МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Палій Оксана Миколаївна

УДК 539.3

СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

05.23.17 − будівельна механіка

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ − 2021

Дисертацією є кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Робота виконана на кафедрі теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:	доктор технічних наук, старший науковий співробітник **Лук'янченко Ольга Олексіївна**, Київський національного університету будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України, провідний науковий співробітник Науково-дослідного інституту будівельної механіки.
Офіційні опоненти:	доктор технічних наук, професор **Марчук Олександр Васильович**, Національний транспортний університет Міністерства освіти і науки України, завідувач кафедри опору матеріалів та машинознавства. кандидат технічних наук, доцент **Алексейчук Ольга Миколаївна,** НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського» Міністерства освіти і науки України, доцент кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів.

Захист відбудеться « 24 » вересня 2021 р. о 13^{00} годині в ауд. 466 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31.

Автореферат розісланий « 20 » серпня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
Д 26.056.04 **Д. В. Михайловський**
доктор технічних наук,
професор

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Коливання тонких оболонкових конструкцій при дії періодичних навантажень супроводжується рядом фізичних явищ і механічних ефектів, які властиві нелінійним системам з великою кількістю ступенів вільності. До таких ефектів можна віднести: перебудову форм коливань, виникнення складних резонансних режимів коливань, існування декількох режимів коливань при однакових параметрах динамічних навантажень та інші. Такі ефекти є небезпечними, бо можуть змінити стійкі режими вимушених коливань оболонок на нестійкі, призвести до виникнення нових форм втрати стійкості, які в свою чергу можуть призвести до аварійних ситуацій. Актуальність теми обумовлена необхідністю забезпечити міцність і стійкість тонких оболонкових конструкцій при дії експлуатаційних навантажень ще на стадії проектування. Якісне проектування оболонок в значній мірі залежить від можливостей їх точного розрахунку, дослідження їх поведінки при різних видах навантажень, проведення чисельних експериментів і перевірки достовірності результатів розрахунку. До появи комп'ютерів в будівельній механіці методи розрахунку конструкцій були орієнтовані на аналітичну реалізацію розрахункових схем та уникнення великої кількості обчислень. З появою комп'ютерів відбувся перехід від вузькоорієнтованих прийомів і методів до побудови комп'ютерних моделей конструкцій з використанням методів механіки деформівного твердого тіла і математичної фізики. На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) утворилася наукова школа Д.В. Вайнберга (В.А. Баженов, Є.О. Гоцуляк, В.І. Гуляєв, Є.С. Дехтярюк, В.Н. Кислоокий, О.С. Сахаров, О.Л. Синявський та інші), вчені якої розробляли варіаційно-різницеві методи та створювали програмні комплекси для вирішення проблем розв’язку задач міцності, стійкості та коливань пластин і оболонок. Одним з таких методів став модифікований метод кінцевих різниць − метод криволінійних сіток. За рахунок повного виключення похибки апроксимації коваріантної похідної від функції жорстких зміщень, метод криволінійних сіток характеризується швидкою збіжністю, що дає можливість ефективно розв’язувати задачі будівельної механіки. На теперішній час недостатньо дослідженою залишається задача динамічної стійкості тонких оболонкових конструкцій в геометрично нелінійній постановці та оцінка впливу геометричних параметрів оболонок на стійкість усталених вимушених коливань.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА). Результати досліджень були отримані в межах грантової та науково-дослідної роботи, що виконувались за дорученням Міністерства освіти і науки України:

1ГР-2007 «Стійкість нелінійних параметричних коливань циліндричних і конічних оболонок» (2007 р., № держ. реєстрації 0107U0008099);

1ДБ-2018 «Дослідження напружено-деформованого стану і стійкості просторових конструкцій» (2018-по т.ч., № держ. реєстрації 0118U005222).

Автор брав участь у виконанні грантової та науково-дослідної роботах як співвиконавець.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних пружних оболонок на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань при дії періодичних навантажень методами будівельної механіки.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

- формування системи розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява;
- постановка задачі динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок;
- дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості на основі методу криволінійних сіток;
- редукування розрахункових співвідношень в задачі усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок за допомогою чисельної модифікації методу Бубнова-Гальоркіна;
- побудова математичної моделі динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке за допомогою проекційного методу;
- реалізація розробленного чисельного підходу у вигляді програмного забезпечення в обчислювальному комплексі методу криволінійних сіток;
- розв’язання прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних сталевих оболонок (циліндричних, конічних, однополих гіперболоїдів) при дії поздовжніх, поверхневих, кінематичних періодичних навантажень за допомогою методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова;
- аналіз впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення статичного і динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості;
- оцінка достовірності отриманих результатів визначення власних частот і форм коливань оболонок, критичних значень статичних і динамічних навантажень та відповідних форм втрати стійкості з аналітичними результатами інших авторів та результатами досліджень методом скінченних елементів.

Об’єктом дослідження є усталені вимушені нелінійні коливання тонких осесиметричних оболонок (циліндричної, конічної, однополого гіперболоїда) з різними геометричними параметрами; математичні і комп’ютерні моделі тонких оболонок.

Предметом дослідження є частоти і форми власних коливань оболонок без і з урахуванням навантаження; амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань; критичні значення навантажень, деформації і еквівалентні напруження.

Методи дослідження. Дослідження стійкості усталених коливань тонких пружних оболонок при періодичному навантаженні базується на спільному використанні модифікованого кінцево-різницевого метода − метода криволінійних сіток, проекційного методу і методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича. Нелінійні диференціальні рівняння коливань оболонки дискретизуються в напрямку твірної за допомогою модифікованого кінцево-різницевого методу криволінійних сіток. В круговому напрямку компоненти вектора переміщень елемента серединної поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича. Критерієм втрати стійкості усталених вимушених нелінійних коливань оболонки є рівність нулю визначника матриці лінеризованих рівнянь згідно теореми Ляпунова. Граничне значення параметру інтенсивності збудження, при якому визначник змінює знак, характеризує верхню критичну точку або точку біфуркації.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у чисельній реалізації методу криволінійних сіток в задачах оцінки впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних оболонок на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань. При цьому:

1. Сформована система розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява.

2. За допомогою проекційного методу побудована математична модель динамічної стійкості усталених вимушених коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке

3. На основі методу криволінійних сіток виконана дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості.

4. Застосовано метод редукції базиса, який є чисельною модифікацією метода Бубнова-Гальоркіна, для зменшення кількості узагальнених координат дискретної динамічної моделі.

5. Отримано розв'язки нових прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних сталевих оболонок (циліндричних, конічних, однополих гіперболоїдів) при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень за допомогою методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова.

6. Виконана оцінка впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди

усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості.

7. Чисельний підхід до дослідження стійкості нелінійних коливань тонких оболонок реалізовано у вигляді програмного забезпечення, яке надає розвитку обчислювальному комплексу методу криволінійних сіток.

Достовірність результатів обґрунтовується строгістю математичних перетворень, узгодженням чисельних результатів з аналітичними результатами інших авторів, збіжністю результатів в залежності від згущення сітки та точності розв'язання системи рівнянь, порівняльним аналізом результатів, отриманих на основі методу криволінійних сіток, з результатами досліджень, виконаних методом скінченних елементів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у застосуванні чисельної методики визначення стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок до розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки з забезпечення їх безаварійної експлуатації на стадії проектування.

Чисельна реалізація запропонованих підходів використана в Київському національному університеті будівництва і архітектури при виконанні грантової і науково-дослідної робіт, в навчальному процесі та для надання рекомендацій із забезпечення безаварійної експлуатації паливного резервуара на Українській антарктичній станції "Академік Вернадський".

Особистий внесок здобувача. Основні результати та положення, які становлять суть (зміст) дисертації, отримані автором самостійно. В публікаціях і роботах, підготовлених у співавторстві, викладені такі результати, що належать автору: огляд літературних джерел з питань сучасного стану проблеми, [3, 8, 10, 14, 15]; розрахункові співвідношення методу криволінійних сіток для тонких оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень у загальній криволінійній системі координат [5, 11, 13]; алгоритми та реалізація комп'ютерного моделювання власних та усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок (циліндричних, конічних, однополих гіперболоїдів) при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень [2, 8, 12]; розв'язки практичних задач по оцінці впливу геометричних параметрів тонких оболонок на критичні значення динамічного навантаження та форми втрати стійкості [1, 6, 7]; порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами дослідження методом скінченних елементів та інших авторів [4, 9].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи та отримані в ході її виконання результати доповідались та обговорювались на вітчизняних та міжнародних наукових конференціях:

«Міжнародна конференція по математичному моделюванню присвячена 100-річчю з дня народження Дж. Фон Неймана» (Херсон, ХНТУ, 2003р.).

«65-та науково-практична конференція КНУБА» (Київ, 2004 р.).

«Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА» (Київ, 2006, 2008 рр.).

«Міжнародна конференція по математичному моделюванню, присвячена 120-річчю з дня народження Р. Куранта» (Херсон, ХНТУ, 2008).

«71-а науково-практична конференція КНУБА» (Київ, 2010 р.).

«VI Міжнародна наукова-технічна конференція ”Будівельні конструкції спортивних та просторових споруд: сьогодення та перспективи розвитку”» (Київ, УкрНДІпроектстальконструкція імені Шимановського, 2010 р.).

«ІІ Міжнародна науково-практична конференція “Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (м. Київ, КНУБА, 2018 р.).

«V International Interdisciplinary Scientific Conference “Social Development Towards values. Ethics-Technology-Society”» (Zabrze Polska, 25-27 September 2019).

«IX International Antarctic Conference «The 60th anniversary of the signing of the Antarctic Treaty 1959 p.» (Kyiv, 2019).

«X International Antarctic Conference «The 25th Anniversary of rasing of the national Flag of Ukraine at the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station» (Kyiv, 2021).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на міжкафедральному семінарі КНУБА (м. Київ, 2021).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 15 наукових працях, серед яких: 3 статті у науковому фаховому виданні України, яке включене до міжнародних науково-метричних баз, 7 статей у наукових фахових виданнях і 5 публікацій матеріалів міжнародних і вітчизняних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 131 сторінку, у тому числі 31 рисунок, 11 таблиць, список використаних джерел із 183 найменувань на 20 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

<u>У вступі</u> обґрунтована актуальність теми, визначені мета і методи досліджень, наведена загальна характеристика роботи.

<u>В першому розділі</u> виконано огляд існуючих підходів до дослідження стійкості нелінійних вимушених коливань тонких оболонок при періодичному навантаженні.

Загальна теорія тонких пружних оболонок, а також різноманітні питання, які пов’язанні з розрахунками міцності оболонкових елементів конструкцій, знайшли відображення в монографіях В.З. Власова, О.Л. Гольденвейзера, М.О. Кільчевського, Н.В. Колкунова, О.І. Лур’є, А. Лява, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилова, С.П. Тимошенка, К.Ф. Черних, де містяться основні положення та залежності теорії оболонок. Загальні закономірності протікання періодичних процесів у рамках лінійної теорії коливань тонких оболонок вивчені порівняно ретельно. Великий внесок в розвиток динаміки оболонок поклали роботи М.О. Алумяе, І.Я. Аміро, В.В. Болотіна, А.С. Вольміра, Е.І. Григолюка, В.О. Заруцького, В.В. Кабанова, М.І. Мяченкова, І.Ф. Образцова, О.М. Фролова, К.З. Хайрнасова, R.R. Archer, B. Budiansky, R.S. Bodner, J.E. Crawford, J. Famili, W. Flugge, I.S. Humphreys, P.F. Jordan, W.T. Koiter, R.S. Roth, L.H. Sodel та інших авторів. Постановка задачі про стійкість коливань оболонок належить В.М. Челомею. В роботах А.С. Вольміра, І.Г. Кільдібекова, Г.В. Мішенкова, Е. Рейснера, Г.А. Хегемайера, F.C.U. Fu, Y.C. Fung та інших досліджені вимушені коливання пластинок, циліндричних та сферичних панелей на основі моделей з одним ступенем вільності. Значний внесок у розвиток нелінійної теорії пружних оболонок різних форм та створення методів розв'язання задач стійкості зробили Н.А. Алумяе, М.О. Алфутов, С.О. Амбарцюмян, І.Я. Аміро, В.А. Баженов, В.В. Болотін, Н.В. Валішвілі, А.С. Вольмір, І.І. Ворович, К.З. Галімов, О.В. Гондлях, Є.О. Гоцуляк, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.М. Гузь, В.І. Гуляєв, Л.Г. Доннел, Я.О. Жук, В.О. Заруцький, Б.Я. Кантор, В.Т. Койтер, М.С. Корнішин, О.А. Киричук, В.Д. Кубенко, П.З. Луговий, О.О. Лук'янченко, О.В. Марчук, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилов, Дж. Оден, В.Г. Піскунов, О.В. Погорєлов, О.С. Сахаров, С.П. Тимошенко, В.І. Феодосьєв, Ю.М. Шевченко, M. Amabili, F. Pellicano та інші вчені.

У другому розділі розглянута чисельна реалізація методу криволінійних сіток в задачах стійкості нелінійних коливань тонких оболонок. Формування системи розрахункових рівнянь вимушених коливань виконано із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких оболонок, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява. Для опису деформованої поверхні оболонки використано підхід Лагранжа. За систему відліку прийнята декартова система координат XYZ, а точки серединної поверхні оболонки описуються вектор-функцією

$$\vec{R} = \vec{R}\left(x^1, x^2\right), \tag{1}$$

де x^1, x^2 − криволінійні координати, пов'язані з недеформованою серединною поверхнею оболонки (рис.1). Компоненти вектор-функції $\vec{R}$ задаються безперервними однозначними функціями

$$X = X\left(x^1, x^2\right),\;\; Y = Y\left(x^1, x^2\right),\;\; Z = Z\left(x^1, x^2\right). \tag{2}$$

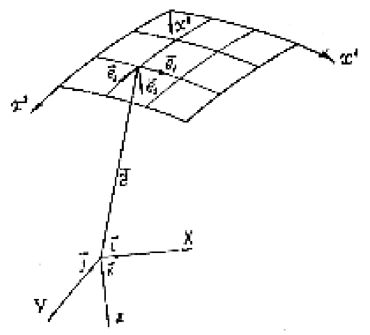


Рис. 1. Серединна поверхня оболонки

Коефіцієнти метричного тензора та його фундаментальний визначник обчислюються за формулами

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad \left(i, j = 1, 2\right), \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{3}$$

Вектори основного локального базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ спрямовані по дотичних до координатних ліній $\left(x^1, x^2\right)$. Вектор $\vec{e}_3$ визначається за формулою

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\left|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right|} \tag{4}$$

і збігається з ортом нормалі до серединної поверхні. Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ взаємного локального базису зв'язані з векторами основного локального базису співвідношеннями

$$\vec{e}^{\,1} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{a}}\ ,\ \vec{e}^{\,2} = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\sqrt{a}}\ ,\ \vec{e}^{\,3} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sqrt{a}}\ . \tag{5}$$

Опис деформування серединної поверхні оболонки здійснюється рівняннями, що визначають вектор переміщення її точок

$$\vec{u} = \vec{u}(x^1, x^2)\,. \tag{6}$$

При цьому рівняння деформованої поверхні оболонки приймає вигляд

$$\vec{R}^* = \vec{R} + \vec{u}\,, \tag{7}$$

а вектори основного локального базису деформованої серединної поверхні визначаються виразом

$$\vec{e}_i^{\,*} = \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x^i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i}\,,\quad \vec{e}_j^{\,*} = \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x^j} = \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^j}\quad \left(i, j = 1,2\right). \tag{8}$$

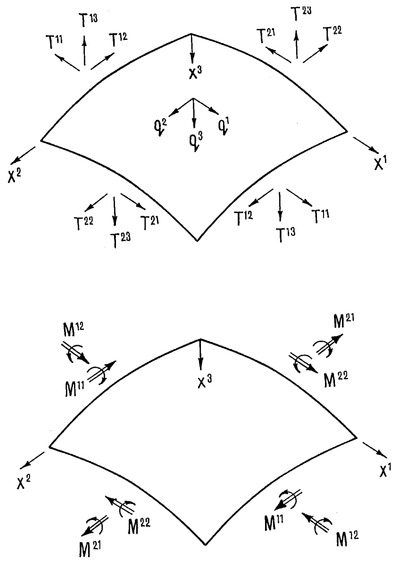


Рис. 2. Елемент оболонки з прикладеними силами і моментами

Розглянемо рух елемента оболонки, обмеженого лініями $x^1, x^1 + dx^1;\ x^2, x^2 + dx^2$ (рис. 2) у момент часу t. Відповідно до принципу Даламбера при складанні рівнянь руху врахована рівновага активних сил, сил пружності і сил інерції. Умова рівності нулю головного вектора всіх сил, прикладених до елемента серединної поверхні оболонки має вигляд

$$\frac{\partial \sqrt{a}\vec{T}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a}\vec{T}^2}{\partial x^2} + \sqrt{a}\vec{q}\left(t\right) - \sqrt{a}h\gamma\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \tag{9}$$

де $\vec{q}(t)$ – приведене до серединної поверхні зовнішнє навантаження, віднесене до одиниці площі, h – товщина оболонки, γ – щільність матеріалу.

Для більшості практичних задач вплив поверхневих моментів на стійкість коливань оболонок незначний, тому дію моменту зовнішніх сил та інерцію повороту поверхні не враховано. Умова рівності нулю головного моменту всіх сил і моментів, прикладених до виділеного елемента серединної поверхні

$$\frac{\partial \sqrt{a}M^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a}M^2}{\partial x^2} + \left(\vec{e}_1 \times T^1\right) + \left(\vec{e}_2 \times T^2\right) = 0. \tag{10}$$

Якщо виконати перетворення

$$\frac{\partial \sqrt{a}\vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \sqrt{a}\left(\frac{\partial \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\beta\alpha}\vec{T}^\alpha\right) = \sqrt{a}\nabla_\alpha \vec{T}^\alpha \quad (\alpha = 1,2). \tag{11}$$

де $\Gamma^\beta_{\alpha\beta}$ – символи Крістоффеля другого роду, ∇_α – символ коваріантної похідної, диференціальні рівняння руху оболонки у векторній формі (9) і (10) набувають вигляду

$$\nabla_\alpha \vec{T}^\alpha + \vec{q}(t) - \gamma h \ddot{\vec{u}} = 0 \quad (\alpha = 1,2) \tag{12}$$

$$\nabla_\alpha \vec{M}^\alpha + (\vec{e}_\alpha \times \vec{T}^\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1,2). \tag{13}$$

Тут контраваріантні вектори внутрішніх зусиль розкладено по векторах основного локального базису недеформованої серединної поверхні

$$\vec{T}^\alpha = T^{\alpha\beta}\vec{e}_\beta + T^{\alpha 3}\vec{e}_3 \quad (\alpha, \beta = 1,2), \tag{14}$$

де $T^{\alpha\beta}$ – двічі контраваріантні компоненти тензора внутрішніх зусиль, що характеризують мембранні зусилля; $T^{\alpha 3}$ – перерізуючи зусилля; $T^{12} = T^{21}$.

Контраваріантні вектори внутрішніх моментів розкладено по векторах взаємного локального базису недеформованої поверхні

$$\vec{M}^\alpha = C_{\beta\delta} M^{\alpha\beta} \vec{e}^\delta \quad (\alpha, \beta, \delta = 1,2), \tag{15}$$

де M^{11}, M^{22} – згинальні моменти; M^{12}, M^{21} – крутні моменти; $C_{\alpha\beta}$ – дискримінантний тензор поверхні; $C_{11} = C_{22} = 0$, $C_{12} = \sqrt{a}$, $C_{21} = -\sqrt{a}$.

Контраваріантні складові тензорів мембранних $T^{\alpha\beta}$ та згинаючих $M^{\alpha\beta}$ зусиль представлено через коваріантні компоненти тензорів мембранних $\varepsilon_{\alpha\beta}$ та згинаючих $\mu_{\alpha\beta}$ деформацій залежностями, що випливають із закону стану теорії пружності за умови рівності нулю поперечних напружень

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\varepsilon_{\gamma\delta}\left[\nu a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta} + (1-\nu)a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}\right]; \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\mu_{\gamma\delta}\left[\nu a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta} + (1-\nu)a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}\right] \\ &\qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1,2), \end{aligned} \tag{16}$$

де E – модуль пружності Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

На рис. 2 показані додатні напрямки компонентів внутрішніх зусиль, моментів і зовнішнього динамічного навантаження, які діють на елемент серединної поверхні оболонки в момент часу t. Компоненти деформацій $\varepsilon_{\alpha\beta}$ і $\mu_{\alpha\beta}$ визначаються через вектор переміщень

$$\vec{u} = u_1\vec{e}^1 + u_2\vec{e}^2 + u_3\vec{n} \tag{17}$$

відповідно до формул

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}\vec{e}_\beta + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + \upsilon_\alpha\upsilon_\beta\right), \\ \mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C^{\alpha\gamma}}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial x^\beta}\vec{e}^\gamma + \frac{1}{C^{\beta\delta}}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial x^\alpha}\vec{e}^\delta\right) \end{aligned} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1,2), \tag{18}$$

де $\vec{\Omega} = C^{\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vec{e}_\beta -$ вектор кутів повороту, $\vartheta_\alpha = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \vec{n} \ (\alpha = 1,2)$; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} -$ деформації по напрямках базисних векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ відповідно; $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} -$ деформації зсуву; $\mu_{11}, \mu_{22} -$ згинаючі деформації, що характеризують зміну кривини серединної поверхні по напрямках базисних векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$; μ_{12} характеризує крутіння поверхні; $\vartheta_1, \vartheta_2 -$ кути повороту нормалі до серединної поверхні оболонки.

Співвідношення (14)-(18) після перетворень з використанням формули Гауса-Вейнгартена

$$\begin{aligned} \vec{e}_{ij} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^s_{ij} \vec{e}_s + b_{ij} \vec{n}; \ \vec{e}_j^{\,i} = \frac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{sj} \vec{e}^{\,s} + b^i_j \vec{n}; \\ \vec{e}_{3j} &= \vec{n}_j = \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^j} = -b^s_j \vec{e}_s = b_{js} \vec{e}^{\,s} \quad (i, j, s = 1, 2) \end{aligned} \tag{19}$$

повністю характеризують напружений стан оболонки та визначають деформації і форми її усталеного руху. В роботі за допомогою методу криволінійних сіток зроблено перехід від континуальної моделі до дискретної. Припускаючи, що оболонка знаходиться в режимі усталеного руху і з огляду на можливість виникнення у напрямку x^1 (рис.1) циклічно симетричних форм коливань, на основі проекційного методу виконано редукцію рівнянь руху в напрямку колової координати x^1 і по координаті часу t. Враховані формули Шварца-Крістоффеля

$$\frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x^i} = \Gamma^k_{i1} \vec{e_k}, \frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x^1} = \Gamma^i_{k1} \vec{e^k} \quad (i\ ,k = 1,\ 2,\ 3). \tag{20}$$

Задано розмір ділянки Δx^2 рівним одиниці та третій доданок рівняння (12) подано у вигляді половини суми векторів навантаження $\vec{q}$, що діють на два сусідні різницеві вузли. Дискретна модель набуває вигляду системи трьох скалярних різницевих рівнянь руху оболонок з довільною формою твірної для j-го різницевого вузла

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}})(\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{12} T^{12} - b^1_1 T^{13})_j + (\sqrt{a} T^{21})_{(j+0,5)} a^{1j}_{1(j+0,5)} - (\sqrt{a} T^{21})_{(j-0,5)} a^{1j}_{1(j-0,5)} + \\ &+\frac{1}{2}[(\sqrt{a}\, q^1(t))_{(j+0,5)} a^{1j}_{1(j+0,5)} + (\sqrt{a}\, q^1(t))_{(j-0,5)} a^{1j}_{1(j-0,5)}] - \frac{1}{2}\gamma h [(\sqrt{a}\, \ddot{u}_1)_{(j+0,5)} a^{1j}_{1(j+0,5)} + (\sqrt{a}\, \ddot{u}_1)_{(j-0,5)} a^{1j}_{1(j-0,5)}] = 0; \\ &\frac{1}{2}(\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}})(\frac{\partial T^{12}}{\partial x^1} + \Gamma^2_{11} T^{11})_j + \sqrt{a} T^{22})_{(j+0,5)} a^{2j}_{2(j+0,5)} - (\sqrt{a} T^{22})_{(j-0,5)} a^{2j}_{2(j-0,5)} + \\ &+(\sqrt{a}\, T^{23})_{(j+0,5)} a^{2j}_{3(j+0,5)} - (\sqrt{a}\, T^{23})_{(j-0,5)} a^{2j}_{3(j-0,5)} + \frac{1}{2}[\sqrt{a_{(j+0,5)}}(q^2(t)_{(j+0,5)} a^{2j}_{2(j+0,5)} + q^3(t)_{(j+0,5)} a^{2j}_{3(j+0,5)}) + \\ &+\sqrt{a_{(j-0,5)}}(q^2(t)_{(j-0,5)} a^{2j}_{2(j-0,5)} + q^3(t)_{(j-0,5)} a^{2j}_{3(j-0,5)})] - \frac{1}{2}\gamma h [\sqrt{a_{(j+0,5)}}(\ddot{u}_{2\,(j+0,5)} a^{22j}_{(j+0,5)} + \ddot{u}_{3\,(j+0,5)} a^{32j}_{(j+0,5)}) + \\ &+\sqrt{a_{(j-0,5)}}\, \ddot{u}_{2\,(j-0,5)} a^{22j}_{(j-0,5)} + \ddot{u}_{3\,(j-0,5)} a^{32j}_{(j-0,5)})] = 0; \end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a_{(j+0,5)}}+\sqrt{a_{(j-0,5)}})(\frac{\partial T^{13}}{\partial x^{1}}+b_{11}T^{11})_{j}+(\sqrt{a}T^{22})_{(j+0,5)}a^{3j}_{2(j+0,5)}-(\sqrt{a}T^{22})_{(j-0,5)}a^{3j}_{2(j-0,5)}+$$
$$+(\sqrt{a}T^{23})_{(j+0,5)}a^{3j}_{3(j+0,5)}-(\sqrt{a}T^{23})_{(j-0,5)}a^{3j}_{3(j-0,5)}+\frac{1}{2}[\sqrt{a_{(j+0,5)}}(q^{2}(t)_{(j+0,5)}a^{3j}_{2(j+0,5)}+q^{3}(t)_{(j+0,5)}a^{3j}_{3(j+0,5)})+$$
$$+\sqrt{a_{(j-0,5)}}(q^{2}(t)_{(j-0,5)}a^{3j}_{2(j-0,5)}+q^{3}(t)_{(j-0,5)}a^{3j}_{3(j-0,5)})]-\frac{1}{2}\gamma h[\sqrt{a_{(j+0,5)}}(\ddot{u}_{2\,(j+0,5)}a^{23j}_{(j+0,5)}+\ddot{u}_{3\,(j+0,5)}a^{33j}_{(j+0,5)})+$$
$$+\sqrt{a_{(j-0,5)}}\,\ddot{u}_{2\,(j-0,5)}a^{23j}_{(j-0,5)}+\ddot{u}_{3\,(j-0,5)}a^{33j}_{(j-0,5)})]=0.$$

Тут $a^{ij}_{k(j+0,5)}=(\vec{e^{i}})_{j}(\vec{e_{k}})_{(j+o,5)}$ – коефіцієнти перетворення векторних компонент при переході з локального базису в точці $(j+\ 0,5)$ у локальний базис точки (j), для визначення яких необхідні перші похідні від рівнянь поверхні. Шість невідомих зусиль, що входять у систему трьох рівнянь руху оболонки (21) представлено через кінцево-різницеві аналоги контраваріантних компонентів тензорів згинаючих зусиль $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha 3}$та крутних моментів $M^{\alpha\beta}$, дискретні коваріантні компоненти тензорів мембранних $\varepsilon_{\alpha\beta}$ і згинаючих $\mu_{\alpha\beta}$ деформацій серединної поверхні та кутів повороту нормалі серединної поверхні оболонки. В результаті невідомими в системі рівнянь (21) є величини, що залежать від часу t і компонент вектора переміщень u_1, u_2, u_3.

В третьому розділі наведена чисельна методика визначення частот і форм власних коливань тонких оболонок. Рівняння вільних коливань зведено до стандартної задачі на власні значення, порядок розмірності якої знижено за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. Представлено чисельний підхід до дослідження усталених нелінійних вимушених періодичних коливань оболонок та аналізу стійкості з визначенням критичних значень навантажень та відповідних форм втрати стійкості. Система нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку усталених вимушених нелінійних коливань має вид

$$M\ddot{Y}+C\dot{Y}+KY=G(t;Y)+\mu F(t), \qquad (22)$$

де M, C, K – матриця відповідно мас, демпфірування і жорсткості; $G(t,Y)$ – нелінійна T- періодична по t вектор-функція; $Y(y_1, y_2, ..., y_r)$ – вектор-функція розв'язку (переміщення) системи; μ – параметр інтенсивності (амплітуди) зовнішнього навантаження; $F(t)$ – T- періодична вектор-функція зовнішньої дії.

Наближений розв'язок системи (22) подано у вигляді відрізка ряду Фур'є в комплексній формі з частотою, рівною частоті зовнішнього навантаження

$$y(t)=\sum_{n=-N}^{N}B_{n}e^{in\omega t}, \qquad (23)$$

де B_n – r- вимірні вектори, складові яких є коефіцієнтами Фур'є періодичних функцій $y_m(t)$ $(m=1,2,...,r)$, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ – кругова частота.

Для дослідження T- періодичних розв'язків системи (22) використовується метод продовження розв'язку по параметру, в якості ведучого параметру прийнята інтенсивність навантаження μ. Нехай при деякому значені $\mu=\mu^{l}$ відомий T-

періодичний розв'язок задачі (22). Тоді, надаючи параметру μ малий приріст $\Delta\mu^1$, розв'язок подаємо у вигляді $y^2 = y^1 + \Delta y^1$. Підставляючи рішення у (22), отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами відносно невідомих приростів вектор-функцій Δy

$$M\Delta\ddot{y}^1 + C\Delta\dot{y}^1 + K\Delta y^1 = G'y(t, y^1)\Delta\,y^1 + \Delta\mu^1 F(t) + R^1(t)\,, \tag{24}$$

де $G'y(t, y^1)$ – матриця з елементами $g_{sj} = \dfrac{\partial G_s(t, y^1)}{\partial y_j}$, які є T- періодичними функціями від t; $R^1(t)$ – вектор-функція нев'язки попереднього кроку

$$R^1(t) = M\ddot{y}^1 + C\dot{y}^1 - G(t, y^1) - \mu^1 F(t)\,. \tag{25}$$

Для побудови періодичного розв'язку системи (24) використовується метод Бубнова-Гальоркіна. Розв'язок системи (24) знаходиться наближено у вигляді відрізків ряду Фур'є

$$\Delta y^1(t) = \sum_{n=-N}^{N} \Delta B_n^1 e^{in\omega t}\,. \tag{26}$$

T - періодичні вектор-функції $F(t), R(t)$ і елементи матриці подаються у вигляді

$$F(t) = \sum_{s=-M}^{M} f_s e^{is\omega t};\; R(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_l e^{il\omega t};\; g_{sj} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{sjl} e^{il\omega t}\,. \tag{27}$$

Підставивши (27) і (26) в систему (25), а потім спроектувавши отриману систему на функції $exp(-il\omega t)$ і $exp(il\omega t)$ $\left(l = 1, .2, .., N\right)$, маємо систему лінійних рівнянь відносно вектора ΔB_n^1:

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{r}\left[K_{sj} - \operatorname{Re} g_{os}^1\right]\operatorname{Re}\Delta B_{0j}^1 - \sum_{j=1}^{r}\left\{\sum_{n=1}^{N} 2\operatorname{Re} g_{nsj}^1 \operatorname{Re}\Delta B_{nj}^1 + \sum_{n=1}^{N} 2Jmg_{nsj}^1 J_m \Delta B_{nj}^1\right\} = \Delta\mu^1 \operatorname{Re} f_{0s} + \operatorname{Re} r_{0s}^1;\\
\sum_{j=1}^{r}\left\{\begin{aligned}&-\operatorname{Re} g_{lsj}^1 \operatorname{Re}\Delta B_{0j}^1 + \sum_{n=1}^{N}\left[(K_{sj} - \delta_s^j m_{sj}(l\omega)^2)\delta_e^n - (\operatorname{Re} g_{(l+n)sj}^1 + \operatorname{Re} g_{/l-n/sj}^1)\right]\operatorname{Re}\Delta B_{nj}^1 + \\ &+\sum_{n=1}^{N}\left[\delta_s^j \delta_e^n C_{sj} l\omega + (Jmg_{(l+n)sj}^1 - sign(l-n) Jmg_{/l-n/sj}^1)\right] Jm\Delta B_{nj}^1\end{aligned}\right\} = \Delta\mu^1 \operatorname{Re} f_{ls} + \operatorname{Re} r_{ls}^1;\\
\sum_{j=1}^{r}\left\{\begin{aligned}&-Jmg_{lsj}^1 \operatorname{Re}\Delta B_{0j}^1 + \sum_{n=1}^{N}\left[\delta_s^j \delta_l^n C_{sl} l\omega - \left(Jmg_{(l+n)sj}^1 + sign(l-n) Jmg_{/l-n/sj}^1\right)\right]\operatorname{Re}\Delta B_{nj}^1 + \\ &+\sum_{n=1}^{N}\left[(K_{sj} - \delta_s^l m_{sj}(l\omega)^2)\delta_e^n + (\operatorname{Re} g_{(l+n)sj}^1 - \operatorname{Re} g_{/l-n/sj}^1)\right] Jm\Delta B_{nj}^1\end{aligned}\right\} = \Delta\mu^1 Jmf_{ls} + Jmr_{ls}^1\\
(s = 1, 2, ..., r;\; l = 1, 2, ..., N),
\end{gathered} \tag{28}$$

де δ_β^α − символ Кронекера.

Розв'язуючи систему (28), знаходимо значення коефіцієнтів $\Delta B_n^1\left(n = 0, \pm 1, ..., \pm N\right)$. Наближений розв'язок системи (22), який відповідає значенню параметра μ^2, має вигляд

$$\Delta y^2(t) = \sum_{n=-N}^{N} (B_n^1 + \Delta B_n^1) e^{in\omega t}\,. \tag{29}$$

Цей алгоритм можна використовувати і для побудови послідовних розв'язків системи (22), коли при постійній інтенсивності зовнішньої дії змінюється її частота.

Для дослідження стійкості T- періодичного розв'язку $y(t)$ по першому наближенню складено рівняння в варіаціях, яке має вигляд

$$M\Delta\ddot{y} + C\Delta\dot{y} + K\Delta y = G'_y(t,y)\Delta y\,. \tag{30}$$

Стійкість розв'язків рівнянь (30) визначається за допомогою характеристичних показників λ цієї системи. Згідно теорії Флоке система має розв'язок виду

$$\Delta y(t) = e^{\lambda T} \sum_{n=-N}^{N} \Delta B_n e^{in\omega t} \quad , \tag{31}$$

де $\Delta B_n - T$ - періодичні вектор-функції.

Підставляючи (31) в (30) і проектуючи його на систему функцій $exp(-il\omega t)$ і $exp(il\omega t)$ $\left(l=1,.2,..,N\right)$, отримуємо однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{r}\Big[\lambda^2\delta_s^j m_{sj} + \lambda\delta_s^j C_{sj} + K_{sj} - \operatorname{Re} g_{0sj}\Big]\operatorname{Re}\Delta B_{0j} - \sum_{j=1}^{r}\left\{\sum_{n=1}^{N} 2\operatorname{Re} g_{nsj}\operatorname{Re}\Delta B_{nj} + \sum_{n=1}^{N} 2Jmg_{nsj}Jm\Delta B_{nj}\right\} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{\begin{array}{l} -\operatorname{Re} g_{lsj}\operatorname{Re}\Delta B_{0j} + \sum\limits_{n=1}^{N}\Big[(\lambda^2-(l\omega)^2)\delta_s^j m_{sj}\delta_l^n + \delta_s^j\delta_l^n\lambda C_{sj} + \delta_l^n K_{sj} - (\operatorname{Re} g_{(l+n)sj} + \operatorname{Re} g_{/l-n/sj})\Big]\operatorname{Re}\Delta B_{nj} - \\ -\sum\limits_{n=1}^{N}\Big[2\lambda l\omega\delta_s^j\delta_l^n m_{sj} + l\omega\delta_s^j\delta_l^n C_{sj} + (Jmg_{(l+n)sj} - sign(l-n)Jmg_{/l-n/sj})\Big]Jm\Delta B_{nj} \end{array}\right\} = 0; \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{\begin{array}{l} -Jmg_{lsj}\operatorname{Re}\Delta B_{0j} + \sum\limits_{n=1}^{N}\Big[2\lambda l\omega\delta_s^j\delta_l^n m_{sj} + l\omega\delta_s^j\delta_l^n C_{sj} - (Jmg_{(l+n)sj} + sign(l-n)Jmg_{/l-n/sj})\Big]\operatorname{Re}\Delta B_{nj} + \\ +\sum\limits_{n=1}^{N}\Big[(\lambda^2-(l\omega)^2)\delta_s^j m_{sj}\delta_l^n + \delta_s^j\delta_l^n\lambda C_{sj} + \delta_l^n K_{sj} + (\operatorname{Re} g_{(l+n)sj} - \operatorname{Re} g_{/l-n/sj})\Big]Jm\Delta B_{nj} \end{array}\right\} = 0$$

$$s = 1,2,...,r;\ \ l = 1,2,...,N.$$

Згідно теореми Ляпунова, якщо визначник матриці системи (32) перетворюється в нуль тільки при значенні характеристичного показника λ, у якого дійсна частина менше нуля, то розв'язок $y(t)$ стійкий, а якщо хоча б у одного λ дійсна частина більша нуля, то розв'язок $y(t)$ є нестійким.

Рівняння, які описують коливання за кососиметричними формами, незалежні між собою, тому рівняння в варіаціях для них приводяться до рівняння типу Хілла:

$$\Delta\ddot{y} + 2\varepsilon\Delta\dot{y} + \omega_0^2\Delta y + 2\Phi(t)\Delta y = 0\,, \tag{33}$$

де ε – коефіцієнт демпфірування; ω_0^2 – квадрат частоти власних коливань; $\Phi(t)$ – періодична функція з періодом T, яка залежить від параметрів, які характеризують властивості оболонки.

Періодична функція $\Phi(t)$ представлена у вигляді збіжного ряду Фур'є:

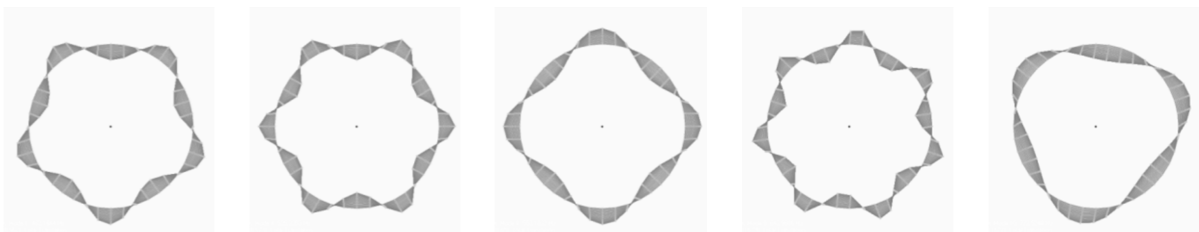
$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{ik\omega t}\,, \tag{34}$$

де Φ_k – коефіцієнт Фур'є функції $\Phi(t)$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – кругова частота.

<u>В четвертому розділі</u> досліджена стійкість нелінійних коливань тонких (циліндричних, конічних, гіперболічних) оболонок при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень, оцінено вплив геометричних параметрів оболонок на критичні значення динамічного навантаження та форми втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль в коловому напрямку оболонки. В дослідженнях не враховано вплив демпфірування на динамічну стійкість оболонок у зв'язку з малим значенням параметра затухання для сталевих пружних тонких оболонок. Збіжність отриманих результатів досягнута за допомогою згущення сітки вздовж твірної оболонки.

Розглянута тонка пружна циліндрична оболонка з варіюванням параметрів: товщиною $h=\left[0,001;0,0015;0,002;0,004\right]$ м, радіусом $R=\left[0,2;0,4;0,8\right]$ м і висотою $L=\left[0,48;0,72;0,96\right]$ м. Механічні характеристики сталевої оболонки приймалися такими: модуль пружності E=2,06·10^{11} Па, щільність матеріалу γ=7800 кг/м^3, коефіцієнт Пуассона μ=0,3. На верхньому краю оболонки задано ковзне кріплення, на нижньому − жорстке кріплення. Розглянута дія рівномірно розподіленого поздовжнього періодичного навантаження інтенсивністю $q=q_1\cos\omega t$.

Для підтвердження достовірності отриманих результатів розв'язана тестова задача стійкості циліндричної оболонки з параметрами: $h=0,002$ м, $R=0,2$ м і $L=0,48$ м. Визначено критичне значення статичного навантаження із застосуванням методу криволінійних сіток та методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича $q_{cr}^{st}=2325,57$ кН/м. Виконано порівняння з аналітичним результатом за формулою Лоренца-Тимошенка та чисельним − методом Ньютона-Рафсона в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу NASTRAN: 2514,95 кН/м та 2510,23 кН/м відповідно. Визначені частоти і форми власних коливань оболонки (рис. 3) за допомогою розв'язання задачі на власні значення (розділ 3). Вздовж твірної спостерігалася одна або дві півхвилі. Виконано їх порівняння з результатами, отриманими в комплексі NASTRAN методом Ланцоша. Кількість півхвиль в коловому напрямку і вздовж твірної співпали, значення частот власних коливань відрізнялись менше ніж на 4%.



ν_1=490,05 Гц ν_2=533,01 Гц ν_3=561,78 Гц ν_4=651,84 Гц ν_5=781,78 Гц

Рис. 3. Перші п'ять форм і частот власних коливань циліндричної оболонки з параметрами: $h=0,002$ м, $R=0,2$ м і $L=0,48$ м.

Критичні значення динамічного навантаження для циліндричної оболонки та кількість півхвиль в коловому напрямку представлені на рис. 4.

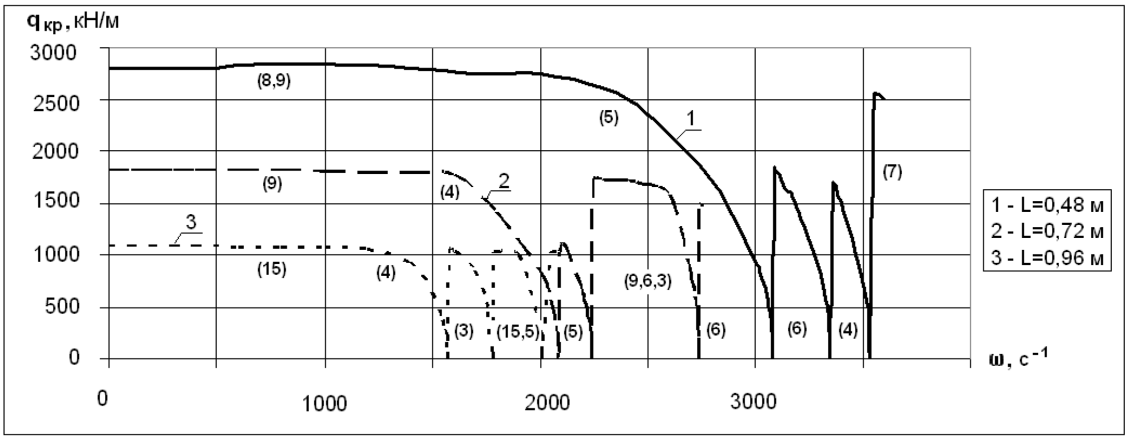


Рис. 4. Залежність критичного навантаження від частоти при змінній висоті L циліндричної оболонки при сталих $h=0{,}002$ м, $R=0{,}2$ м.

В початковому діапазоні частот збурення критичні значення періодичного навантаження більші за критичні значення статичного навантаження, які є сталими величинами і не залежать від частоти збурення. Розглянемо криву 1: втрата динамічної стійкості оболонки відбувається спочатку по шостій, потім по десятій формі власних коливань з відповідною кількістю півхвиль в коловому напрямку (вісім та дев'ять) і двома півхвилями вздовж твірної. При подальшому збільшенні частоти збурення до перетину кривою 1 осі частот на значенні, яке відповідає першій частоті власних коливань оболонки (резонансний характер втрати стійкості), форма втрати стійкості співпадає з першою формою власних коливань оболонки. На частотах збурення, які лежать між резонансними втратами стійкості, оболонка деформується по другій та третій формах власних коливань (рис. 3). На даних частотах збурення спостерігається одна півхвиля вздовж твірної оболонки.

Вплив геометричних параметрів оболонки на стійкість вимушених усталених нелінійних коливань оцінено за критичними значеннями динамічного навантаження та формами втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль в коловому напрямку оболонки (рис. 4, 5, 6).

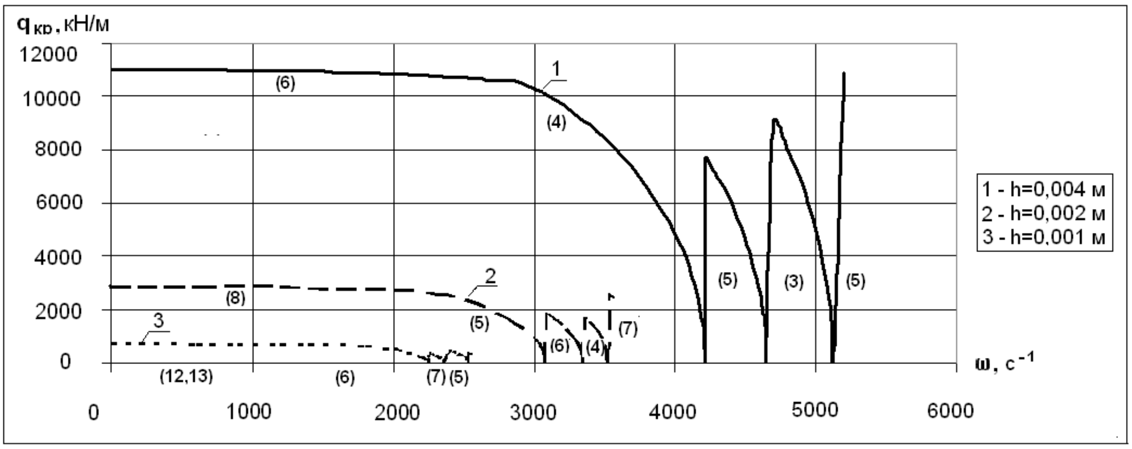


Рис. 5. Залежність критичного навантаження від частоти при змінній товщині h циліндричної оболонки при сталих $R=0{,}2$ м і $L=0{,}48$ м.

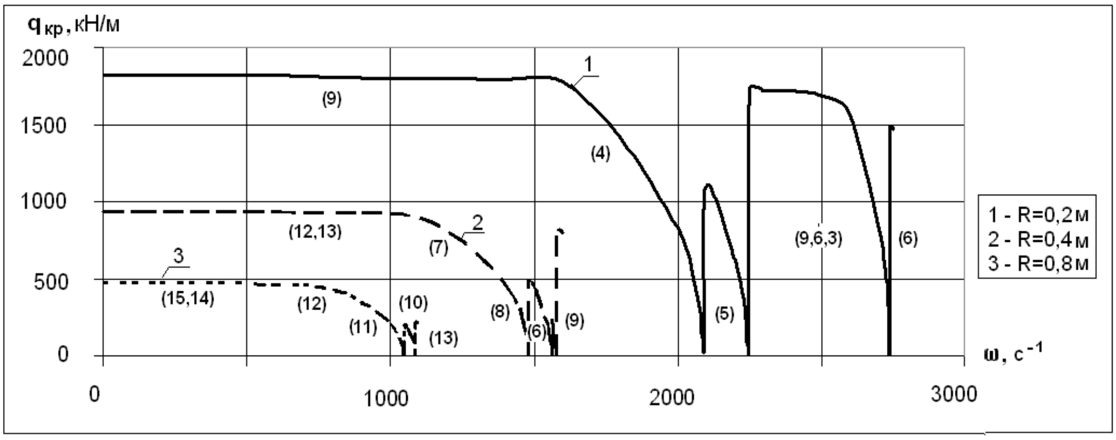


Рис. 6. Залежність критичного навантаження від частоти при змінному радіусі R циліндричної оболонки при сталих $h = 0,002$ м і $L = 0,48$ м.

Видно, що критичні значення динамічного навантаження на циліндричну оболонку зменшуються при збільшенні висоти $\left(h / R = const\right)$(рис. 4); при зменшенні товщини $\left(R / L = const\right)$(рис. 5); при збільшенні радіуса оболонки $\left(h / L = const\right)$(рис. 6). Така залежність співпадає з варіюванням геометричних параметрів в дослідженнях статичної стійкості циліндричних оболонок, але отримані результати підтвердили істотний вплив частоти збурення і частот власних коливань оболонок на їх динамічну стійкість.

Досліджена стійкість вимушених усталених коливань тонкої пружної конічної оболонки з варіюванням геометричних параметрів при дії рівномірно розподіленого поздовжнього періодичного навантаження $q = q_1 \cos \omega t.$ Радіуси оболонки задавалися сталими $r = 0{,}15$ м та $R = 0,2$ м, змінювалась товщина $h = \left[0{,}001; 0{,}002\right]$ м і висота $L = \left[0,48; 0,72\right]$ м оболонки, механічні характеристики приймалися рівними: E=2,06·10^{11} Па, γ=7800 кг/м^3, μ=0,3. Нижній край оболонки жорстко закріплений, на верхньому краю задано ковзне кріплення. Розв'язана тестова задача стійкості на прикладі конічної оболонки з параметрами: $h = 0,002$ м, $r = 0{,}15$м, $R = 0,2$ м і $L = 0,48$ м. Визначено критичне значення статичного навантаження $q_{cr}^{st} = 3327,25$кН/м, яке порівняно з аналітичним результатом за формулою Штаермана та чисельним − методом Ньютона-Рафсона в комплексі NASTRAN: 3511,49 кН/м та 3336,32 кН/м відповідно. Розв'язана задача на власні значення та виконано порівняння частот і форм власних коливань конічної оболонки (рис. 7) з чисельними результатами комплексу NASTRAN.

ν_1=540,12 Гц ν_2=554,53 Гц ν_3=648,03 Гц ν_4=749,99 Гц ν_5=818,01 Гц

Рис. 7. П'ять перших форм власних коливань конічної оболонки з параметрами: $h = 0,002$ м, $r = 0{,}15$ м, $R = 0,2$ м і $L = 0,48$ м

Спостерігалось співпадіння кількості півхвиль вздовж твірної (одна або дві півхвилі) і в коловому напрямку оболонки. Значення частот власних коливань відрізнялись на 3%. Стійкість вимушених усталених коливань конічної оболонки при варіюванні її геометричних параметрів досліджена згідно методики (розділ 3). Отримані критичні динамічні навантаження та форми втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль в коловому напрямку оболонки (рис. 8, 9).

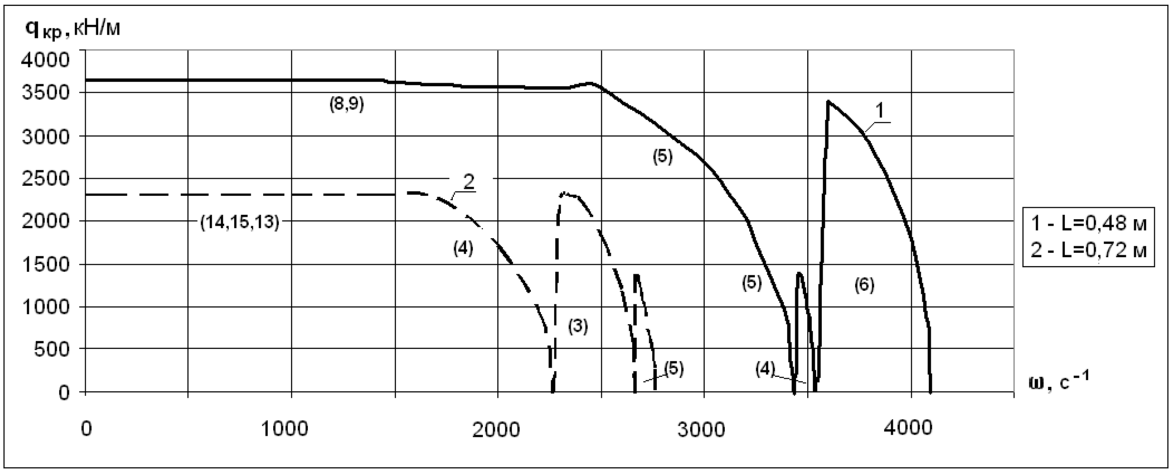


Рис. 8. Залежність критичного навантаження від частоти для конічної оболонки при змінній висоті L і сталих $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м, $r = 0,15$м.

Втрата стійкості конічної оболонки набуває резонансного характеру при перетині осі частот кривими на значеннях, які відповідають частотам власних коливань. Існує початковий діапазон частот збурення, в якому критичні значення періодичного навантаження більші за критичне значення статичного навантаження, при цьому форма втрати стійкості не співпадає з першою формою власних коливань оболонки. Дослідження показали, що значення критичного навантаження зменшується при збільшенні висоти конічної оболонки $(h, r, R = const)$(рис. 8) і збільшується при збільшенні її товщини $(L, r, R = const)$(рис. 9).

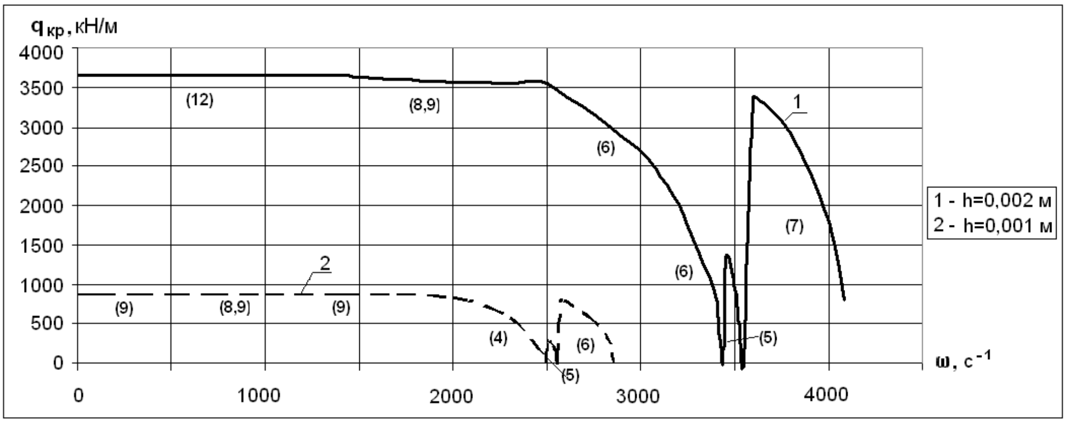
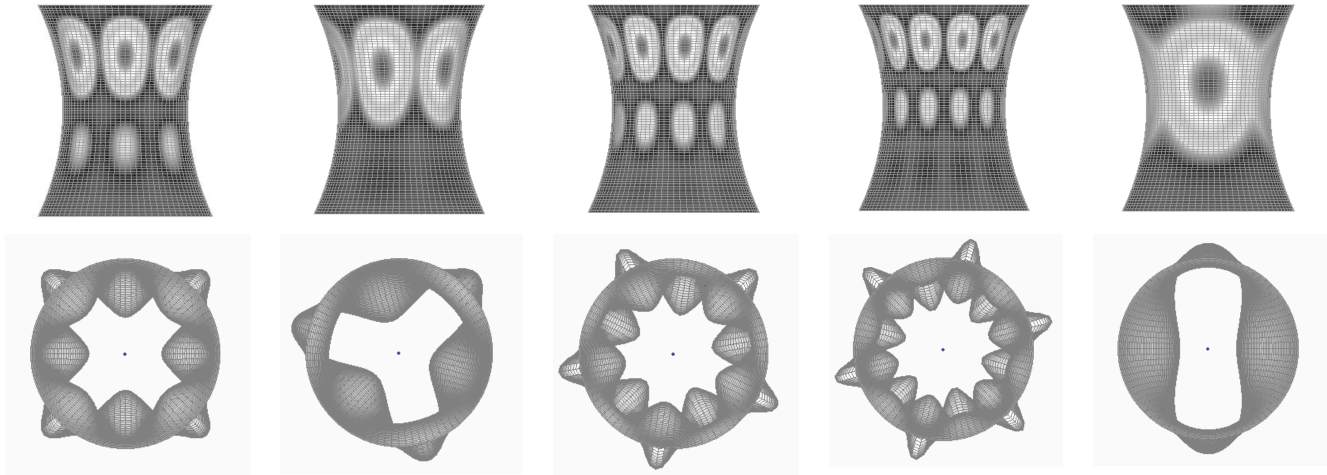


Рис. 9. Залежність критичного навантаження від частоти для конічної оболонки при змінній товщині h і сталих $L = 0,48$ м, $R = 0,2$ м, $r = 0,15$м.

Наведені результати дослідження стійкості нелінійних коливань тонкого пружного сталевого однополого гіперболоїда при дії поздовжнього періодичного навантаження. Геометричні і механічні параметри оболонки приймались такими: $h = 0,002$ м, $r = 0,15$м, $R = 0,2$ м, $L = 0,48$ м, E=2,06·10^{11} Па, γ =7800 кг/м^3, μ =0,3.

Оболонка жорстко закріплена на нижньому краю, на верхньому − задано ковзне кріплення вздовж твірної. До верхнього краю оболонки прикладено повздовжнє періодичне параметричне навантаження $q = q_0 + q_1 \cos \omega t,$ де q_0, q_1 − статична і динамічна складові навантаження відповідно. В роботі не враховано розповсюдження поздовжніх періодичних хвиль в оболонці $(q_1 = 0)$. Втрата стійкості оцінена за нижчим критичним значенням статичної складової навантаження q_0, коли перша частота власних коливань оболонки дорівнює нулю. На рис. 10 представлені п'ять перших частот і форм власних коливань гіперболоїда без урахування навантаження.



ν_1 = 669,3232 Гц ν_2 = 709,2944 Гц ν_3= 761,7425 Гц ν_4= 953,0676 Гц ν_5= 1008,08 Гц

Рис. 10. Частоти і форми власних коливань однополого гіперболоїда.

Результати дослідження динамічної стійкості однополого гіперболоїда методом продовження по параметру представлені на рис. 11 у вигляді залежностей перших п'яти частот власних коливань від дії статичної складової параметричного навантаження q_0.

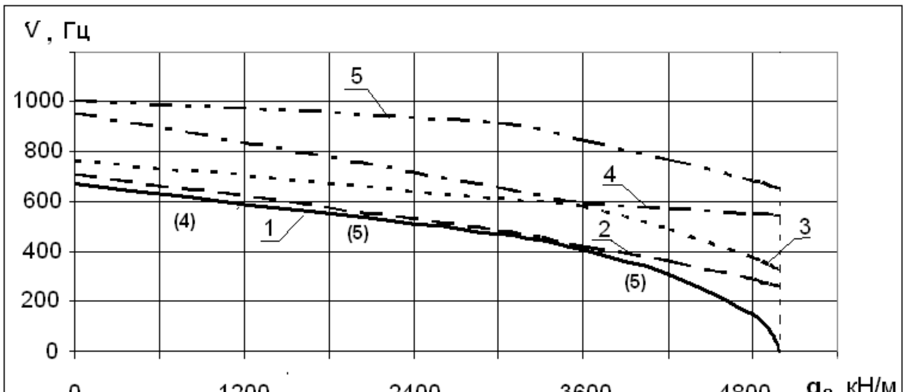


Рис. 11. Вплив статичної складової поздовжнього навантаження на частоти (1−першу, 2-другу, 3-треттю, 4-четверту, 5-п'яту) власних коливань оболонки.

Втрата стійкості оболонки по першій формі власних коливань відбулась при $q_{cr0} = 5271,21$ кН/м. Форма деформування оболонки в діапазоні навантаження $q_0 = [0 \div 2100,08]$кН/м мала вигляд першої форми власних коливань, в подальшому до втрати стійкості − третьої. Для підтвердження достовірності результатів виконано їх порівняння з результатами, отриманими методом скінченних елементів.

На теперішній час в програмному комплексі існує обмеження до параметрів однополих гіперболоїдів. Тому динамічна стійкість коливань високого гіперболоїда при поверхневому та повздовжньому навантаженні виконана за допомогою методу скінченних елементів, який реалізовано в програмі NASTRAN [3].

Наведені результати дослідження стійкості вимушених коливань захисної ємності паливного резервуару, який розташований на Українській антарктичній станції ”Академік Вернадський”, при кінематичному збуренні. Захисна ємність має вигляд циліндричної оболонки висотою 6,58 м, діаметром 6,96 м, товщиною стінки – 5 мм. Кінематичні навантаження виникають в результаті періодичних за часом коливань жорсткої платформи, на якій розташована ємність. Досліджено випадок, коли періодичний переносний рух основи є поступальним в напрямку, паралельному осі симетрії оболонки. Закон руху основи в інерціальній системі координат задається співвідношенням

$$z_1 = H\cos Qt, \tag{35}$$

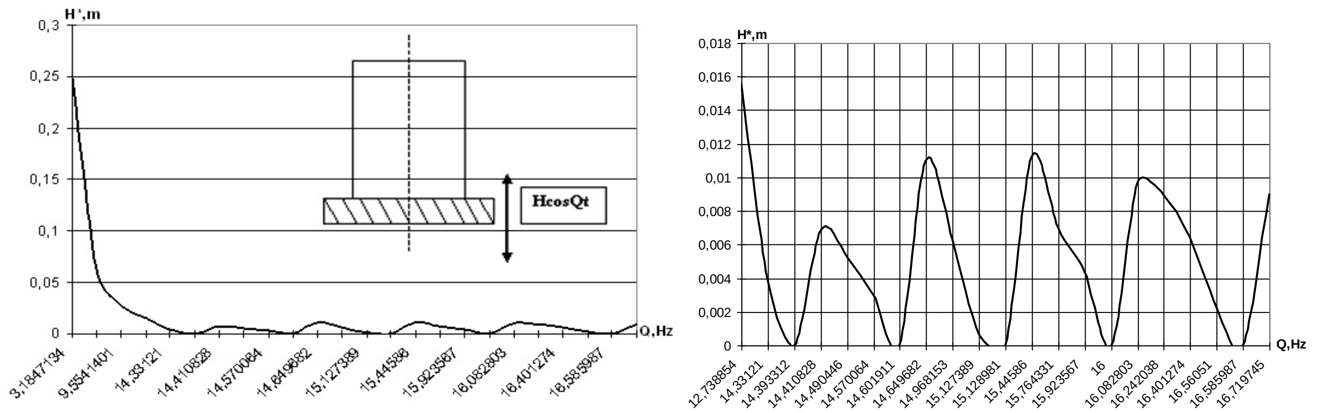
де H, Q – значення амплітуди і частоти збурення руху основи відповідно.

Рівняння руху оболонки має вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sqrt{a}\,\vec{T}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \sqrt{a}\,\gamma h\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} - HQ^2\cos Qt\vec{k}_1\right) = 0;\\
&\frac{\partial \sqrt{a}\,\vec{M}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + [\vec{e}_{\alpha} \times \vec{T}^{\alpha}]\sqrt{a} = 0 \qquad\qquad \alpha = 1,2.
\end{aligned} \tag{36}$$

При їх складанні враховано, що коріолісові сили інерції відсутні і переносні сили інерції не залежать від положення оболонки в рухомій системі відліку [8].

Залежність критичних значень кінематичного навантаження H^* від частоти збурення Q представлена на рис. 12. Розглянуто діапазон частот, який включає нижчі власні частоти коливань оболонки. Результати дослідження показали, що збільшення частоти збурення з нульової до першої частоти власних коливань оболонки призводить до різкого зниження критичного навантаження.



а б

Рис. 12. Залежність критичних значень кінематичного збурення від його частоти (а) та в збільшеному масштабі (б) в діапазоні частот власних коливань оболонки.

В кожному діапазоні частот кінематичного збурення, які обмежуються частотами власних коливань оболонки, при збільшенні частоти збурення зростає критичне навантаження до певного рівня, а потім – знижується. Циклічно симетричні форм втрати стійкості усталених коливань ємності представлені на рис. 13.

$\nu_{1,10}$= 14,33 Гц $\nu_{2,9}$= 14,57 Гц $\nu_{3,11}$= 14,97 Гц $\nu_{4.8}$=15,76 Гц $\nu_{5,12}$=16,56 Гц

Рис. 13. Форми втрати стійкості усталеного руху захисної ємності

Проаналізована залежність амплітуди усталених коливань вздовж твірної та в коловому напрямку певних точок оболонки від інтенсивності періодичного збурення її основи [8].

ВИСНОВКИ

Основні результати, отримані в дисертаційній роботі, полягають у наступному:

- сформована система розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява;
- побудована математична модель динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке за допомогою проекційного методу;
- виконана дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості на основі методу криволінійних сіток;
- застосовано метод редукції базису, який є чисельною модифікацією метода Бубнова-Гальоркіна, для зменшення кількості узагальнених координат дискретної динамічної моделі;
- отримано розв’язки нових прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних оболонок (циліндричних, конічних, однополих гіперболоїдів) при дії повздовжніх, поверхневих, кінематичних періодичних навантажень за допомогою методу продовження розв’язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова;
- виконана оцінка впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості;
- створено програмне забезпечення для реалізації чисельного підходу до дослідження стійкості нелінійних коливань тонких оболонок, яке надає розвитку обчислювальному комплексу методу криволінійних сіток;
- достовірність отриманих в дисертаційній роботі результатів обґрунтовується строгістю математичних перетворень, узгодженням чисельних результатів з аналітичними результатами інших авторів, збіжністю результатів в залежності від

згущення сітки та точності розв'язання системи рівнянь, порівняльним аналізом отриманих результатів з результатами досліджень методом скінченних елементів.

В даній дисертаційній роботі сукупність отриманих результатів являє собою розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки щодо забезпечення стійкістю тонких оболонкових конструкцій при дії динамічних навантажень з метою їх безаварійної експлуатації.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

а) статті, що включені до наукових періодичних видань інших держав, та у наукових фахових виданнях України, що включені до міжнародних наукометричних баз:

1. Палій О.М. Вплив геометричних характеристик конічних оболонок на їх динамічну стійкість / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 103. – С. 235-242.
2. Палій О.М. Частотний аналіз відгуку однополого гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 199-206.
3. Чисельне моделювання стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни / О.О. Лук'янченко, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. – Вип. 101. – С. 45-59.

б) статті в наукових фахових виданнях України:

4. Динаміка повздовжніх коливань тонкої циліндричної оболонки / В.В. Гайдайчук, О.А. Киричук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 51-56.
5. Математична модель параметричних нелінійних коливань тонких оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Вістник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 230-234.
6. Стійкість усталених коливань циліндричних оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Вістник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. –Вип. 2(31).– С. 235-239.
7. Вплив геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – Вип. 82. – С. 102-110.
8. Стійкість захисної оболонки паливного резервуара при періодичних кінематичних збуреннях / О.А. Киричук, О.В. Кузько, О.М. Палій //Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. – Київ: Видавництво «Сталь», 2010. – Вип. 6. – С. 148-158.
9. Розрахунок динамічних характеристик оболонки паливного резервуару / О.А. Киричук, О.В. Кузько, В.В. Гайдайчук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд: науково-техн. збірник. – 2010. – Вип. 86. – С. 16-21.
10. Надійність тонких оболонок з реальними недосконалостями форми / О.О. Лук'янченко, Ю.В. Ворона, О.В. Костіна, М.О. Вабіщевич, О.М. Палій // Вісник КПІ. Серія Приладобудування. – Київ: НТУУ «КПІ», 2019. – Вип. 58(2). – С. 34-40.

в) публікації по доповідям на міжнародних та вітчизняних конференціях:

11. Палій О.М. Стійкість нелінійних коливань циліндричних оболонок при кінематичних збуреннях / О.М. Палій // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА (Київ, 17-19 жовтня 2006 р.) К., 2006. – С. 11.
12. Палій О.М. Побудова редукованої моделі стійкості параметричних коливань тонкостінної оболонки виду гіперболічного параболоїда Шухова / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // ІІ Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у навчальному процесі"(Київ, 25-26 вересня 2018 р.) К., 2018. – С. 83-85.
13. Paliy O. Influence of geometrical characteristics on the dynamic stability of thin shells / O. Paliy, O. Lukianchenko // V International Interdisciplinary Scientific Conference "Social Development Towards values. Ethics-Technology-Society" (Zabrze Polska, September 25-27, 2019) Z.P., 2019. – p. 113-114.
14. Influence of shape imperfections on the stability of thin shells / Yu. Vorona, O. Kostina, O. Paliy // IX International Antarctic Conference dedicated to the 60th anniversary of the signing of the Antarctic Treaty 1959 p. (Kyiv, Ukraine, May 14-16, 2019) K., 2019. – p. 233-236.
15. Pressing issues of trouble-free operation and modernization of the infrastructure of the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station / V. Bazhenov, O. Lukianchenko, M. Vabishchevych, O. Paliy // X International Antarctic Conference dedicated to the 25th Anniversary of raising of the National Flag of Ukraine at the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station (Kyiv, Ukraine, May 11-13, 2021) K., 2021. – p. 93-94.

АНОТАЦІЯ

Палій О.М. Стійкість нелінійних коливань тонких оболонок при періодичних навантаженнях. − Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню стійкості нелінійних коливань тонких пружних осесиметричних оболонок при дії періодичних навантажень та оцінці впливу геометричних параметрів оболонок на критичні значення навантажень та форми втрати стійкості. Сформована система розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява. Побудована математична модель динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке за допомогою проекційного методу. Виконана дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості на основі модифікованого методу кінцевих різниць − методу криволінійних сіток. Методом редукції базису Бубнова-Гальоркіна виконано зменшення кількості узагальнених координат дискретної динамічної моделі. За

допомогою методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова отримано розв'язки нових прикладних задач стійкості нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних сталевих оболонок (циліндричних, конічних, однополих гіперболоїдів) при дії періодичних (повздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень. Оцінено вплив геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості. Чисельний підхід до дослідження стійкості нелінійних коливань тонких оболонок реалізовано у вигляді програмного забезпечення, яке надає розвитку обчислювальному комплексу методу криволінійних сіток.

Ключові слова: тонкі осесиметричні оболонки, нелінійні коливання, динамічна стійкість, періодичні навантаження, критичні навантаження, форми втрати стійкості, метод криволінійних сіток.

Paliy O.M. Stability of nonlinear vibrations of thin shells under periodic loads. – The qualifying paper manuscript copyright.

The thesis for candidate of technical science degree on specialty 05.23.17 – Structural Mechanics. – Kyiv National University of Construction and Architecture, of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv. 2021.

The thesis is devoted to investigation of the stability of nonlinear oscillations of thin elastic axisymmetric shells subjected to periodic loads and to the estimation of the influence of geometrical parameters of shells on critical dynamic values of loads and forms of stability loss. Applying the geometrically nonlinear relations of the moment theory of thin elastic shells, formulated in tensor form and based on the Kirchhoff-Love hypotheses, the system of calculated equations of steady-state forced nonlinear oscillations is formed. A mathematical model of the dynamic stability of steady-state forced nonlinear oscillations of thin elastic shells is constructed using the projection method. The discretization of differential calculated relations of the theory of thin shells in the problems of steady-state forced nonlinear oscillations and their stability is done on the basis of the modified method of finite differences - the method of curvilinear grids.

The solutions to new applied problems of stability of nonlinear oscillations of thin axisymmetric elastic steel shells subjected to periodic force or kinematic excitations are solved using combination of method of continuation the solution by a parameter, Newton-Kantorovich method and the theorems of stability in the sense of Lyapunov.

The influence of geometrical parameters of thin shells on frequencies and forms of natural oscillations without and taking into account loading, amplitudes of steady-state forced nonlinear oscillations, critical values of dynamic loads and corresponding forms of loss of stability is estimated. The numerical approach to the study of the stability of nonlinear oscillations of thin shells is implemented in the form of software that provides the development of the computational complex of the curvilinear grids method.

Key words: thin axisymmetric shells, nonlinear oscillations, dynamic stability, periodic loads, critical loads, forms of loss of stability, method of curvilinear grids.

Палій Оксана Миколаївна

СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

05.23.17 − будівельна механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Відповідальний за випуск
д.т.н., професор Д.В. Михайловський