функцій завжди виконується умова рівності нулю деформацій при зміщеннях тіла як жорсткого цілого. Цей ефект досягається наближеним представленням деформацій у вигляді розкладання в ряд Тейлора утриманням тих їх компонент, які відповідають заданому закону апроксимації переміщень. МССЕ може бути класифікований як змішане формулювання МСЕ, оскільки розкладання виконується одночасно як для переміщень, так і для деформацій.

У працях О. Ю. Чиркова розглядається змішане формулювання МСЕ для розв'язку двовимірних та вісесиметричних задач. Оскільки напруження або деформації входять до рівнянь разом з переміщеннями як рівноправні невідомі, це дозволяє зменшити похибку у апроксимації деформацій та напружень порівняно з класичним МСЕ.

В напрямку дослідження збіжності криволінійних СЕ слід відзначити праці Є. О. Гоцуляка, В. Н. Єрмішева, Н. Т. Жадрасінова, О. В. Костіної, К. Пемсінга, Д. Кантіна, Р. Клафа, Д. Фондера та ін.

Проведений аналіз літературних джерел показав, що при великій кількості постановок і спроб дослідження НДС товстостінних оболонкових систем з використанням МСЕ проблема застосування криволінійних СЕ залишається недостатньо вивченою. На даний момент в програмних комплексах товстостінні оболонки розраховуються здебільшого за допомогою тонких оболонок або, рідше, за допомогою просторових ізопараметричних СЕ. Просторові криволінійні СЕ оболонки не було реалізовано в програмних комплексах широкого використання, хоча в деяких комплексах присутні ізопараметричні СЕ серендипового сімейства. Отже, проблема виведення матриці жорсткості просторового криволінійного СЕ і можливість її практичного застосування до розрахунку задач пружного деформування залишаються актуальними на сьогодні.

У **розділі 2** наведено розрахункові співвідношення теорії пружності в загальній криволінійній системі координат і викладена запропонована процедура отримання співвідношень для розглядуваного СЕ, особливість якої полягає у векторній апроксимації функції переміщень в рядах Маклорена. Переміщення скінченного елемента приймаються у вигляді вектор-функції, яка містить жорстке зміщення СЕ як цілого довільної криволінійної форми, завдяки чому виконується необхідна умова скінченноелементної дискретизації, тобто матриця жорсткості має три нульові власні значення.

Співвідношення теорії пружності у криволінійній системі координат. В центрі просторового криволінійного скінченного елемента оболонки (Рис. 1) розміщено ортогональну криволінійну систему координат x^1, x^2, x^3. Таким чином, контури скінченного елемента знаходяться в межах від $x^i = -0.5$ до $x^i = 0.5$, де i=1,2,3. Серединна поверхня оболонки в декартовій системі координат XYZ описується функціями $X = X(x^1, x^2, x^3)$, $Y = Y(x^1, x^2, x^3)$, $Z = Z(x^1, x^2, x^3)$.

Розміри сторін скінченного елемента відповідають коефіцієнтам першої квадратичної форми поверхні $\sqrt{g_{ii}}$, де $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$, а об'єм відповідає детермінанту метричного тензора $\sqrt{G}$:

$$G = det\,\|g_{ij}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Вектори локального базису, що описуються залежностями

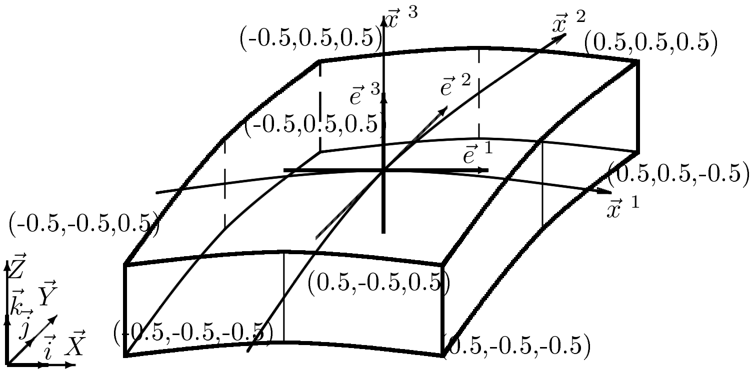

Рис. 1. Просторовий скінченний елемент у криволінійній системі координат

$$\vec{e_\alpha} = \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \cdot \vec{i} + \frac{\partial Y}{\partial x^\alpha} \cdot \vec{j} + \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} \cdot \vec{k}, \qquad \text{де } (\alpha = 1, 2, 3), \tag{2}$$

дотичні до координатних осей x^1, x^2, x^3 і співнаправлені з напрямками зростання відповідних координат.

Вектори взаємного базису пов'язані з векторами основного локального базису співвідношеннями

$$\vec{e}^{\,1} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{|\vec{e}_2 \times \vec{e}_3|} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{G}}, \tag{3}$$

$$\vec{e}^{\,2} = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{|\vec{e}_3 \times \vec{e}_1|} = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\sqrt{G}}. \tag{4}$$

$$\vec{e}^{\,3} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sqrt{G}}. \tag{5}$$

Переміщення точок елемента оболонки описуються вектор-функцією координат вузлів $\vec{U} = \vec{U}(x^1, x^2, x^3)$.

Коваріантні компоненти тензора деформацій визначаються диференціальними залежностями Коші

$$\vec{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x^\alpha}\vec{e}_\beta + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha\right). \tag{6}$$

Для однорідного ізотропного матеріалу закон Гука виражений згорткою по індексу

$$\vec{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left[\nu g^{\alpha\beta} g^{\gamma\omega} + \frac{(1-2\nu)}{2}(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\omega} + g^{\alpha\omega} g^{\beta\gamma})\right]\vec{\varepsilon}_{\gamma\omega}, \tag{7}$$

де E — модуль пружності матеріалу, ν — коефіцієнт Пуассона, $\sigma^{\alpha\beta}$ — контраваріантна компонента тензора напружень, $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ — індекси згортки.

Векторне подання співвідношень МСЕ. При отриманні співвідношень МСЕ в скінченноелементному аналізі оболонок виникає складна проблема врахування жорстких зміщень. Ця проблема згадується багатьма дослідниками і була вирішена Є.О. Гоцуляком у методі криволінійних сіток.

Вирішення проблеми зміщення СЕ як жорсткого цілого в даній роботі полягає у векторних перетвореннях при апроксимації функції переміщень в рядах Маклорена.

В криволінійній системі координат, при операціях з векторними функціями необхідно ретельно дотримуватись правил векторного аналізу. Всі переваги векторного представлення функції переміщень використано у запропонованій процедурі отримання співвідношень для розглядуваного СЕ.

Вектор-функція переміщень апроксимується рядом Маклорена, що забезпечує неперервність функції переміщень вздовж границь. Коефіцієнтами ряду є визначені в центрі скінченного елемента значення компонент вектор-функцій переміщень та їх коваріантних похідних:

$$\vec{U}(x^1, x^2, x^3) = \vec{U}^0 + \frac{\partial \vec{U}^0}{1!\partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{\partial^2 \vec{U}^0}{2!\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{\partial^3 \vec{U}^0}{3!\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \ldots \tag{8}$$

Підстановкою виразу (8) у формулу (6), отримано апроксимуючі залежності для деформацій:

$$\vec{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(U^0_{\alpha|\beta} + U^0_{\beta|\alpha} + U^0_{\alpha|\beta\gamma} x^\gamma + U^0_{\beta|\alpha\omega} x^\omega + \frac{1}{2!} U^0_{\alpha|\beta\gamma\omega} x^\gamma x^\omega + \ldots\right) \tag{9}$$

Необхідний та достатній набір коефіцієнтів білінійного апроксимуючого ряду визначено у векторному вигляді:

$$\begin{aligned}\{\varphi\} = \{U_1^0, \quad & U_2^0, \quad U_3^0, \quad U_{1|1}^0, \quad U_{2|1}^0, \quad U_{3|1}^0, \quad U_{1|2}^0,\\ & U_{2|2}^0, \quad U_{3|2}^0, \quad U_{1|3}^0, \quad U_{2|3}^0, \quad U_{3|3}^0, \quad U_{1|12}^0,\\ & U_{2|12}^0, \quad U_{3|12}^0, \quad U_{1|13}^0, \quad U_{2|13}^0, \quad U_{3|13}^0, \quad U_{1|23}^0,\\ & U_{2|23}^0, \quad U_{3|23}^0, \quad U_{1|123}^0, \quad U_{2|123}^0, \quad U_{3|123}^0\}^T\end{aligned} \tag{10}$$

Матричні залежності деформацій від функцій переміщень та їх коваріантних похідних мають вигляд:

$$\{\varepsilon\} = [D\varepsilon] \cdot \{\varphi\}\,, \tag{11}$$

де $\{\phi\}$ - вектор коефіцієнтів функції переміщень, $\{\varepsilon\}$ - вектор деформацій, а $[D_\varepsilon]$ - матриця узгодження переміщень з деформаціями.

Пряма та зворотня залежності між вектором вузлових переміщень і вектором коефіцієнтів апроксимуючого ряду визначаються матрицею [P]:

$$\{U\} = [P]\,\{\varphi\} \tag{12}$$

$$\{\varphi\} = [P]^{-1}\,\{U\} = [S]\,\{U\}\,, \tag{13}$$

де $\{U\}$ – вектор вузлових переміщень. Компоненти матриці [P] визначаються з наступного поліноміального ряду

$$\begin{aligned}U_j^{\alpha\beta\gamma} \;=\; & U_i a_j^i(\alpha\beta\gamma) + \frac{1}{1!}U_{i|\alpha}a_j^i(\,\alpha\beta\gamma)\alpha + \frac{1}{2!}U_{i|\alpha\beta}a_j^i(\,\alpha\beta\gamma)\alpha\beta + \\ & + \frac{1}{3!}U_{i|\alpha\beta\gamma}a_j^i(\,\alpha\beta\gamma)\alpha\beta\gamma + \ldots\end{aligned} \tag{14}$$

де $a_j^i(\alpha\beta\gamma) = \vec{e}^{\,i}\,(0,0,0)\cdot\vec{e}_j\,(\alpha,\beta,\gamma)$ – коефіцієнти перетворення компонент геометричного вектора при переносі його з центру в вузол СЕ, (α,β,γ) – вузлові координати (x^1,x^2,x^3).

Отже, отримані векторні співвідношення між переміщеннями та деформаціями, що дозволяє перейти безпосередньо до формування матриці жорсткості СЕ.

Потенціальна енергія та матриця жорсткості СЕ. Потенціальна енергія елемента визначається через його вузлові переміщення наступним чином:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint \{U\}^T [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \{U\} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3 - \\ - \{U\}^T \{F\} - \{U\}^T \{R\}, \qquad (15)$$

де [A] - матриця пружних сталих матеріалу оболонки, $\{F\}$ - вектор вузлових навантажень, $\{R\}$ - вектор вузлових реакцій.

З умови стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії СЕ, тобто

$$\delta\Pi = \delta\left([K]\{U\} - \{F\} - \{R\}\right) = 0, \qquad (16)$$

випливає рівняння МСЕ:

$$[K]\{U\} - \{F\} - \{R\} = \{0\}, \qquad (17)$$

де [K] - матриця жорсткості СЕ:

$$[K] = \iiint [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3. \qquad (18)$$

Обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості виконується за допомогою формул чисельного інтегрування.

Оскільки в прикладних задачах важливе значення має можливість врахування анізотропних, зокрема ортотропних, властивостей матеріалу конструкції, то в роботі розглянуто виведення матриці пружних сталих для випадку ортотропії, а також запропоновано методику визначення приведених жорсткісних характеристик матриці пружних сталих для поліматеріальних конструкцій.

У **розділі 3** розглянуто критерії збіжності МСЕ, оглянуто аналітичні розв'язки тестових задач та виконано тестування криволінійного просторового СЕ на задачах пружного деформування.

На задачі про рівновагу товстої шарнірно обпертої пластини під дією рівномірно розподіленого навантаження було визначено, що при зростанні товщини пластини, розв'язки, отримані на основі апроксимації моделі СЕ на основі теорій Кірхгофа-Лява, некоректні. Натомість апроксимація просторовими криволінійними СЕ добре наближує розв'язок до аналітичного порівняно з ізопараметричними просторовими СЕ. Так при співвідношенні h/a = 1/8 похибка моделі на основі просторових криволінійних СЕ складає 0.5%, при h/a = 1/4 – 2% і при h/a = 1/2 – 7.5%. При защемленні плит по краях для пластин зі співвідношенням h/a = 1/5 та h/a = 1/2 похибка моделі на основі просторових криволінійних СЕ складає 1.9% та 2.2%.

На задачах згину трансверсально-ізотропних пластинок з різними умовами обпирання перевірено адекватність роботи просторового СЕ при заданні ортотропних характеристик матеріалу. Результати порівнювались з приведеними у монографії С. А. Амбарцумяна та з отриманими за допомогою просторових ізопараметричних СЕ з бібліотеки ПК ''ЛІРА-САПР".

На тестових задачах про рівновагу товстостінного циліндра доведено збіжність МСЕ на основі просторових криволінійних СЕ при згущенні сітки порівнянням результатів у переміщеннях та напруженнях, отриманих за допомогою МСЕ з аналітичними розв'язками та розв'язками отриманими за допомогою програмних комплексів SCAD та ЛІРА-САПР. При згущенні скінченноелементної сітки похибка обчислення переміщень зменшується в середньому у степені 1.2–1.8, а для напружень такий показник знаходиться в діапазоні 1.4–2.5. Перевірено також вплив жорстких зміщень на розв'язок. Похибка, що вноситься жорсткими зміщеннями елемента у визначення напружень $|\sigma/U| = 10^{-12}$ Па/м, що на 2 порядки менше аналогічної похибки при використанні ізопараметричних СЕ.

Приклад моделей з різними сітками дискретизації у задачі про рівновагу товстостінного циліндра показано на рис. 2. Результати розрахунку наведено в табл. 1–2.

Таблиця 1

Похибка визначення переміщень товстостінного циліндра при згущенні сітки по товщині (R=0.1 м, 12 секторів)

h, м	Внутрішня поверхня			Зовнішня поверхня		
	δ_1, %	δ_2, %	δ_4, %	δ_1, %	δ_2, %	δ_4, %
0.09	-53.13	-13.50	-3.78	-8.67	1,19	4,16
0.08	-10.17	-2.98	-2.07	-7,39	3,72	6,93
0.07	-3.77	0.60	3.28	9,87	-8,97	-12,80

Таблиця 2

Точність визначення радіального напруження у товстостінному циліндрі при кількості елементів по товщині (R=0.1 м, h=0.08 м, 12 секторів)

$\rho - r$	σ_r/p_0				
	Теор	1	2	4	8
$-\frac{h}{2}$	1.000	–	0.508	0.8217	1.0166
0	0.259	0.293	0.318	0.2589	0.2647
$\frac{h}{2}$	0.200	–	0.130	0.1670	0.2001

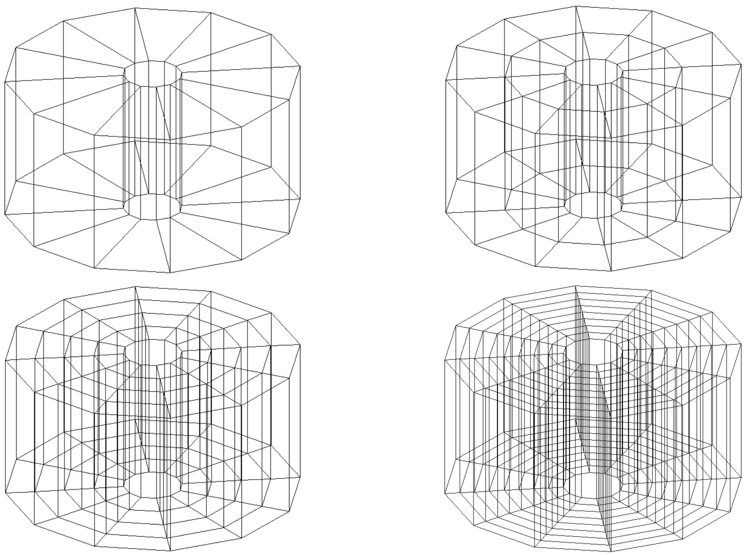

Рис. 2. Скінченноелементні моделі товстостінного циліндра товщиною 8 см при розбивці на 12 секторів.

Визначено межі застосування СЕ в залежності від співвідношення товщини оболонки до довжини дуги ϕ r, апроксимованої СЕ. В якості межі взято похибку 10%. Для задачі про рівновагу товстостінного циліндра під дією внутрішнього та зовнішнього тиску діапазон застосування становить 0.1 $\div$ 2.5 h/ϕr (наближено 0.05 r $<$ h $<$1.2r), де r - радіус кривизни серединної поверхні оболонки. Для задачі про рівновагу товстостінної сфери цей діапазон становить 0.1 $\div$ 0.95 h/ϕr (наближено 0.05r $<$ h $<$0.5r).

У табл. 3–4 приведено результати розрахунку товстостінної сфери товщиною 8 см під дією внутрішнього та зовнішнього тиску.

Таблиця 3

Похибка визначення переміщень товстостінної сфери при згущенні сітки по товщині (R=0.1 м, 12 секторів)

h, м	Внутрішня поверхня			Зовнішня поверхня		
	δ_1, %	δ_2, %	δ_4, %	δ_1, %	δ_2, %	δ_4, %
0.09	-99.17	-77.48	-37.10	21.18	19.03	13.93
0.08	-57.68	-33.20	-9.69	26.36	20,34	16,51
0.07	-39.28	-14.93	-1.88	62.46	39.26	25.05
0.06	-23.71	-3.45	-6.78	-78.13	-31.18	-8.34

Таблиця 4

Точність визначення радіального напруження у товстостінній сфері при кількості елементів по товщині (R=0.1 м, h=0.08 м, 12 секторів)

$\rho - r$	σ_r/p_0				
	Теор	1	2	4	8
$-\frac{h}{2}$	1.000	–	0.272	0.602	0.964
0	0.126	0.148	0.166	0.123	0.132
$\frac{h}{2}$	0.100	–	0.059	0.063	0.096

Проведене дослідження напружень у товстостінній сфері показало, що при згущенні сітки результати також збігаються до аналітичного значення. Наприклад, для сфери з товщиною стінки 8 см, похибка при визначення меридіальних напружень на внутрішній поверхні на розбивці у 2 елементи по товщині складає 81.4 %, у 4 елементи – 34.4 %, у 8 елементів 11.9 %, при визначенні радіальних напружень відповідно 72.8 %, 39.8 % та 3.6 %.

У **розділі 4** виконано моделювання практичних задач: фланцеві з'єднання металевих вузлів, розрахунок опорної плити бази круглого пілона, фундаментна плита 30-поверхової залізобетонної житлової будівлі.

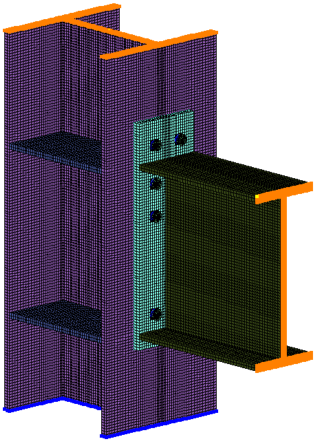

Рис. 3. Модель фланцевого вузла

Відповідно до ДСТУ-Н Б EN 1993-1-8, при розрахунку металевих конструкцій необхідно враховувати вплив характеру роботи вузлів на розподіл внутрішніх зусиль та деформацій у конструкціях. За характером роботи вузли класифікують на номінально шарнірні (не передають момент), жорсткі та напівжорсткі (потрібно досліджувати). У рамках дослідження виконано моделювання фланцевих вузлів і при покроковому навантаженні побудовано для кожного з них залежності "момент – кут повороту". При цьому враховано розкриття фланців у процесі навантаження.

Виконано моделювання опорної бази металевого круглого пілону (Рис. 4) рекламної конструкції для перевірочного розрахунку. Розрахунок конструкції пілона виконувався на навантаження від власної ваги та вітрове (з урахуванням динамічної пульсаційної складової) навантаження в конструкційно нелінійній постановці модифікованим методом Ньютона-Рафсона. Міцність елементів конструкції перевірено за енергетичним критерієм міцності Мізеса-Хенкі.

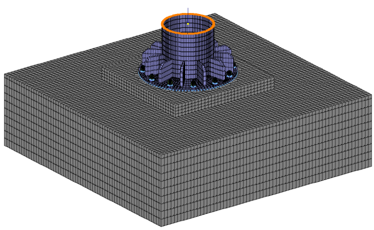

Рис. 4. База пілона

Модель апроксимовано за допомогою 102615 скінченних елементів у ПК "ЛІРА-САПР кількість вузлових невідомих – 304543. Розрахунки показали, що конструкція має запас міцності та придатна до нормальної експлуатації.

У межах дублюючого розрахунку багатоповерхового житлового будинку (м. Одеса, вул. Новоберегова) виконано моделювання фундаментної плити і досліджено її НДС. Товщина фундаментної плити 1.8 м, основа – пальове поле. В оригінальному проекті фундаментну плиту змодельовано тонкими пластинами на основі гіпотез Кірхгофа-Лява, в дублюючому – просторовими криволінійними скінченними елементами (39 СЕ) у 6 шарів по товщині. Модель апроксимовано за допомогою 225645 скінчених елементів. Кількість вузлів – 189085, кількість вузлових невідомих – 984768. Оскільки арматура підбирається саме на результуючі зусилля лінійної задачі, то розрахунок у дослідженні виконувався в лінійній постановці на розрахункове сполучення навантажень, що включає в себе постійні, довготривалі, короткочасні, вітрові та сейсмічні навантаження. Порівнювались напруження у найбільш навантаженому фрагменті плити. Отримані при розрахунку на основі просторових криволінійних СЕ головні напруження виявились меншими ніж аналогічні в постановці на основі СЕ тонких плит: на 10–12% на рівні нижньої грані плити і на 15–17% на рівні верхньої, що свідчить про закладений запас міцності будівлі або ж про можливість економії на армуванні.

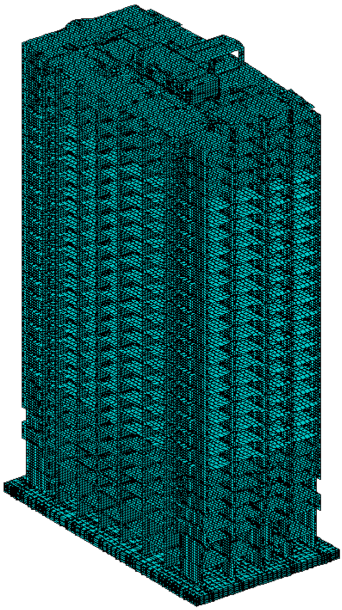

Рис. 5. Житлова будівля на пальовій основі

ВИСНОВКИ

Основні результати, отримані в роботі полягають у наступному:

На основі методу скінченних елементів створено ефективну методику дослідження напружено-деформованого стану в задачах деформування нетонких плит та оболонок нульової або додатньої гаусової кривизни при статичному навантаженні.

У процесі роботи отримано наступні результати:

1. Проаналізовано сучасний стан проблематики розрахунку конструкцій з нетонких пластин і оболонок.
2. Створено новий тип просторового криволінійного СЕ оболонки з векторною апроксимацією функції переміщень у рядах Маклорена та побудовано узагальнену матрицю жорсткості, що враховує зміщення скінченного елемента як жорсткого цілого;
3. Створено алгоритм визначення приведених пружних характеристик просторових криволінійних ортотропних СЕ.
4. Отримано для розробленого СЕ співвідношення для визначення деформацій та напружень у центрі скінченного елемента;
5. Впроваджено запропнований просторовий криволінійний СЕ в розрахунковий процесор ПК "ЛІРА-САПР"під номером 39.
6. Достовірність отриманих результатів підтверджено розв'язанням великої кількості тестових задач пружного деформування з різними параметрами, граничними умовами та сіткою дискретизації;
7. Запропоновану методику застосовано до розрахунку відповідальних конструкцій (фланцевих з'єднань вузлів металевих конструкцій, опорної плити бази круглого пілона, товстої фундаментної плити 30-поверхової житлової будівлі), у яких проаналізовано зміни в НДС при комплексній дії силових факторів - постійних, технологічних і позапроектних навантажень, а також амплітудних інерційних сил від вітрових та сейсмічних навантажень.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

а) статті в наукових фахових виданнях України:

[1] Іванченко Г. М., Пікуль А. В. Тестування збіжності МСЕ на задачах теорії пружності при використанні просторового криволінійного СЕ // Опір матералів і теорія споруд. — 2018. — № 100. — С. 172–180.

[2] Пікуль А. Врахування ортотропних властивостей матеріалу при моделюванні товстих оболонок просторовими криволінійними скінченними елементами // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. Трудов. Вып.№69. — Дн-вск : ГВУЗ ПГАСА, 2013. — С. 374–377.

[3] Пікуль А. В. Просторовий криволінійний скінченний елемент в фізично нелінійних задачах теорії пружності // Актуальні проблеми будівництва. — Суми, 2014. С. 108–113.

[4] Пікуль А. В., Гоцуляк Є. О. Реалізація просторового скінченного елемента в криволінійній системі координат // Опір матеріалів і теорія споруд : Науково-технічний збірник. — 2011. — № 88. — С. 91–102.

б) статті в міжнародних фахових виданнях:

[5] Барабаш М. С., Пикуль А. В. Материальное демпфирование при расчете конструкций на динамические воздействия // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 13–18.

[6] Городецкий А. С., Городецкий Д. А., Пикуль А. В. Конструктивная нелинейность. Односторонние связи. Проблемы реализации // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2016. — Т. 12, № 3. — С. 35–39.

в) основні публікації за доповідями на міжнародних та вітчизняних конференціях:

[7] Білик А. С., Пікуль А. В. Вибір оптимального вирішення металевих конструкцій за критерієм вартості життєвого циклу в умовах реконструкції // Aktualne problemy konstrukcji matalowych. II Miedzynarodowa Polsko-Ukrainska Konferencja Naukowo-Techniczna, Gdansk 27-28 listopada 2014 / Під ред.

dr inz. Tomasz Heizig, dr hab. inz. Elzbieta Urbanska-Galewska. — 2014. — С. 65–68.

[8] Пикуль А. В. Об одном способе учета физически нелинейных свойств материала в задачах теории упругости // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов V Международного симпозиума (Иркутск, 01-06 июля, 2014 г.). — Иркутск : Изд-во ИрГТУ, 2014. — С. 144–145.

[9] Пикуль А. В., Городецкий Д. А. Определение жесткостных характеристик сечения железобетонного стержня с учетом нелинейных свойств материала // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов IV Международного симпозиума. — Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — С. 228.

[10] Пікуль А. В. Моделювання роботи фланцевих вузлів із застосуванням криволінійних просторових скінченних елементів // Тези доповідей IV науково-практичної конференції "Актуальні проблеми інженерної механіки"(16–19 травня 2017 року, м. Одеса) / ОГАСА. — 2017. — С. 118–119.

[11] Пікуль А. В. Моделювання роботи фланцевих з'єднань під дією динамічних навантажень // Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ. — 2017. — С. 91–92.

[12] Пікуль А. В. Тестування просторового криволінійного скінченного елемента на задачах теорії пружності // Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: тези доповідей другої Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 26-27 вересня 2018. — 2018. — С. 91–92.

АНОТАЦІЇ

Пікуль А. В. Методика розрахунку нетонких пластин та оболонок на основі просторових криволінійних скінченних елементів. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-технічних наук за спеціальністю 05.23.17 — будівельна механіка. — Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2019.

Дисертація присвячена розрахунку нетонких плит та оболонок нульової або додатньої гаусової кривизни в задачах деформування при статичному навантаженні.

В даній роботі проаналізовано проблематику розрахунку товстостінних конструкцій та запропоновано новий просторовий скінченний елемент, що побудований у криволінійній системі координат на основі векторної апроксимації функції переміщень у рядах Маклорена. Переміщення скінченного елемента приймаються у вигляді векторфункції, що містить у собі зміщення тіла як жорсткого цілого.

Представлені результати досліджень достовірності та ефективності використання методу скінченних елементів на основі криволінійного просторового скінченного елемента на задачах пружного деформування під дією статичного навантаження (рівновага товстих плит з різними умовами закріплення, згин трансверсально-ізотропних пластинок з різними умовами закріплення, рівновага товстостінного циліндра під дією зовнішнього та внутрішнього тиску, а також під дією торцевого розтягу, рівновага товстостінної сфери під дією зовнішнього та внутрішнього тиску) з різними параметрами та згущенням сітки дискретизації. Для підтвердження достовірності результати розрахунку тестових задач порівнюються з відомими аналітичними розв’язками, а також з розв’язками отриманими за допомогою інших схем методу скінченних елементів в ПК «ЛІРА-САПР» та ПК «SCAD Office». У процесі тестування МСЕ визначено межі застосування просторового криволінійного скінченного елемента для моделювання нетонких пластин та оболонок.

Демонстрацію можливостей запропонованої методики продемонстровано на практичних задачах – моделювання роботи фланцевих з’єднань металевих вузлів, розрахунок опорної плити бази круглого пілона, розрахунок товстої фундаментної плити 30-поверхової залізобетонної житлової будівлі.

Ключові слова: метод скінченних елементів, товсті пластини, товсті оболонки, нетонкі пластини, нетонкі оболонки, криволінійний просторовий скінченний елемент, задача Ламе, комп’ютерне моде-

лювання, тривимірні задачі пружного деформування, товстостінний циліндр, трансверсально-ізотропні пластинки.

Пикуль А. В. Методика рассчета нетонких пластин и оболочек на основе пространственных криволинейных конечных элементов. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.23.17 — строительная механика. — Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, 2019.

Диссертация посвящена расчету нетонких плит и оболочек нулевой или положительной гауссовой кривизны при статическом нагружении.

В работе проанализировано проблематику расчета толстостенных конструкций и предложено новый пространственный конечный элемент, построенный в криволинейной системе координат на основе векторной апроксимации функции перемещений у рядах Маклорена. Перемещения конечного элемента принимаются в виде векторфункции, которая содержит в себе смещения тела как жосткого целого.

Представленны результаты исследований достоверности и эффективности использования метода конечных элементов на основе криволинейного пространственного конечного элемента на задачах упругого деформирования под действием статического нагружения (равновесие толстых плит с разными условиями закрепления, изгиб трансверсально-изотропных пластинок с разными условиями закрепления, равновесие толстостенного цилиндра под действием внешнего и внутреннего давления, а также под действием торцевого растяжения, равновесие толстостенной сферы под действием внешнего и внутреннего давления) с разными параметрами и сгущением сетки дискретизации. Для подтверждения достоверности результаты расчета тестовых задач сравниваются с известными аналитическими решениями, а также с решениями полученными с помощью других схем метода конечных элементов в ПК «ЛИРА-САПР» и ПК «SCAD Office». В процессе тестирования МКЭ определено область применения пространственного криволинейного конечного элемента для моделирования нетонких пластин и оболочек.

Демонстрацию возможностей предложенной методики продемонстрировано на практических задачах – моделирвание работы фланцевых соединений металлических узлов, расчет опорной плиты базы круглого пилона, расчет толстой фундаментной плиты 30-этажного железобетонного жилого здания.

Ключевые слова: метод конечных элементов, толстые пластины, толстые оболочки, нетонкие пластины, нетонкие оболочки, криволинейный пространственный конечный элемент, задача Ламе, компьютерное моделирование, трехмерные задачи упругого деформирования, толстостенный цилиндр, трансверсально-изотропые пластинки.

Pikul A. V. Method of calculation of non-thin plates and shells on the basis of 3D-curvilinear finite elements. — Manuscript.

Candidate's thesis on Technical Sciences, speciality 05.23.17 — Structural mechanics. — Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2019.

The thesis is dedicated to the research of the stress-strain state in problems of deformation of non-thin plates and shells of zero or positive Gaussian curvature with static loading.

This paper shows the problems of analysis of thick-walled constructions and been shown new solid finite element constructed in a curvilinear coordinate system based on the vector approximation of the displacement function in the Maclaurin series. Displacements of a finite element are taken as a vector-function, which includes the rigid-body motions. The results of the research on the reliability and efficiency of the use of the finite element method on the basis of the curvilinear solid finite element on the problems of the Theory of Elasticity under the action of stationary load (the equilibrium of thick plates with different fixing conditions, the bending of transversally isotropic plates with different fixing conditions, the balance of the thick-walled cylinder under the influence of external and internal pressure, and also under the action of tension on the ends, the balance of the thick-walled sphere under the influence of an external and internal pressure) with different parameters and different size of mesh density are presented.

There are a lot of tests solved to confirm the reliability. The results there are compared with well known analytical solutions and with the solutions that are obtained using other finite element schemes in the

LIRA-SAPR and SCAD Office. In the process of FEM testing, the limits of the use of the solid curvilinear finite element for the modeling of non-thin plates and shells are defined. The demonstration of the possibilities offered by the proposed method has been demonstrated on practical cases - the modeling of the functioning of flanged connections of steel joints, the analysis of the base plate of the round pylon, the analysis of the thick foundation slab of a 30-storey reinforced concrete dwelling building.

Key words: finite element method, thick plates, thick shells, non-think plates,non-think shells, curvilinear solid finite element, Lame problem, 3D-problems of Theory of Elasticity, thick walled elastic tube, transversally isotropic plates.

Підписано до друку 28.05.2019 р. Формат 60x90 1/16.
Папір офсетний. Умовн. др. арк. 0,9.
Друк різограф. Тираж 100 прим. Зам. № 2805/02.

Надруковано ФОП Гузік О.М.
Податковий номер №2705814113
м. Київ, вул. Б. Гаврилишина, 16
Тел.: 338-16-61.