

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

На правах рукопису

ПАЛІЙ ОКСАНА МИКОЛАЇВНА

УДК 539.3

**СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК
ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

05.23.17 – Будівельна механіка

Дисертація

на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Науковий керівник: Лук'янченко Ольга Олексіївна,
доктор технічних наук, старший науковий співробітник.

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Палій О.М. Стійкість нелінійних коливань тонких оболонок при періодичних навантаженнях.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2021.

Коливання тонких оболонкових конструкцій при дії періодичних навантажень супроводжується рядом фізичних явищ і механічних ефектів, які властиві нелінійним системам з великою кількістю ступенів вільності. До таких ефектів можна віднести: перебудову форм коливань, виникнення складних резонансних режимів коливань, існування декількох режимів коливань при однакових параметрах динамічних навантажень та інші. Такі ефекти є небезпечними, бо можуть змінити стійкі режими вимушених коливань оболонок на нестійкі, призвести до виникнення нових форм втрати стійкості, які в свою чергу можуть призвести до аварійних ситуацій.

У першому розділі виконано огляд існуючих підходів до дослідження стійкості нелінійних вимушених коливань тонких оболонок при періодичному навантаженні.

Загальна теорія тонких пружних оболонок, а також різноманітні питання, які пов'язані з розрахунками міцності оболонкових елементів конструкцій, знайшли відображення в монографіях В.З. Власова, О.Л. Гольденвейзера, М.О. Кільчевського, Н.В. Колкунова, О.І. Лур'є, А. Лява, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилова, С.П. Тимошенка, К.Ф. Черних, де містяться основні положення та залежності теорії оболонок. Загальні закономірності протікання періодичних процесів у рамках лінійної теорії коливань тонких оболонок вивчені порівняно ретельно. Великий внесок в розвиток динаміки оболонок поклали роботи М.О. Алумяє, І.Я. Аміро, В.В. Болотіна, А.С. Вольміра, Е.І. Григолюка, В.О. Заруцького, В.В. Кабанова, М.І. Мяченкова, І.Ф. Образцова, О.М. Фролова,

К.З. Хайрнасова, R.R. Archer, B. Budiansky, R.S. Bodner, J.E. Crawford, J. Famili, W. Flugge, I.S. Humphreys, P.F. Jordan, W.T. Koiter, R.S. Roth, L.H. Sodel та інших авторів. Постановка задачі про стійкість коливань оболонок належить В.М. Челомею. В роботах А.С. Вольміра, І.Г. Кільдібекова, Г.В. Мішенкова, Е. Рейснера, Г.А. Хегемайера, F.C.U. Fu, Y.C. Fung та інших досліджені вимушені коливання пластинок, циліндричних та сферичних панелей на основі моделей з одним ступенем вільності. Значний внесок у розвиток нелінійної теорії пружних оболонок різних форм та створення методів розв'язання задач стійкості зробили Н.А. Алумяе, М.О. Алфутів, С.О. Амбарц'юмян, І.Я. Аміро, В.А. Баженов, В.В. Болотін, Н.В. Валішвілі, А.С. Вольмір, І.І. Ворович, К.З. Галімов, О.В. Гондляр, Є.О. Гоцуляк, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.М. Гузь, В.І. Гуляєв, Л.Г. Доннел, Я.О. Жук, В.О. Заруцький, Б.Я. Кантор, В.Т. Койтер, М.С. Корнішин, О.А. Киричук, В.Д. Кубенко, П.З. Луговий, О.О. Лук'янченко, О.В. Марчук, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилов, Дж. Оден, В.Г. Піскунов, О.В. Погорелов, О.С. Сахаров, С.П. Тимошенко, В.І. Феодосьєв, Ю.М. Шевченко, M. Amabili, F. Pellicano та інші вчені.

У другому розділі розглянута чисельна реалізація методу криволінійних сіток в задачах стійкості нелінійних коливань тонких оболонок. Формування системи розрахункових рівнянь вимушених коливань виконано із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких оболонок, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява. Для опису деформованої поверхні оболонки використано підхід Лагранжа.

В третьому розділі наведена чисельна методика визначення частот і форм власних коливань тонких оболонок. Рівняння вільних коливань зведено до стандартної задачі на власні значення, порядок розмірності якої знижено за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. Представлено чисельний підхід до дослідження усталених нелінійних вимушених періодичних коливань оболонок та аналізу стійкості з визначенням критичних значень навантажень та відповідних форм втрати стійкості.

В четвертому розділі досліджена стійкість нелінійних коливань тонких (циліндричних, конічних, гіперболічних) оболонок при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень, оцінено вплив геометричних параметрів оболонок на критичні значення динамічного навантаження та форми втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль в коловому напрямку оболонки. В дослідженнях не враховано вплив демпфірування на динамічну стійкість оболонок у зв'язку з малим значенням параметра затухання для сталевих пружних тонких оболонок. Збіжність отриманих результатів досягнута за допомогою згущення сітки вздовж твірної оболонки.

Наведені результати дослідження стійкості вимушених коливань захисної ємності паливного резервуару, який розташований на Українській антарктичній станції "Академік Вернадський", при кінематичному збуренні. Захисна ємність має вигляд циліндричної оболонки висотою 6,58 м, діаметром 6,96 м, товщиною стінки – 5 мм. Кінематичні навантаження виникають в результаті періодичних за часом коливань жорсткої платформи, на якій розташована ємність. Досліджено випадок, коли періодичний переносний рух основи є поступальним в напрямку, паралельному осі симетрії оболонки.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у чисельній реалізації методу криволінійних сіток в задачах оцінки впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних оболонок на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань. При цьому:

1. Сформована система розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява.

2. За допомогою проєкційного методу побудована математична модель динамічної стійкості усталених вимушених коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке.

3. На основі методу криволінійних сіток виконана дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості.

4. Застосовано метод редукції базиса, який є чисельною модифікацією метода Бубнова-Гальоркіна, для зменшення кількості узагальнених координат дискретної динамічної моделі.

5. Отримано розв'язки нових прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних сталевих оболонок (циліндричних, конічних, однополюх гіперболоїдів) при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень за допомогою методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова.

6. Виконана оцінка впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості.

7. Чисельний підхід до дослідження стійкості нелінійних коливань тонких оболонок реалізовано у вигляді програмного забезпечення, яке надає розвитку обчислювальному комплексу методу криволінійних сіток.

Практичне значення одержаних результатів полягає у застосуванні чисельної методики визначення стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок до розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки з забезпечення їх безаварійної експлуатації на стадії проектування.

Чисельна реалізація запропонованих підходів використана в Київському національному університеті будівництва і архітектури при виконанні грантової і науково-дослідної робіт, в навчальному процесі та для надання рекомендацій із забезпечення безаварійної експлуатації паливного резервуара на Українській антарктичній станції “Академік Вернадський”.

Ключові слова: тонкі осесиметричні оболонки, нелінійні коливання, динамічна стійкість, періодичні навантаження, критичні навантаження, форми втрати стійкості, метод криволінійних сіток.

Список публікацій здобувача

а) статті в наукових фахових виданнях України:

1. Динаміка повздовжніх коливань тонкої циліндричної оболонки / В.В. Гайдайчук, О.А. Киричук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 51-56.
2. Математична модель параметричних нелінійних коливань тонких оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Вістник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 230-234.
3. Стійкість усталених коливань циліндричних оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Вістник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 235-239.
4. Вплив геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – Вип. 82. – С. 102-110.
5. Стійкість захисної оболонки паливного резервуара при періодичних кінематичних збуреннях / О.А. Киричук, О.В. Кузько, О.М. Палій //Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. – Київ: Видавництво «Сталь», 2010. – Вип. 6. – С. 148-158.
6. Розрахунок динамічних характеристик оболонки паливного резервуару / О.А. Киричук, О.В. Кузько, В.В. Гайдайчук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд: науково-техн. збірник. – 2010. – Вип. 86. – С. 16-21.
7. Надійність тонких оболонок з реальними недосконалостями форми / О.О. Лук'янченко, Ю.В. Ворона, О.В. Костіна, М.О. Вабіщевич, О.М. Палій

// Вісник КПІ. Серія Приладобудування. – Київ: НТУУ «КПІ», 2019. – Вип. 58(2). – С. 34-40.

б) статті, що включені в наукових періодичних видань інших держав, та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

8. Чисельне моделювання стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни / О.О. Лук'янченко, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. – Вип. 101. – С. 45-59.
9. Частотний аналіз відгуку однополого гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження / О.О. Лук'янченко, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 199-206.
10. Палій О.М. Вплив геометричних характеристик конічних оболонок на їх динамічну стійкість / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 103. – С. 235-242.

в) основні публікації по доповідям на міжнародних та вітчизняних конференціях

11. Палій О.М. Стійкість нелінійних коливань циліндричних оболонок при кінематичних збуреннях / О.М. Палій // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА (Київ, 17-19 жовтня 2006 р.) К., 2006. – С. 11.
12. Палій О.М. Побудова редукованої моделі стійкості параметричних коливань тонкостінної оболонки виду гіперболічного параболоїда Шухова / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // II Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у навчальному процесі" (Київ, 25-26 вересня 2018) К., 2018. – С. 83-85.
13. Paliy O. Influence of geometrical characteristics on the dynamic stability of thin shells / O. Paliy, O. Lukianchenko // V International Interdisciplinary Scientific

Conference “Social Development Towards values. Ethics-Technology-Society”
(Zabrze Polska, September 25-27, 2019) Z.P., 2019. – p. 113-114.

14. Influence of shape imperfections on the stability of thin shells / Yu. Vorona, O. Kostina, O. Paliy // IX International Antarctic Conference dedicated to the 60th anniversary of the signing of the Antarctic Treaty 1959 p. (Kyiv, Ukraine, May 14-16, 2019) K., 2019 – p. 233-236.
15. Pressing issues of trouble-free operation and modernization of the infrastructure of the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station / V. Bazhenov, O. Lukianchenko, M. Vabishchevych, O. Paliy // X International Antarctic Conference dedicated to the 25th Anniversary of raising of the National Flag of Ukraine at the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station (Kyiv, Ukraine, May 11-13, 2021) K., 2021 – p. 93-94.

ЗМІСТ

ВСТУП	10
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ ПІДХОДІВ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК	17
РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ КРИВОЛІНІЙНИХ СІТОК В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК	33
2.1. Застосування геометрично нелінійних співвідношень теорії тонких оболонок до формування системи розрахункових рівнянь вимушених коливань	34
2.2. Дискретизація векторних рівнянь нелінійних коливань тонких оболонок методом криволінійних сіток	42
2.3. Редукція диференціальних рівнянь теорії нелінійних коливань оболонок на основі проекційного метода	48
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК	55
3.1. Визначення частот і форм власних коливань тонких оболонок	56
3.2. Чисельний підхід до дослідження усталених нелінійних вимушених коливань оболонок	59
3.3. Дослідження стійкості усталених вимушених коливань тонких оболонок	62
РОЗДІЛ 4. ОЦІНКА ВПЛИВУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ НА СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ПРИ ДІЇ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ	64
4.1. Оцінка достовірності розробленої методики та її апробація при розв'язанні тестових задач	64
4.2. Оцінка впливу геометричних параметрів на стійкість усталених	71

нелінійних вимушених коливань тонких оболонок при дії повздовжнього періодичного навантаження	
4.2.1. Стійкість усталених вимушених коливань циліндричних оболонок	72
4.2.2. Стійкість усталених вимушених коливань конічних оболонок	84
4.3. Дослідження динамічної стійкості однополого гіперболоїда при дії повздовжнього періодичного навантаження	90
4.4. Дослідження стійкості вимушених коливань циліндричної оболонки при дії кінематичного навантаження	100
ВИСНОВКИ	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	110
ДОДАТКИ	130

ВСТУП

Актуальність теми. Коливання тонких оболонкових конструкцій при дії періодичних навантажень супроводжується рядом фізичних явищ і механічних ефектів, які властиві нелінійним системам з великою кількістю ступенів вільності. До таких ефектів можна віднести: перебудову форм коливань, виникнення складних резонансних режимів коливань, існування декількох режимів коливань при однакових параметрах динамічних навантажень та інші. Такі ефекти є небезпечними, бо можуть змінити стійкі режими вимушених коливань оболонок на нестійкі, призвести до виникнення нових форм втрати стійкості, які в свою чергу можуть призвести до аварійних ситуацій. Актуальність теми обумовлена необхідністю забезпечити міцність і стійкість тонких оболонкових конструкцій при дії експлуатаційних навантажень ще на стадії проектування. Якісне проектування оболонок в значній мірі залежить від можливостей їх точного розрахунку, дослідження їх поведінки при різних видах навантажень, проведення чисельних експериментів і перевірки достовірності результатів розрахунку. До появи комп'ютерів в будівельній механіці методи розрахунку конструкцій були орієнтовані на аналітичну реалізацію розрахункових схем та уникнення великої кількості обчислень. З появою комп'ютерів відбувся перехід від вузькоорієнтованих прийомів і методів до побудови комп'ютерних моделей конструкцій з використанням методів механіки деформівного твердого тіла і математичної фізики. На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) утворилася наукова школа Д.В.Вайнберга (В.А. Баженов, Є.О. Гоцуляк, В.І. Гуляєв, Є.С. Дехтярюк, В.Н. Кислоокій, О.С. Сахаров, О.Л. Синявський та інші), вчені якої розробляли варіаційно-різницеві методи та створювали програмні комплекси для вирішення проблем розв'язку задач міцності, стійкості та коливань пластин і оболонок. Одним з таких методів став модифікований метод кінцевих різниць – метод криволінійних сіток. За рахунок повного виключення похибки апроксимації коваріантної похідної від функції жорстких зміщень, метод криволінійних сіток

характеризується швидкою збіжністю, що дає можливість ефективно розв'язувати задачу будівельної механіки. На теперішній час недостатньо дослідженою залишається задача динамічної стійкості тонких оболонкових конструкцій в геометрично нелінійній постановці та оцінка впливу геометричних параметрів оболонок на стійкість усталених вимушених коливань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА). Результати досліджень були отримані в межах грантової та науково-дослідної роботи, що виконувались за дорученням Міністерства освіти і науки України:

1ГР-2007 «Стійкість нелінійних параметричних коливань циліндричних і конічних оболонок» (2007 р., № держ. реєстрації 0107U0008099);

1ДБ-2018 «Дослідження напружено-деформованого стану і стійкості просторових конструкцій» (2018-по т.ч., № держ. реєстрації 0118U005222).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних пружних оболонок на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань при дії періодичних навантажень методами будівельної механіки.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

- формування системи розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява;

- постановка задачі динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок;

- дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості на основі методу криволінійних сіток;

- редукування розрахункових співвідношень в задачі усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок за допомогою чисельної модифікації методу Бубнова-Гальоркіна;

- побудова математичної моделі динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке за допомогою проекційного методу;

- реалізація розробленого чисельного підходу у вигляді програмного забезпечення в обчислювальному комплексі методу криволінійних сіток;

- розв'язання прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних сталевих оболонок (циліндричних, конічних, однополюх гіперболоїдів) при дії поздовжніх, поверхневих, кінематичних періодичних навантажень за допомогою методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова;

- аналіз впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення статичного і динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості;

- оцінка достовірності отриманих результатів визначення власних частот і форм коливань оболонок, критичних значень статичних і динамічних навантажень та відповідних форм втрати стійкості порівнянням їх з аналітичними результатами інших авторів та результатами досліджень методом скінчених елементів.

Об'єктом дослідження є усталені вимушені нелінійні коливання тонких осесиметричних оболонок (циліндричної, конічної, однополюго гіперболоїда) з різними геометричними параметрами; математичні і комп'ютерні моделі тонких оболонок.

Предметом дослідження є частоти і форми власних коливань оболонок без і з урахуванням навантаження; амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань; критичні значення навантажень, деформації і еквівалентні напруження.

Методи дослідження. Дослідження стійкості усталених коливань тонких пружних оболонок при періодичному навантаженні базується на спільному використанні модифікованого кінцево-різницевого метода – метода криволінійних сіток, проекційного методу і методу продовження розв’язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича. Нелінійні диференціальні рівняння коливань оболонки дискретизуються в напрямку твірної за допомогою модифікованого кінцево-різницевого методу криволінійних сіток. В круговому напрямку компоненти вектора переміщень елемента серединної поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами. Розв’язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв’язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича. Критерієм втрати стійкості усталених вимушених нелінійних коливань оболонки є рівність нулю визначника матриці лінеризованих рівнянь згідно теореми Ляпунова. Граничне значення параметру інтенсивності збудження, при якому визначник змінює знак, характеризує верхню критичну точку або точку біфуркації.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у чисельній реалізації методу криволінійних сіток в задачах оцінки впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних оболонок на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань. При цьому:

1. Сформована система розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява.

2. За допомогою проекційного методу побудована математична модель динамічної стійкості усталених вимушених коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке.

3. На основі методу криволінійних сіток виконана дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості.

4. Застосовано метод редукції базиса, який є чисельною модифікацією метода Бубнова-Гальоркіна, для зменшення кількості узагальнених координат дискретної динамічної моделі.

5. Отримано розв'язки нових прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних сталевих оболонок (циліндричних, конічних, однополюх гіперболоїдів) при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень за допомогою методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова.

6. Виконана оцінка впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості.

7. Чисельний підхід до дослідження стійкості нелінійних коливань тонких оболонок реалізовано у вигляді програмного забезпечення, яке надає розвитку обчислювальному комплексу методу криволінійних сіток.

Достовірність результатів обґрунтовується строгістю математичних перетворень, узгодженням чисельних результатів з аналітичними результатами інших авторів, збіжністю результатів в залежності від згущення сітки та точності розв'язання системи рівнянь, порівняльним аналізом результатів, отриманих на основі методу криволінійних сіток, з результатами досліджень, виконаних методом скінченних елементів.

Практичне значення одержаних результатів одержаних результатів полягає у застосуванні чисельної методики визначення стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок до розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки з забезпечення їх безаварійної експлуатації на стадії проектування.

Чисельна реалізація запропонованих підходів використана в Київському національному університеті будівництва і архітектури при виконанні грантової і науково-дослідної робіт, в навчальному процесі та для надання рекомендацій із забезпечення безаварійної експлуатації паливного резервуара на Українській антарктичній станції “Академік Вернадський”.

Особистий внесок здобувача. Основні результати та положення, які становлять суть (зміст) дисертації, отримані автором самостійно. В публікаціях і роботах, підготовлених у співавторстві, викладені такі результати, що належать автору: огляд літературних джерел з питань сучасного стану проблеми, [3, 8, 10, 14, 15]; розрахункові співвідношення методу криволінійних сіток для тонких оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень у загальній криволінійній системі координат [5, 11, 13]; алгоритми та реалізація комп’ютерного моделювання власних та усталених вимушених нелінійних коливань тонких оболонок (циліндричних, конічних, однополюх гіперболоїдів) при дії періодичних (поздовжніх, поверхневих, кінематичних) навантажень [2, 8, 12]; розв’язки практичних задач по оцінці впливу геометричних параметрів тонких оболонок на критичні значення динамічного навантаження та форми втрати стійкості [1, 6, 7]; порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами дослідження методом скінченних елементів та інших авторів [4, 9].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи та отримані в ході її виконання результати доповідались та обговорювались на вітчизняних та міжнародних наукових конференціях:

«Міжнародна конференція по математичному моделюванню присвячена 100-річчю з дня народження Дж. Фон Неймана» (Херсон, ХНТУ, 2003р.).

«65-та науково-практична конференція КНУБА» (Київ, 2004 р.).

«Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА» (Київ, 2006, 2008 рр.).

«Міжнародна конференція по математичному моделюванню, присвячена 120-річчю з дня народження Р. Куранта» (Херсон, ХНТУ, 2008).

«71-а науково-практична конференція КНУБА» (Київ, 2010 р.).

«VI Міжнародна науково-технічна конференція ”Будівельні конструкції спортивних та просторових споруд: сьогодення та перспективи розвитку”» (Київ, УкрНДІпроектстальконструкція імені Шимановського, 2010 р.).

«II Міжнародна науково-практична конференція “Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (м. Київ, КНУБА, 2018 р.).

«V International Interdisciplinary Scientific Conference “Social Development Towards values. Ethics-Technology-Society”» (Zabrze Polska, 25-27 September 2019).

«IX International Antarctic Conference «The 60th anniversary of the signing of the Antarctic Treaty 1959 р.» (Kyiv, 2019).

«X International Antarctic Conference «The 25th Anniversary of raising of the national Flag of Ukraine at the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station» (Kyiv, 2021).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на міжкафедральному семінарі КНУБА (м. Київ, 2021).

Подяки. Автор вважає за необхідне виразити глибоку подяку науковому керівнику доктору технічних наук, провідному науковому співробітнику Науково-дослідного інституту будівельної механіки Лук’янченко Ользі Олексіївні, а також завідувачу кафедри теоретичної механіки КНУБА, доктору технічних наук, професору Гайдайчуку Віктору Васильовичу за консультації і надану допомогу.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ ПІДХОДІВ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

Процес коливання тонкостінних оболонкових конструкцій при дії динамічного навантаження супроводжується рядом механічних ефектів і фізичних явищ [1], які властиві нелінійним системам. До них відносяться не тільки кількісна еволюція коливального процесу, яка пов'язана з нелінійною залежністю амплітуди коливань від параметрів інтенсивності збурення, але і якісні зміни, що приводять до виникнення критичних станів, відгалуженню нових розв'язків і втрати стійкості з перебудовою форм руху.

Загальні питання лінійної теорії оболонок розроблені в працях С.А. Амбарцумяна [2], В.З. Власова [3], О.Л. Гольденвейзера [4, 5], Л.Г. Донелла [6], М.О. Кільчевського [7], О.І. Лур'є [8], В.В. Новожилов [9], К.Ф. Черних [10, 11] та інших. В них докладно викладені основні положення класичної теорії оболонок.

Загальні закономірності протікання періодичних процесів в рамках лінійної теорії коливань тонких оболонок вивченні достатньо докладно. В роботах І.Я. Аміро [12, 13], В.В. Болотіна [14, 15], А.С. Вольміра [16-18], Е.І. Григолюка [19, 20], О.Л. Гольденвейзера [5], В.В. Кабанова [19], І.Ф. Образцова [21], П.М. Огібалова [22, 23], О.Д. Оніашвілі [24], А.К. Перцева [25], І. М. Преображенського [26, 27], R.R. Archer [28], В. Budiansky, R.S. Roth [29], S.R. Bodner [30, 33], J. Famili [31], W. Flugge [32], I.S. Humphreys [33], W. Soedel [34] та інших авторів представлені різні математичні методи розв'язку лінійних задач коливань оболонок і отримані конкретні результати дослідження.

Постановка задачі про стійкість коливань оболонок належить В.М. Челомею [35, 36]. В монографії В.В. Болотіна [14] розглянуто питання динамічної стійкості оболонок та запропоновано підхід, в основу якого покладено припущення про

безмоментність докритичного стану. Беручи за вихідні рівняння моментної теорії В.З. Власова [3], автор отримує систему диференціальних рівнянь динамічної стійкості оболонок, вважаючи, що поверхнєве навантаження складається з навантаження вихідного безмоментного стану, сил інерції і додаткового приведенного навантаження, яке виникає при відхиленні серединної поверхні оболонки від вихідного безмоментного стану. Компоненти додаткового приведенного навантаження визначаються з рівнянь безмоментної теорії без урахування сил інерції цього стану. Таким чином, отримується система диференціальних рівнянь, лінійних по відношенню до переміщень та їх похідних. У випадку періодичного зовнішнього навантаження, розкладаючи переміщення по фундаментальним функціям, що задовольняють граничним умовам, задача зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

Для опису складних явищ, які спостерігалися в тонких оболонках, апарат лінійних диференціальних рівнянь був недостатнім, тому стали розробляти і використовувати значно складніший апарат нелінійного аналізу.

В статичній і динамічній поведінці тонких оболонок нелінійність може мати геометричне походження, що обумовлена гнучкістю оболонок внаслідок відносно малої протидії згинанню, і фізичне походження, яке пов'язано з деформаціями, що лежать за межами застосування закону Гука, тобто нелінійно залежать від зусиль. Найчастіше при створенні математичних моделей тонких оболонок враховується геометрична нелінійність, що дозволяє при дії інтенсивних навантажень, зокрема експлуатаційних періодичних, враховувати співрозмірні з товщиною оболонки деформації.

При розробці нелінійної теорії оболонок за основу приймалися фундаментальні принципи, які раніше були використані при побудові лінійної теорії тонкостінних конструкцій. В роботах А.С. Вольміра [37, 38], І.Г. Кільдібекова [39], Г.В. Мішенкова [40, 41], Е. Рейснера [42], Ф.С.У. Фу [43], У.С. Фунг [44] та інших досліджені вимушені коливання пластинок, циліндричних та сферичних панелей на основі моделей з одним ступенем вільності. Розглянуто задачі, що зв'язані з

швидкоплинним перехідним процесом, який приводить до втрати стійкості руху пластин і оболонок. Побудовані амплітудно-частотні характеристики для великих діапазонів частот коливань, показана неоднозначність режимів нелінійних коливань різної амплітуди при одній і тій же частоті.

Значний внесок у розвиток нелінійної теорії пружних оболонок різних форм та створення методів розв'язання задач стійкості зробили М.О. Алумяє, М.О. Алфутів, С.О. Амбарцумян, І.Я. Аміро, В.А. Баженов, В.В. Болотін, Н.В. Валішвілі, А.С. Вольмір, І.І. Ворович, К.З. Галімов, О.В. Гондляр, Є.О. Гоцуляк, Е.І. Григолюк, Я.М. Григоренко, О.М. Гузь, В.І. Гуляєв, Л.Г. Доннел, Я.О. Жук, В.О. Заруцький, Б.Я. Кантор, В.Т. Койтер, М.С. Корнішин, О.А. Киричук, П.З. Луговий, О.О. Лук'янченко, О.В. Марчук, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилов, Дж. Оден, В.Г. Піскунов, О.В. Погорєлов, О.С. Сахаров, С.П. Тимошенко, В.І. Феодосьєв, Ю.М. Шевченко, М. Amabili, F. Pellicano, W. Chien та інші вчені.

Співвідношення нелінійної теорії оболонок, що відповідає гіпотезам Кірхгофа-Лява, дослідженні в роботах А. Лява [44], С.П.Тимошенко [46], А.І. Лур'є [47], В.В. Новожилова [48], Х.М. Муштарі і К.З. Галімова [49, 50], Ченя (Wei-Zang Chien) [51, 52], М.О. Алумяє [53] та інших авторів. В рамках цих гіпотез дослідження поведінки оболонки зводиться до аналізу стану її серединної поверхні. Результатом цього є зведення тривимірної задачі механіки деформованого твердого тіла до двовимірної.

В багатьох роботах зазначено про важливе місце в теорії нелінійних коливань оболонкових конструкцій вирішення проблеми стійкості. Задачею стійкості руху займалось багато математиків і механіків, серед яких були Лагранж, Раус, М.Є. Жуковський.

Перший розв'язок задачі стійкості виконав Пуанкаре. Найбільш чітке і загальне визначення стійкості вперше було запропоновано О.М. Ляпуновим в праці [54] при дослідженні довільної динамічної системи. Створена Ляпуновим теорія стала основою для дослідження стійкості різних динамічних систем, в тому числі оболонкових конструкцій, іншими дослідниками [55].

В праці Д.Р. Меркіна [56] виконані дослідження стійкості періодичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь з використанням теорії Ляпунова про стійкість в першому наближенні, сутність якої заключається в переході до рівнянь в варіаціях, тобто до системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь. Для деяких систем рівнянь в варіаціях можливі переходи до одного рівняння типу Мат'є. В цьому випадку дослідження стійкості руху виконувалось за допомогою діаграми Айнса-Стретта.

В більшості задач динаміки пружних систем задача стійкості коливань зводиться до вивчення систем рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Рівняння Мат'є-Хілла має при деяких співвідношеннях між параметрами досліджуваної системи необмежено зростаючі розв'язки. Границі областей нестійкості на діаграмі Айнса-Стретта геометрично зображені кривими. На цих границях рівняння Мат'є має періодичні розв'язки.

Рівняння Мат'є-Хілла на протязі довгого часу було основним об'єктом дослідження динамічної стійкості стержнів, пластин і оболонок в лінійній постановці [14, 50, 56-60].

Для розв'язку задач про стійкість коливань оболонок в нелінійній постановці традиційно застосовуються наближенні методи нелінійної механіки. Серед них важливе значення мають асимптотичні методи дослідження нелінійних систем, які беруть початок з методу амплітуд, що повільно змінюються [61]. Побудова теорії асимптотичних методів нелінійної механіки, в яких розв'язок представляється у вигляді суми доданків, розкладених по степеням малого параметра, здійснена Н.М. Криловим, Н.Н. Боголюбовим, Ю.І. Митропольським в працях [62, 63]. Так як в методі малого параметру реалізація розв'язку в значній мірі залежить від правильного вибору форм для вихідного і збуреного стану та величини збурення, можливості методу є обмеженими. Для дослідження стійкості нелінійних коливань пружних систем застосовуються також методи еквівалентної лінеаризації і гармонічного балансу [64].

Теорія Флоке, яка ґрунтується на теоремах Ляпунова [55, 65] про стійкість руху в першому наближенні, отримала широке застосування в задачах дослідження

стійкості розв'язків системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Суть теорії Флоке полягає в побудові однорідної системи лінійних рівнянь в варіаціях для відповідних нелінійних систем і досліджень стійкості їх тривіальних розв'язків [66-68]. Особливості цього підходу є апроксимація невідомих функцій переміщень і напружень більшою кількістю форм по просторовим та часовим координатам [67-71]. Такий підхід дозволяє виявити ряд фізичних ефектів, властивим нелінійним усталеним коливанням пружних систем з більшим числом ступенів вільності.

Складність аналітичного вивчення систем нелінійних рівнянь обмежувала можливість дослідження сильно нелінійних механічних систем. До появи комп'ютерів (ЕОМ), в основному, вивчалися нелінійні коливання систем з малим числом ступенів вільності (переважно систем з одним ступенем вільності) [72, 73]. В роботах [74, 75] розглядалися в основному одномодові нелінійні коливання циліндричних оболонок.

Розвиток ЕОМ сприяв розробленню числових методів дослідження нелінійних систем, не обмежених малістю параметра збурення [58, 76]. В.І. Гуляєв і Є.С. Дехтярюк [66] запропонували чисельний метод побудови періодичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь, що дозволяють досліджувати різні режими періодичних коливальних рухів, включаючи питання стійкості і розгалуження розв'язків систем диференціальних рівнянь загального виду.

В роботі [77] дано повне обґрунтування застосування методу розгалуження до задач теорії оболонок, математичні основи якого розроблені М.М. Вайнбергом та В.А. Треногіним [78].

Складності розв'язку систем нелінійних диференціальних рівнянь коливань оболонок шляхом переходу до задачі Коші за допомогою числових методів використали А.С. Вольмір [18] та П.М. Огібалов [22].

В узагальненій монографії [79] викладені різні, в основу яких покладений метод прямих, обчислювальні алгоритми, які призначені для розрахунку характеристик вільних і вимушених коливань оболонок сферичної форми.

Динамічна задача зводиться до задачі Коші, яка розв'язується методом Рунге-Кута з автоматичним вибором кроку.

Дослідження нелінійних вимушених коливань оболонок і стійкість їх усталених режимів приводить до розв'язку системи диференціальних рівнянь з істотними нелінійностями. Застосування традиційних методів нелінійної механіки для дослідження таких систем пов'язано зі значними труднощами.

В задачах дослідження стійкості нелінійних усталених коливань оболонок обертання входить визначення значень їх критичних навантажень і осесиметричних чи неосесиметричних форм втрати стійкості. Проінтегрувати диференціальні рівняння стійкості в замкнутому вигляді вдається лише в простіших випадках одномірних задач при однорідному вихідному стаціонарному стані. Тому більшість результатів в області стійкості нелінійних коливань оболонок отримали різними числовими методами, з яких широке розповсюдження знайшли метод кінцевих елементів, варіаційно-різницевий метод, метод кінцево-різницевий, метод дискретної ортогоналізації та велика кількість їх модифікацій [80-84].

Монографія В.І. Гуляева, В.А. Баженова, Е.А. Гоцуляка, П.П. Лізунова [85] присвячена актуальним проблемам теорії нелінійних коливань і теорії хвиль. Авторами для побудови і дослідження періодичних розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь запропонований синтез методу продовження розв'язку по ведучому параметру, методу Ньютона-Канторовича, теорії Флоке і методу розгалуження. Такий підхід дозволяє будувати криві стаціонарних розв'язків, ідентифікувати критичні стани, конструювати відгалужуючі розв'язки і досліджувати їх стійкість.

На його основі в [85] виконано дослідження стійкості нелінійних коливань оболонок обертання при дії періодичних і ударних навантажень. Досліджені шляхи переходу від однієї форми руху до іншої при втраті стійкості.

Дослідженню стійкості нелінійних усталених вимушених коливань оболонок обертання, що підлягають дії статичної та гармонічної по часу складової поперечного навантаження приведено в роботі О.А. Киричука [68, 69, 86].

В роботі [86] відмічено, що при певних співвідношеннях параметрів періодичного навантаження можливі випадки підвищення критичного навантаження, що відповідає осесиметричній формі втрати стійкості усталеного руху оболонки.

Подібні задачі про стійкість нелінійних коливань різних тонких пружних оболонок обертання докладно розглядаються в роботах В.В. Гайдайчука, Є.О. Гоцуляка, В.І. Гуляєва, Є.С. Дехтярюка [66, 67, 70]. В них викладається числова методика дослідження стійкості вимушених нелінійних коливань осесиметричних оболонок, викликаних дією гармонічного в часі рівномірно розподіленого навантаження нормально до серединної поверхні оболонки. Також визначаються особливі точки періодичних розв'язків диференціальних рівнянь руху оболонки, що характеризують втрату стійкості нелінійних усталених коливань. Періодичне навантаження представляється сумою постійної і косинусоїдальної складових. Періодичний за часом розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь руху оболонки апроксимується відрізком подвійного ряду Фур'є. Для розв'язку системи нелінійних рівнянь, отриманих з врахуванням методу гармонічного балансу [64], використовується метод продовження розв'язку по параметру. В цих роботах дискретизація звичайних диференціальних рівнянь коливань здійснюється методом кінцевих різниць першого порядку точності [77].

Особлива увага при чисельній дискретизації звичайних диференціальних рівнянь коливань оболонок приділяється питанню про збіжність розв'язку. Розроблена Є.О. Гоцуляком [80, 87, 88] модифікована схема методу кінцевих різниць на випадок дискретизації векторних диференціальних співвідношень в криволінійних координатах, забезпечує хорошу збіжність розв'язку за рахунок повного виключення помилки апроксимації коваріантної похідної від функцій жорстких зміщень [89, 90].

Важливою задачею для дослідження оболонок є визначення спектра частот та форм вільних коливань. Для вирішення даної проблеми побудовано безліч різних підходів та методик, з яких можна виділити аналітичні, чисельні та

експериментальні методи. Огляди даного питання представлені у роботах [34, 91].

Більшість дослідників займалися визначенням спектра частот і форм власних коливань тонких оболонок [92-101]. В роботі [92] сформульовані рівняння неосесиметричних коливань сферичної оболонки, що дозволило отримати частоти і форми коливань в залежності від її геометричних співвідношень. В роботах [96, 97] використані наближенні методи визначення частот вільних згинальних коливань.

Спектр вільних коливань тонких циліндричних оболонок асимптотичним методом досліджується в роботі А.Л. Гольденвейзера [98].

В роботі [102] визначаються частоти та форми вільних коливань тонких циліндричних оболонок кругового та еліптичного поперечного перерізу еквівалентної маси при різних граничних умовах на одному торці та вільному на іншому. Дослідження проводилось за допомогою системи автоматизованого конструювання та виконання інженерного аналізу методом скінченних елементів – FEMAP з розв'язувачем NX NASTRAN [103].

Вільні коливання тонких ізотропних еліптичних оболонок постійної та змінної товщини однакової маси досліджувались методом скінченних елементів, реалізованим за допомогою високопродуктивного програмного забезпечення FEMAP, розробленого для інженерних аналізів в [104, 105] відповідно. Здійснено порівняльний аналіз чисельних результатів та експериментальних даних.

Для аналізу власних коливань параболічних оболонок [106] застосовується метод Релея-Рітца, для використання якого виведено вирази кінетичної і потенційної енергій параболічної оболонки сталої товщини. Досліджено властивості частот і форм власних коливань оболонок різної висоти.

В роботі [107] проведено дослідження власних коливань оболонок обертання параболічної форми. Методика аналізу спирається на застосування просторового скінченного елемента для моделювання тонкої пружної оболонки. Виконано порівняння розв'язків з результатами розрахунків, що отримані іншими авторами.

Чисельно визначено динамічні характеристики незамкненої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу при жорсткому закріпленні одного і двох торців за допомогою системи автоматизованого конструювання і виконання інженерного аналізу методом скінченних елементів – FEMAP з розв’язувачем NASTRAN в роботі [108]. Проведено порівняльний аналіз залежностей частот власних коливань від кута розкриття відносно великої і малої півосей. Досліджено характер перших форм вільних коливань.

На основі методу Рітца [109-113] розроблена методика розрахунку частот власних коливань тонких пружних оболонок обертання. Наведені результати розрахунку власних частот і форм вільних коливань оболонкових систем. Виконано порівняння отриманих даних з чисельними результатами для аналогічних задач. Досліджено також вплив підкріплюючих ребер і приєднаних твердих тіл на частоти та форми вільних коливань.

В роботі [114] наведені результати дослідження частот і форм власних коливань тонких пружних оболонок з конструктивними неоднорідностями на основі методу голографічної інтерферометрії.

До оглядових робіт, присвячених динаміці тонких оболонок відносяться роботи [34, 115-126]. В роботі [125] поданий огляд сучасних досліджень геометрично нелінійних вільних та вимушених коливань оболонок різної геометрії з традиційних та сучасних матеріалів. Виділено наступні аспекти дослідження: розвиток різних теорій оболонок, розгляд оболонок різної геометрії та методи дослідження поставлених задач динаміки, включаючи різні види навантаження, граничних умов, недосконалості форм. Відзначається, що найбільше досліджень присвячено вивченню динамічної поведінки циліндричних оболонок.

Лінійні та нелінійні коливання кругових циліндричних оболонок на основі теорії Сандерса-Койтера при різних граничних умовах розглянуті в роботах [127-129]. Переміщення представлені подвійними рядами по гармонічних функціях і поліномами Чебишева. Проведено порівняння результатів досліджень з експериментальними даними.

Значну увагу вчених привертає широкий клас задач про динамічну поведінку і стійкість коливань оболонкових конструкцій при імпульсному та ступінчастому навантаженні різної тривалості [33, 130-136].

В роботі [131] досліджувалась динамічна стійкість конструкції, до якої на початку прикладалось квазістатичне навантаження, яке менше за критичне статичне навантаження. Потім до оболонкової конструкції прикладалося ступінчасте в часі навантаження, що діяло на кінцевому інтервалі часу. В роботі викладені концепція динамічної стійкості та умови динамічної стійкості пружних систем, дана оцінка критичних станів розглянутих оболонок.

В роботах [29, 130, 132] розглянуті тонкі оболонкові конструкції в умовах квазістатичного навантаження, які виявляють втрату стійкості типу гранична точка або втрату стійкості, пов'язану з біфуркацією (розгалуженням форм рівноваги).

В роботі [137] розроблено методику дослідження перехідного процесу вимушених коливань циліндричної оболонки, підкріпленої поздовжніми і кільцевими ребрами, під дією навантаження, частота і амплітуда якого змінюються з часом, що враховує дискретність розміщення ребер. Досліджено вплив коефіцієнта демпфірування, частоти і амплітуди навантаження та тривалості перехідного процесу на прогини оболонки.

Досліджено вимушені коливання дискретно підкріплених багатошарових циліндричних, сферичних та конічних оболонок під дією нестационарних навантажень в роботі [138]. Динамічну поведінку підкріплених оболонок розглянуто в рамках теорії оболонок та стержнів згідно моделі С.П. Тимошенка. Представлено відповідні постановки та розроблено чисельний алгоритм розв'язання задач даного класу. Наведено чисельні приклади динамічної поведінки дискретно підкріплених багатошарових циліндричних, сферичних, конічних оболонок та проведено аналіз отриманих результатів.

В роботі [139] розглядаються коливання нелінійно пружних систем з урахуванням гістерезисного тертя. Нелінійна задача розв'язується за допомогою метода розкладу за малим параметром. Для визначення частот та форм власних коливань використовується варіаційно-сітковий підхід побудови функціоналів типу

Релея та мінімізація їх методом по-координатного спуску. Задача про вимушені коливання розв'язується шляхом розкладу за власними формами.

Два підходи до вивчення вільних і вимушених осесиметричних коливань циліндричної оболонки запропоновано в роботі [140]. Вони базуються на тривимірній теорії пружності та поділі вихідної циліндричної оболонки з концентричними колами перерізу на кілька коаксіальних циліндричних оболонок. Один підхід використовує лінійні поліноми для наближення функцій, визначених у плані та по товщині, інший підхід також використовує лінійні поліноми для наближення функцій, визначених у плані, але їх зміна за товщиною описується аналітичним розв'язком системи диференціальних рівнянь. Обидва підходи мають апроксимаційні та арифметичні помилки. Аналізується поведінка оболонки під час вільних та вимушених коливань у випадку, коли площа навантаження становить половину товщини оболонки.

В рамках просторової теорії жорсткості в роботі [141] розроблено два підходи до дослідження вільних і вимушених осесиметричних коливань анізотропних циліндричних оболонок з урахуванням розсіювання енергії. Вони засновані на поділі даної оболонки на ряд складових оболонок по товщині. У першому підході для наближення шуканих функцій за товщинами використовуються поліноми, у другому – їх розподіл по товщині на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь. У плані побудови шукані функції представлені у вигляді тригонометричних функцій. Необхідність розробки двох підходів пояснюється тим, що вони мають неточності наближення та арифметичних обчислень, що особливо помітно при розрахунку вимушених коливань на частотах, близьких до резонансних. Розрахунок двома методами служить доказом його достовірності. Проведено аналіз поведінки оболонки у вільних та вимушених коливаннях на частотах, близьких до резонансних.

В роботах [142-145] представлено чисельну методику побудови редукованої моделі стійкості параметричних коливань пологої оболонки від'ємної гаусової кривини типу гіперболічного параболоїда. Для формування редукованих матриць мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості застосовано

процедури програмного комплексу скінченно-елементного аналізу. Дослідження статичної і динамічної поведінки гіперболічного параболоїда в нелінійній постановці дозволило виявити відмінність його поведінки від поведінки пологих оболонок позитивної гаусової кривини. А саме, в результаті аналізу впливу постійної складової параметричного навантаження на частоти власних коливань виявлена втрата стійкості оболонки в деякому діапазоні навантаження з подальшим виходом в зону стійкості.

Також існує ряд робіт [146-154], які вирішують проблему стійкості коливань оболонок з геометричними недосконаlostями форми. Підтверджено істотний вплив недосконалостей на частоти і форми власних коливань, резонансні амплітуди динамічних реакцій оболонок, області динамічної нестійкості і т.д.

Особливий клас задач стійкості коливань оболонок пов'язаний з кінематично збуреною основою, на якій оболонка закріплюється в процесі її експлуатації. При проектуванні оболонкових конструкцій для сейсмічних районів як один з видів динамічного навантаження розглядаються вібрації основи. Також до кінематичних навантажень можна віднести збурення, які викликані транспортуванням та працюючим двигуном, якщо він розташований на основі конструкції. В результаті прискореного переміщення основи передається вібраційно кінематичні збурення оболонці. В конструкції виникають динамічні напруження, які при певних умовах можуть перевищити допустимі значення. Це відбувається в тих випадках, коли кінематично збурені коливання оболонок мають резонансний характер або втрачають стійкість. В результаті спостерігаються швидко наростаючі амплітуди вимушених коливань або відбувається зміна їх просторово-часової конфігурації.

Оскільки кінематично збурені сили інерції, що діють на оболонку, прямо пропорційні квадрату частоти збурення, то з її збільшенням несуча здатність оболонки швидко падає. Тому при кінематично збурених коливаннях оболонок актуальною є задача дослідження їх стійкості.

В роботах [155-158] динамічна поведінка оболонок досліджувалась для окремих видів кінематичного збурення. Автори вказаних робіт обмежувалися

розглядом гармонічних коливань циліндричних оболонок, викликаних зміщенням одного чи двох торців основ в їх площинах.

В роботі Т. Iric і Y .Kobayashi [158] визначені частоти власних коливань і усталена динамічна реакція кругової циліндричної оболонки при довільних граничних умовах на торці, що зміщується.

В роботі Г.С. Дік [159] досліджено напружено-деформований стан конічної оболонки при поступальному русі несучого тіла, з яким оболонка пов'язана через опори. Визначені переміщення, зусилля і моменти при різних законах руху несучого тіла. Вивчено вплив форми і тривалості імпульсної дії на динамічну реакцію оболонки.

Визначенню напружень в циліндричній оболонці, защемлений кінець якої здійснює гармонічне коливання в своїй площині, а інший – вільний, присвячена робота Т. Sakai [160]. В ній отримані наближені формули визначення напружень нижньої частини оболонки при даному виді навантаження.

В роботі І.Д. Павленко, А.Х. Шукурова [161, 162] наведено результати теоретичного дослідження впливу кінематичних збурень на поведінку і несучу спроможність циліндричних оболонок під дією осьового навантаження. Проведені порівняння з результатами поставленого експерименту вказують на можливість ефективного використання запропонованої методики для кількісної оцінки несучої здатності полімерних оболонок при наявності збурень.

Ряд робіт [163-169] присвячені дослідженню стійкості нелінійних коливань тонких оболонок при кінематичному збуренні. Результати розв'язання даного класу задач показали, що при збільшенні частоти коливань стійкість оболонок помітно зменшувалась, а із зменшенням частоти коливань до нуля критична амплітуда необмежено зростала.

З вищесказаного можна зробити висновок, що на теперішній час існує відносно невелика кількість робіт, в яких аналіз динамічної поведінки оболонок при кінематичному збуренні виконано на основі геометрично нелінійної теорії динаміки оболонок.

Огляд експериментальних досліджень динамічної поведінки тонких пружних оболонок та методи дослідження наведено в роботах [126, 129, 170-178]. Найбільш повно вивчені вільні коливання однорідних шарнірно закріплених оболонок, які виготовлені з ізотропних і ортотропних матеріалів.

В роботі [126] проведено огляд експериментальних робіт з визначення динаміки гладких і підкріплених циліндричних оболонок, які контактують з ґрунтовим середовищем, при різних нестационарних навантаженнях. Наведено результати досліджень тришарових оболонок обертання, рівняння руху яких отримано в рамках гіпотез геометрично нелінійної теорії Тимошенка. Чисельні результати для оболонок з кусково-неоднорідним і дискретним заповнювачем уможливили аналіз оцінки впливу геометричних і фізико-механічних параметрів конструкцій на їх динаміку та виявлення нових механічних ефектів. На основі класичної теорії оболонок і стержнів досліджено вплив дискретного розміщення ребер і коефіцієнтів пружної основи Вінклера і Пастернака на частоти і форми власних коливань прямокутних в плані пологих циліндричних і сферичних оболонок. Розроблено чисельні алгоритми при застосуванні інтегро-інтерполяційного методу і розв'язано відповідні нестационарні задачі.

В роботі [170] приведені результати експериментального дослідження області нестійкості гладкої циліндричної оболонки при імпульсному навантаженні зовнішнім тиском в комбінації зі зовнішнім або внутрішнім поперечним статичним тиском. Критерієм втрати стійкості оболонки служило досягнення амплітудами залишкових прогинів величини, що дорівнює товщині оболонки.

В роботі [178] розглянуто методіку голографічної інтерферометрії для визначення частот вільних коливань ізотропних кругових циліндричних оболонок постійної і змінної товщини та еквівалентної маси. Виявлено, що при малому числі півхвиль вздовж направляючої резонансні частоти оболонки змінної товщини перевищують аналогічні частоти циліндричної оболонки постійної товщини при збереженні маси.

Результати експериментальних робіт пов'язаних з вивченням вимушених коливань оболонок при кінематичному збуренні представлені в роботах [171, 173].

В роботі [171] розглянуті гладкі і ребристі оболонки, а також оболонки, що несуть локально приєднані тіла. Виявлено поріг збудження параметричних коливань, обумовлений розсіюванням енергії.

Виконаний аналіз результатів експериментальних досліджень дозволяє стверджувати, що для подальшого розвитку та уточнення методів розрахунку напружено-деформованого стану та стійкості оболонок при динамічному навантаженні необхідно продовжувати розвивати і удосконалювати експериментальні дослідження динаміки оболонок.

Аналіз огляду виконаних досліджень по теорії стійкості пружних систем при дії динамічних навантажень дозволяє зробити висновок про те, що різноманітність динамічних навантажень і постановок задач привело до вибору різних підходів їх розв'язків. Разом з тим, в таких дослідженнях більшою різноманітністю відрізняються критерії динамічної втрати стійкості. Різні дослідники використовують різні поняття стійкості систем, в залежності від практичних потреб дослідження.

Потрібно відмітити, що не дивлячись на значну кількість проведених досліджень, до теперішнього часу не створено універсальних методів дослідження нелінійних коливань тонких оболонок з аналізом їх стійкості. Це дозволяє зробити висновок про те, що питання розв'язку вказаного класу задач є актуальними і представляють інтерес як в прикладному так і теоретичному відношеннях.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ КРИВОЛІНІЙНИХ СІТОК В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

Сформулюємо задачу про побудову і дослідження стаціонарних розв'язків нелінійних рівнянь, що описують усталені режими вимушених коливань тонких оболонок. Коливання можуть бути ініційовані силовим періодичним за часом навантаженням. У такому випадку при відсутності початкових недосконалостей форми поверхні усталені коливання оболонок при малих значеннях параметра інтенсивності збурення реалізуються по симетричним відносно осі формам, які ми будемо називати симетричними, з частотою, рівній частоті збурення. Зі зростанням інтенсивності силового збурення при фіксованій частоті вимушених коливань їхні симетричні моди можуть трансформуватися в циклічно симетричні. Крім того, за певних умов усталені коливання оболонок, залишаючись симетричними, можуть різко збільшити амплітуду і змінити форму симетричних коливань.

Перераховані фактори характеризують втрату стійкості усталеного руху і їм відповідають особливі точки на кривих стаціонарних станів. Тому дослідження стійкості усталеного руху на основі пропонованого підходу зв'язано з відшукуванням на кривих стаціонарних станів, що цілком описують еволюцію коливань, особливих (граничних і біфуркаційних) точок. Такий підхід традиційно називається дослідженням стійкості коливань в амплітудній області при фіксованій частоті коливання оболонки. У випадку, коли дослідження стійкості коливань розглядається при варіюванні частоти, його можна віднести до частотної області дослідження.

2.1 Застосування геометрично нелінійних співвідношень теорії тонких оболонок до формування системи розрахункових рівнянь вимушених коливань

Формування системи розрахункових рівнянь вимушених коливань виконано із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень теорії тонких оболонок. Застосовуються співвідношення моментної теорії тонких оболонок, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява. Прийняті допущення, що прямолінійні волокна оболонки, які нормальні до недеформованої серединної поверхні, залишаються прямолінійними і нормальними після деформування. При цьому нормальними напруженнями на площадках, паралельних до серединної поверхні оболонки, можна знехтувати [11, 44]. Оболонку називають тонкою, якщо $\frac{h}{R_{\min}} \leq \frac{1}{20}$, де R_{\min} – найменший лінійний розмір серединної поверхні або найменший радіус її кривизни.

Для опису деформованої поверхні оболонки використано підхід Лагранжа. За систему відліку прийнята декартова система координат XYZ , а точки серединної поверхні оболонки описуються вектор-функцією

$$\vec{R} = \vec{R}(x^1, x^2), \quad (2.1)$$

де x^1, x^2 – криволінійні координати, пов'язані з недеформованою серединною поверхнею оболонки (рис. 2.1). Компоненти вектор-функції \vec{R} задаються безперервними однозначними функціями

$$X = X(x^1, x^2), \quad Y = Y(x^1, x^2), \quad Z = Z(x^1, x^2). \quad (2.2)$$

Форму серединної поверхні оболонки характеризують перша a_{ij} і друга b_{ij} квадратичні форми.

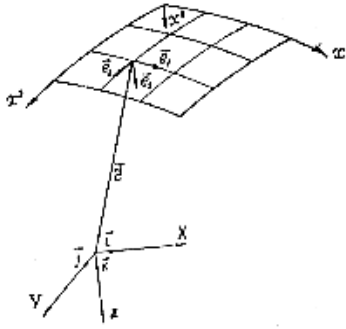


Рис. 2.1. Середина поверхня оболонки.

Перша квадратична форма визначає внутрішню метрику середньої поверхні оболонки. Вираз для квадрату елемента дуги середньої поверхні має вигляд

$$dl^2 = a_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.3)$$

Коефіцієнти метричного тензора та його фундаментальний визначник обчислюються за формулами

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (i, j = 1, 2), \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (2.4)$$

Вектори основного локального базису

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

спрямовані по дотичних до координатних ліній (x^1, x^2) . Вектор \vec{e}_3 визначається за формулою

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} \quad (2.6)$$

і збігається з ортом нормалі до середньої поверхні. Вектори $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ взаємного локального базису зв'язані з векторами основного локального базису співвідношеннями

$$\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{a}}, \quad \vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\sqrt{a}}, \quad \vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sqrt{a}}. \quad (2.7)$$

Опис деформування серединної поверхні оболонки здійснюється рівняннями, що визначають вектор переміщення її точок

$$\vec{u} = \vec{u}(x^1, x^2). \quad (2.8)$$

При цьому рівняння деформованої поверхні оболонки приймає вигляд

$$\vec{R}^* = \vec{R} + \vec{u}, \quad (2.9)$$

а вектори основного локального базису деформованої серединної поверхні визначаються виразом

$$\vec{e}_i^* = \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x^i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} \quad (i, j=1,2). \quad (2.10)$$

Розглянемо рух елемента оболонки, обмеженого лініями $x^1, x^1 + dx^1$; $x^2, x^2 + dx^2$ (рис. 2.2) у момент часу t . Відповідно до принципу Д'аламбера при складанні рівнянь руху будемо враховувати сили інерції. Позначимо через \vec{T}_i сили, що діють на одиницю довжини елемента. Вони є фізичними складовими для контраваріантного тензора з векторними компонентами

$$\vec{T}^i = T^{ij} \vec{e}_j + T^{i3} \vec{e}_3 \quad (i, j=1,2). \quad (2.11)$$

На сторону $x^1, x^1 + dx^1$ діє сила

$$(\sqrt{a} \vec{T}^1 + \frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^1}{\partial x^1} dx^1) dx^2. \quad (2.12)$$

На сторону $x^1 = const$ діє сила

$$-\vec{T}_1 \sqrt{a_{22}} dx^2 = -\frac{\vec{T}^1}{\sqrt{a^{11}}} \sqrt{a_{22}} dx^2 = -\sqrt{a} \vec{T}^1 dx^2. \quad (2.13)$$

Складаючи (2.12) і (2.13), одержимо сумарну силу в напрямку x^1

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^1}{\partial x^1} dx^1 dx^2. \quad (2.14)$$

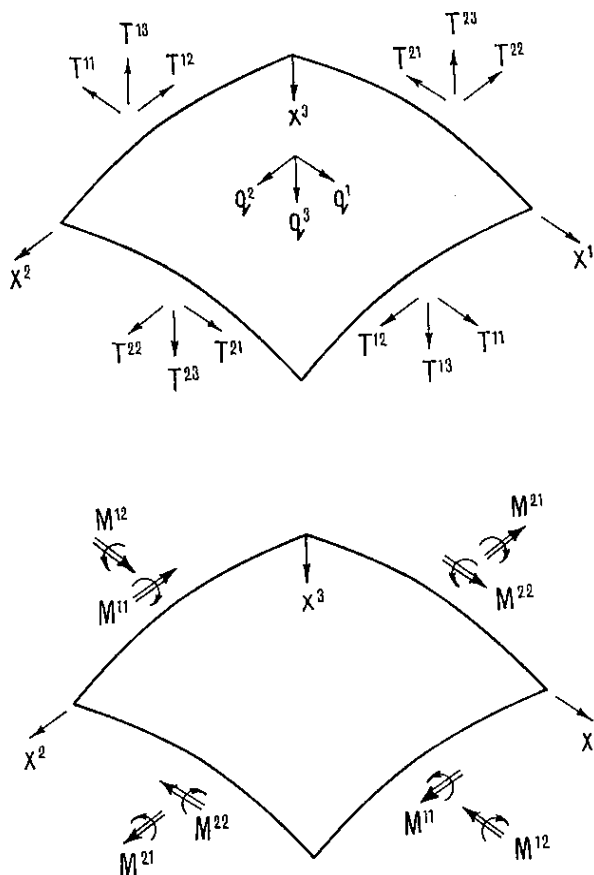


Рис. 2.2. Елемент оболонки з прикладеними силами і моментами.

Аналогічно, сумарна сила, що діє на елемент оболонки у напрямку x^2 , дорівнює

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^2}{\partial x^2} dx^1 dx^2. \quad (2.15)$$

Крім того, на елемент діють зовнішні сили, що залежать від часу

$$\vec{q}(t)\sqrt{a} dx^1 dx^2, \quad (2.16)$$

а також сили інерції

$$-\sqrt{ah}\gamma \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

де $\vec{q}(t)$ – приведенне до серединної поверхні зовнішнє навантаження, віднесене до одиниці площі, h – товщина оболонки, γ – щільність її матеріалу.

Складаючи вирази (2.14) - (2.17) і прирівнюючи нулю їх суму, одержимо умову рівності нулю головного вектора всіх сил, прикладених до елемента серединної поверхні оболонки

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^2}{\partial x^2} + \sqrt{a} \vec{q}(t) - \sqrt{ah}\gamma \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Головний момент, що дорівнює сумі моментів, прикладених до країв елемента, має вигляд

$$\left(\frac{\partial \sqrt{a} M^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a} M^2}{\partial x^2} \right) \sqrt{a} dx^1 dx^2. \quad (2.19)$$

Момент, що створюють сили, прикладені до сторони $x^1, x^1 + dx^1$, дорівнює

$$(\vec{e}_1 \times \vec{T}^1) \sqrt{a} dx^1 dx^2. \quad (2.20)$$

Аналогічно, сили, які прикладені до сторони $x^2, x^2 + dx^2$, створюють момент

$$(\vec{e}_2 \times \vec{T}^2) \sqrt{a} dx^1 dx^2. \quad (2.21)$$

Через те, що для більшості практичних задач вплив поверхневих моментів на стійкість коливань оболонок незначне, дію моменту зовнішніх сил не враховуємо. Отже, не враховується й інерція повороту поверхні.

Прирівнюючи нулю головний момент усіх сил і моментів, прикладених до виділеного елемента серединної поверхні, одержуємо

$$\frac{\partial \sqrt{a} M^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a} M^2}{\partial x^2} + (\vec{e}_1 \times \vec{T}^1) + (\vec{e}_2 \times \vec{T}^2) = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Перетворимо вираз $\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha}$ до вигляду

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \sqrt{a} \left(\frac{\partial \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\beta \vec{T}^\alpha \right) = \sqrt{a} \nabla_\alpha \vec{T}^\alpha \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.23)$$

де $\Gamma_{\alpha\beta}^\beta$ – символи Крістоффеля другого роду, ∇_α – символ коваріантної похідної.

Підставляючи вираз (2.23) у диференціальне рівняння руху оболонки у векторній формі (2.18), приведемо останнє до вигляду

$$\nabla_\alpha \vec{T}^\alpha + \vec{q}(t) - \gamma h \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.24)$$

Виконуючи аналогічні перетворення з рівнянням (2.22), одержимо

$$\nabla_\alpha \vec{M}^\alpha + (\vec{e}_\alpha \times \vec{T}^\alpha) = \mathbf{0} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.25)$$

Рівняння (2.24)-(2.25) складають рівняння рівноваги активних сил, сил пружності і сил інерції, прикладених до елемента оболонки. При побудові числової методики, вони за допомогою фізичних і геометричних співвідношень теорії тонких оболонок приводяться до рівнянь у переміщеннях.

Контраваріантні вектори внутрішніх зусиль розкладемо по векторам основного локального базису недеформованої серединної поверхні

$$\vec{T}^\alpha = T^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta + T^{\alpha 3} \vec{e}_3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (2.26)$$

де $T^{\alpha\beta}$ – двічі контраваріантні компоненти тензора внутрішніх зусиль, що характеризують мембранні зусилля; $T^{\alpha 3}$ – перерізуючі зусилля; $T^{12} = T^{21}$.

Контраваріантні вектори внутрішніх моментів розкладемо по векторам взаємного локального базису недеформованої поверхні

$$\vec{M}^{\alpha} = C_{\beta\delta} M^{\alpha\beta} \vec{e}^{\delta} \quad (\alpha, \beta, \delta = 1, 2), \quad (2.27)$$

де M^{11}, M^{22} – згинальні моменти; M^{12}, M^{21} – крутні моменти; $C_{\alpha\beta}$ – дискримінантний тензор поверхні; $C_{11} = C_{22} = 0$, $C_{12} = \sqrt{a}$, $C_{21} = -\sqrt{a}$.

Контраваріантні складові тензорів мембранних $T^{\alpha\beta}$ та згинаючих $M^{\alpha\beta}$ зусиль виражаються через коваріантні компоненти тензорів мембранних $\varepsilon_{\alpha\beta}$ та згинаючих $\mu_{\alpha\beta}$ деформацій залежностями, що випливають із закону стану теорії пружності за умови рівності нулю поперечних напружень

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_{\gamma\delta} \left[\nu a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + (1-\nu) a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \right]; \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \mu_{\gamma\delta} \left[\nu a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + (1-\nu) a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2),$$

де E – модуль пружності Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

На рис. 2.2 показані додатні напрямки компонентів внутрішніх зусиль, моментів і зовнішнього динамічного навантаження, що діють на елемент серединної поверхні оболонки в момент часу t .

Компоненти деформацій $\varepsilon_{\alpha\beta}$ і $\mu_{\alpha\beta}$ визначаються через вектор переміщень

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}^1 + u_2 \vec{e}^2 + u_3 \vec{n} \quad (2.29)$$

відповідно до формул

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + \nu_\alpha \nu_\beta \right), \\ \mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C^{\alpha\gamma}} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x^\beta} \vec{e}^\gamma + \frac{1}{C^{\beta\delta}} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x^\alpha} \vec{e}^\delta \right) \\ & \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2),\end{aligned}\tag{2.30}$$

де $\vec{\Omega} = C^{\alpha\beta} \mathcal{G}_\alpha \vec{e}_\beta$ – вектор кутів повороту; компоненти $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, виражаються

через вектор переміщень \vec{u} залежностями $\mathcal{G}_\alpha = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \vec{n}$ ($\alpha = 1, 2$); $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ –

деформації по напрямках базисних векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 відповідно; $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ – деформації зсуву; μ_{11}, μ_{22} – згинаючі деформації, що характеризують зміну кривини середньої поверхні по напрямках базисних векторів \vec{e}_1 і \vec{e}_2 ; μ_{12} характеризує крутіння поверхні; $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – кути повороту нормалі до середньої поверхні оболонки.

Співвідношення (2.26)-(2.30) після деяких перетворень з використанням формул Гауса-Вейнгартена

$$\begin{aligned}\vec{e}_{ij} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^s \vec{e}_s + b_{ij} \vec{n}; \\ \vec{e}_j^i &= \frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{sj}^i \vec{e}^s + b_j^i \vec{n}; \\ \vec{e}_{3j} &= \vec{n}_j = \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^j} = -b_j^s \vec{e}_s = b_{js} \vec{e}^s \\ & \quad (i, j, s = 1, 2)\end{aligned}\tag{2.31}$$

представимо в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}T^{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (a^{11} a^{11} \varepsilon_{11} + \nu a^{11} a^{22} \varepsilon_{22}); \\ T^{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (a^{22} a^{22} \varepsilon_{22} + \nu a^{11} a^{22} \varepsilon_{11}); \\ T^{12} &= T^{21} = \frac{Eh}{1-\nu^2} a^{11} a^{22} \varepsilon_{12}; \\ T^{13} &= \frac{\partial M^{11}}{\partial x^1} + 3\Gamma_{12}^1 M^{12} + \frac{\partial M^{12}}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^2 M^{12} + \Gamma_{22}^1 M^{22};\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$T^{23} = \frac{\partial M^{12}}{\partial x^1} + \Gamma_{12}^1 M^{22} + \frac{\partial M^{22}}{\partial x^2} + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{22}^2 M^{22}.$$

$$\begin{aligned} M^{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (a^{11}a^{11}\mu_{11} + \nu a^{11}a^{22}\mu_{22}), \\ M^{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (a^{22}a^{22}\mu_{22} + \nu a^{11}a^{22}\mu_{11}), \\ M^{12} &= M^{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} a^{11}a^{22}\mu_{12}; \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^2 u_2 - b_{11} u_3 + \frac{1}{2} (\mathcal{G}_1)^2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \Gamma_{22}^2 u_2 - b_{22} u_3 + \frac{1}{2} (\mathcal{G}_1)^2, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - u_1 (\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^{11}) + \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \right]; \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x^1} - \mathcal{G}_2 \Gamma_{11}^2, & \mu_{22} &= \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x^2} - \mathcal{G}_1 \Gamma_{12}^1, \\ \mu_{12} &= \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \mathcal{G}_1 \bar{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{a}} \mathcal{G}_2 e_1 \right) \bar{e}^2; \\ \mathcal{G}_1 &= -\frac{\partial u_3}{\partial x^1} - u_1 b_1^1, & \mathcal{G}_2 &= -\frac{\partial u_3}{\partial x^2} - u_2 b_2^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Співвідношення (2.32) і (2.33) цілком характеризують напружений стан оболонки, а співвідношення (2.34) і (2.35) визначають деформації і форми усталеного руху оболонки.

2.2. Дискретизація векторних рівнянь нелінійних коливань тонких оболонок методом криволінійних сіток

У зв'язку з високим порядком диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують нелінійні коливання оболонок, і складним виглядом розв'язувальної системи задача інтегрування наведених вище співвідношень не завжди може бути вирішена. Тому при розв'язуванні задач зазначеного класу роблять перехід від континуальної моделі до дискретизації векторних рівнянь коливань оболонок у системі криволінійних координат. В роботі при дослідженні стійкості вимушених коливань осесиметричних оболонок використовується модифікований кінцево-різницевий метод – метод криволінійних сіток [80, 87, 88]. Його переваги в порівнянні з традиційними різницевиими схемами полягає в швидкості збіжності рішення за рахунок повного виключення помилки апроксимації коваріантної похідної від функцій жорстких зміщень. Схема методу криволінійних сіток є узагальненим методом кінцевих різниць для випадку дискретизації векторних диференціальних співвідношень в системі криволінійних координат.

Нанесемо на серединну поверхню оболонки систему ортогональних криволінійних координат x^1, x^2 . Координату x^1 спрямуємо в коловому напрямку, координату x^2 – вздовж твірної.

Припускаючи, що оболонка знаходиться в режимі усталеного руху і з огляду на можливість виникнення циклічно симетричних у напрямку x^1 форм коливань, редукцію рівнянь руху в напрямку окружної координати x^1 і по координаті часу t виконано на основі проекційного методу.

Для дискретизації рівняння руху (2.18) в напрямку твірної використаємо метод криволінійних сіток. Дискретний аналог рівняння руху (2.18) отримано у вигляді системи трьох скалярних різницевих рівнянь руху оболонок обертання з довільною формою твірної для j -го різницевого вузла (2.36), при цьому враховані формули Шварца-Крістоффеля

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^1} = \Gamma_{i1}^k \vec{e}_k, \quad \frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^1} = -\Gamma_{k1}^i \vec{e}^k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

задано розмір ділянки Δx^2 рівним одиниці, третій доданок рівняння (2.18) подано у вигляді половини суми векторів навантаження \vec{q} , що діють на два сусідні різницеві вузли.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}})\left(\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \Gamma_{12}^1 T^{12} - b_1^1 T^{13}\right)_j + \\ & + (\sqrt{a} \vec{T}^{21})_{(j+0,5)} a_{1(j+0,5)}^{1j} - (\sqrt{a} T^{21})_{(j-0,5)} a_{1(j-0,5)}^{1j} + \\ & + \frac{1}{2}[(\sqrt{a} q^1(t))_{(j+0,5)} a_{1(j+0,5)}^{1j} + (\sqrt{a} q^1(t))_{(j-0,5)} a_{1(j-0,5)}^{1j}] - \\ & - \frac{1}{2} \gamma h [(\sqrt{a} \ddot{u}_1)_{(j+0,5)} a_{1(j+0,5)}^{1j} + (\sqrt{a} \ddot{u}_1)_{(j-0,5)} a_{1(j-0,5)}^{1j}] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}})\left(\frac{\partial T^{12}}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^2 T^{11}\right)_j + \\ & + (\sqrt{a} \vec{T}^{22})_{(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{2j} - (\sqrt{a} T^{22})_{(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{2j} + \\ & + (\sqrt{a} T^{23})_{(j+0,5)} a_{3(j+0,5)}^{2j} - (\sqrt{a} T^{23})_{(j-0,5)} a_{3(j-0,5)}^{2j} + \\ & + \frac{1}{2}[\sqrt{a_{(j+0,5)}}(q^2(t)_{(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{2j} + q^3(t)_{(j+0,5)} a_{3(j+0,5)}^{2j}) + \\ & + \sqrt{a_{(j-0,5)}}(q^2(t)_{(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{2j} + q^3(t)_{(j-0,5)} a_{3(j-0,5)}^{2j})] - \\ & \frac{1}{2} \gamma h [\sqrt{a_{(j+0,5)}}(\ddot{u}_2)_{(j+0,5)} a_{(j+0,5)}^{22j} + \ddot{u}_3)_{(j+0,5)} a_{(j+0,5)}^{32j}) + \\ & + \sqrt{a_{(j-0,5)}}(\ddot{u}_2)_{(j-0,5)} a_{(j-0,5)}^{22j} + \ddot{u}_3)_{(j-0,5)} a_{(j-0,5)}^{32j})] = 0; \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}}) \left(\frac{\partial T^{13}}{\partial x^1} + b_{11} T^{11} \right)_j + \\
& + (\sqrt{a} T^{22})_{(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{3j} - (\sqrt{a} T^{22})_{(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{3j} + \\
& + (\sqrt{a} T^{23})_{(j+0,5)} a_{3(j+0,5)}^{3j} - (\sqrt{a} T^{23})_{(j-0,5)} a_{3(j-0,5)}^{3j} + \\
& + \frac{1}{2} [\sqrt{a_{(j+0,5)}} (q^2(t)_{(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{3j} + q^3(t)_{(j+0,5)} a_{3(j+0,5)}^{3j}) + \\
& + \sqrt{a_{(j-0,5)}} (q^2(t)_{(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{3j} + q^3(t)_{(j-0,5)} a_{3(j-0,5)}^{3j})] - \\
& \frac{1}{2} \gamma h [\sqrt{a_{(j+0,5)}} (\ddot{u}_{2(j+0,5)} a_{(j+0,5)}^{23j} + \ddot{u}_{3(j+0,5)} a_{(j+0,5)}^{33j}) + \\
& + \sqrt{a_{(j-0,5)}} (\ddot{u}_{2(j-0,5)} a_{(j-0,5)}^{23j} + \ddot{u}_{3(j-0,5)} a_{(j-0,5)}^{33j})] = 0.
\end{aligned}$$

Тут $a_{k(j+0,5)}^{ij} = (\vec{e}^i)_j \cdot (\vec{e}_k)_{(j+0,5)}$ – коефіцієнти перетворення векторних компонент при переході з локального базису в точці $(j+0,5)$ у локальний базис точки (j) , для визначення яких необхідні перші похідні від рівнянь поверхні.

Кінцево-різницеві аналоги контраваріантних компонентів тензорів зусиль $T^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha 3}$ і згинаючих крутних моментів $M^{\alpha\beta}$, які виражені через коваріантні компоненти тензорів мембранних $\varepsilon_{\alpha\beta}$ і згинаючих $\mu_{\alpha\beta}$ деформацій, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
T_j^{11} &= \frac{Eh_j}{1-\nu^2} [a^{11} a^{11} \varepsilon_{11}]_j + \frac{1}{2} a_{11j} \nu (a_{(j+0,5)}^{22} \varepsilon_{22(j+0,5)} + \\
& + (a_{(j-0,5)}^{22} \varepsilon_{22(j-0,5)})); \\
T_{(j+0,5)}^{22} &= \frac{Eh_{(j+0,5)}}{1-\nu^2} [(a^{22} a^{22} \varepsilon_{22})_{(j+0,5)} + \\
& + \frac{1}{2} a_{22(j+0,5)} \nu (a_{(j+1)}^{11} \varepsilon_{11(j+1)} + a_j^{11} \varepsilon_{11j})];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(j+0,5)}^{12} &= T_{(j+0,5)}^{21} = \frac{Eh_{(j+0,5)}}{1-\nu^2} (1-\nu)(a^{11}a^{22}\varepsilon_{12})_{(j+0,5)}; \\
T_{(j+0,5)}^{13} &= \frac{1}{2} [(a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)})^2 \left(\frac{\partial M^{11}}{\partial x^1}\right)_{(j+1)} + (a_1^{1(j+0,5)})^2 \left(\frac{\partial M^{11}}{\partial x^1}\right)_{(j)} + \\
&+ \Gamma_{21(j+0,5)}^1 (a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)} a_{2(j+1)}^{2(j+0,5)} M_{(j+1)}^{12} + a_{1(j)}^{1(j+0,5)} a_{2(j)}^{2(j+0,5)} M_{(j)}^{12})] + \\
&+ \frac{1}{a_{(j+0,5)}} [(aM^{12})_{(j+1)} a_{2(j+1)}^{2(j+0,5)} - (aM^{12})_{(j)} a_{2(j+0,5)}^{2j}]; \\
T_{(j+0,5)}^{23} &= \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{11(j+0,5)}^2 \left[(a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)})^2 M_{(j+1)}^{11} + (a_{1j}^{1(j+0,5)})^2 M_j^{11} \right] + \right. \\
&+ a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)} a_{2(j+1)}^{2(j+0,5)} \left. \left(\frac{\partial M^{12}}{\partial x^1} \right)_{(j+1)} + a_{1(j)}^{1(j+0,5)} a_{2(j)}^{2(j+0,5)} \left(\frac{\partial M^{12}}{\partial x^1} \right)_{(j)} \right\} + \quad (2.37) \\
&+ \frac{1}{a_{(j+0,5)}} \left[(aM^{22})_{(j+1)} a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} - (aM^{22})_{(j)} a_{1(j+0,5)}^{1j} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_j^{11} &= \frac{Eh_j^3}{12(1-\nu^2)} (a^{11}a^{11}\mu_{11} + \nu a^{11}a^{22}\mu_{22})_j; \\
M_j^{22} &= \frac{Eh_j^3}{12(1-\nu^2)} (a^{22}a^{22}\mu_{22} + \nu a^{11}a^{22}\mu_{11})_j; \\
M_j^{12} &= M_j^{21} = \frac{Eh_j^3}{12(1+\nu)} (a^{11}a^{22}\mu_{12})_j,
\end{aligned}$$

де $h_j, h_{(j+0,5)}$ – товщина оболонки відповідно у вузлових (j) і між вузлових $(j+0,5)$ точках різницевої сітки.

Дискретні компоненти тангенціальних і згинаючих деформацій середньої поверхні, які виражені через вектор переміщень $\vec{u} = \vec{u}(x^1, x^2, t)$, мають вигляд

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11(j)} &= \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^1} e_1 \right)_j + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_j^2 = \left[\left(\frac{\partial (u_s e^s)}{\partial x^1} \right) e_1 \right]_j + \\
&+ \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_j^2 = \left(\frac{\partial u_s}{\partial x^1} e^s e_1 + u_s \frac{\partial e^s}{\partial x^1} e_1 \right)_j + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_j^2 = \\
&= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^2 u_2 - b_{11} u_3 \right)_j + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_j^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22(j+0,5)} &= \left[\left(\frac{\partial (u_s e^s)}{\partial x^2} \right) e_2 \right]_{(j+0,5)} + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_{(j+0,5)}^2 = \\
&= \left[(u_s e^s)_{(j+1)} - (u_s e^s)_{(j)} \right] e_{2(j+0,5)} + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_{(j+0,5)}^2 = \\
&= u_{2(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{2(j+1)} - u_{2(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} + u_{3(j+1)} a_{2(j+0,5)}^{3(j+1)} - \\
&- u_{3(j)} a_{2(j+0,5)}^{3(j)} + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1)_{(j+0,5)}^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12(j+0,5)} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} a_{2(j+0,5)}^{2(j+1)} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^1} e_2 \right)_{(j+1)} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^1} e_2 \right)_{(j)} \right] + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^2} e_2 \right)_{(j+0,5)} \right\} + \\
&+ \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2)_{(j+0,5)} = \frac{1}{4} \left[a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} a_{2(j+0,5)}^{2(j+1)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \Gamma_{12}^1 u_1 \right)_{(j+1)} + \right. \\
&+ \left. a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - (\Gamma_{12}^1 u_1)_{(j)} \right] + \frac{1}{2} (u_{1(j+1)} a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} - \\
&- u_{1j} a_{1(j+0,5)}^{1(j)}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2)_{(j+0,5)};
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\mu_{11(j)} = \left(\frac{\partial \mathfrak{g}_1}{\partial x^1} \right)_j - \frac{1}{2} (\Gamma_{11(j+0,5)}^2 \mathfrak{g}_{2(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{2j} + \Gamma_{11(j-0,5)}^2 \mathfrak{g}_{2(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{2j});$$

$$\mu_{22(j)} = \left(c_{21} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x^2} e^1 \right)_j = -\sqrt{a_{22(j)}} \left[\left(\frac{\mathfrak{g}_2}{\sqrt{a_{22}}} \right)_{(j+0,5)} - \frac{\mathfrak{g}_2}{\sqrt{a_{22}}} \right]_{(j-0,5)};$$

$$\begin{aligned} \mu_{12(j)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^{21}} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x^1} \vec{e}^1 + \frac{1}{c^{12}} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x^2} \vec{e}^2 \right)_j = -\frac{1}{2} \left\{ (\Gamma_{12}^1 \mathfrak{g}_1)_j - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{g}_2}{\partial x^1} \right)_{(j+0,5)} a_{1(j+0,5)}^{1j} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}_2}{\partial x^1} \right)_{(j-0,5)} a_{1(j-0,5)}^{1j} \right] \right\} + \frac{1}{4} \sqrt{a_j} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{(j+1)}}} \mathfrak{g}_{1(j+1)} a_{2(j+1)}^{2j} - \frac{1}{\sqrt{a_{(j-1)}}} \mathfrak{g}_{1(j-1)} a_{2(j-1)}^{2j} \right). \end{aligned}$$

Кути повороту нормалі серединної поверхні оболонки дискретно виражаються через функції переміщень

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{1(j)} = & - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^1} \vec{e}_3 \right)_j = - \left[\frac{\partial (u_s \vec{e}^s)}{\partial x^1} \right]_j \vec{e}_{3(j)} = \\ = & - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \vec{e}^1 + u_1 \frac{\partial \vec{e}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \vec{e}^2 + u_2 \frac{\partial \vec{e}^2}{\partial x^1} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \vec{e}^3 + u_3 \frac{\partial \vec{e}^3}{\partial x^1} \right)_j = - \left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right)_j - b_{1(j)}^1 u_{1(j)}, \\ \mathfrak{g}_{2(j+0,5)} = & - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^2} \right)_{(j+0,5)} \vec{e}_{3(j+0,5)} = \\ = & - \left[\frac{\partial (u_s \vec{e}^s)}{\partial x^2} \right]_{(j+0,5)} \vec{e}_{3(j+0,5)} = - (u_{2(j+1)} a_{3(j+0,5)}^{3j} - \\ & - u_{2(j)} a_{3(j+0,5)}^{2j} - u_{3(j+1)} a_{3(j+0,5)}^{3(j+1)} - u_{3(j)} a_{3(j+0,5)}^{3j}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Шість невідомих зусиль, що входять у систему трьох рівнянь руху оболонки (2.36) представимо через згинаючі і мембранні деформації (2.38), (2.39), в результаті невідомими в системі рівнянь (2.36) будуть величини, що залежать від часу t і компонент вектору переміщень u_1, u_2, u_3 .

2.3. Редукція диференціальних рівнянь теорії нелінійних коливань оболонок на основі проекційного методу

Отримані за допомогою метода криволінійних сіток звичайних диференціальних рівнянь руху оболонки (2.36) редукуємо до системи алгебраїчних рівнянь, застосовуючи при цьому проекційний метод з використанням розкладання в ряд Фур'є.

Застосовуючи до операторного рівняння:

$$A\vec{u} = 0, \quad (2.40)$$

де A – матриця-оператор, $\vec{u}(x,t)$ – шукана вектор-функція, проекційний метод полягає в тому, що наближений розв'язок шукається у вигляді

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k \vec{u}_{nm} \xi_{nm}(x,t). \quad (2.41)$$

Вектори \vec{u}_{nm} визначаються з умов ортогональності $A\vec{u}$ до елементів $\psi_{1m}(x,t), \psi_{2m}(x,t), \dots, \psi_{\infty m}(x,t)$, тобто з системи рівнянь

$$(A(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k \vec{u}_{nm} \xi_{nm}), \psi_{lr}) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, \infty; r=1, 2, \dots, k). \quad (2.42)$$

Тут $\xi_{nm}(x,t)$ і $\psi_{nm}(x,t)$ – повні системи лінійно незалежних координатних функцій; $(\ , \)$ – операція скалярного множення; x – узагальнена просторова координата; t – час.

Представимо симетричні відносно x^1 складові напружено-деформованого стану

$$C(x^1, t) : \{u_2, u_3, q^2, q^3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \mu_{11}, \mu_{12}, \varrho_2, T^{11}, T^{22}, M^{11}, M^{22}, T^{23}\}$$

у вигляді розкладання в ряд по косинусам в коловому напрямку x^1 і в ряд по косинусам по часу t , а кососиметричні

$$S(x^1, t) : \{u_1, q^1, \varepsilon_{12}, \mu_{12}, T^{12}, T^{13}, M^{12}, \varrho_1\}$$

– по синусам в коловому напрямку x^1 і по косинусам по часу t , і виконавши процедуру проектування за допомогою інтегрування у вигляді

$$C_m^n = \frac{2}{\pi T} \int_0^{2\pi} \int_0^T C \cos nx^1 \cdot \cos m\omega t dx^1 dt ; \quad (2.43)$$

$$S_m^n = \frac{2}{\pi T} \int_0^{2\pi} \int_0^T S \sin nx^1 \cdot \cos m\omega t dx^1 dt ,$$

отримаємо систему співвідношень, яка описує при $n = 0$ напружений стан осесиметричної форми усталеного руху і при $n > 0$ – неосесиметричні форми усталеного коливання оболонок:

$$\begin{aligned} C(x^1, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_0^n \cos nx^1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^k C_m^n \cos nx^1 \cos m\omega t = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} C_0^n + C_1^n \cos \omega t + C_2^n \cos 2\omega t + \dots + C_k^n \cos k\omega t \right) \cos nx^1 ; \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} S(x^1, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} S_0^n \sin nx^1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^k S_m^n \sin nx^1 \cos m\omega t = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} S_0^n + S_1^n \cos \omega t + S_2^n \cos 2\omega t + \dots + S_k^n \cos k\omega t \right) \sin nx^1 \end{aligned}$$

В рамках викладеної методики числових досліджень стійкості усталених нелінійних коливань оболонок обмежимося випадком, коли $k = 2$.

Використовуючи умову періодичності в коловому напрямку x^1 векторів \vec{u} і гармонічного навантаження \vec{q} , подаємо їх компоненти у вигляді:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_{10}^n \sin nx^1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 u_{1m}^n \sin nx^1 \cos m\omega t; \\ u_2 &= \frac{1}{4} u_{20}^0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 u_{2m}^0 \cos m\omega t + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 u_{2m}^n \cos nx^1 \cos m\omega t; \\ u_3 &= \frac{1}{4} u_{30}^0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 u_{3m}^0 \cos m\omega t + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 u_{3m}^n \cos nx^1 \cos m\omega t. \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
q^1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n q^1 \sin nx^1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 \sum_{m}^n q^1 \sin nx^1 \cos m\omega t; \\
q^2 &= \frac{1}{4} q^2_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{m}^0 q^2 \cos m\omega t + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 \sum_{m}^n q^2 \cos nx^1 \cos m\omega t; \\
q^3 &= \frac{1}{4} q^3_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{m}^0 q^3 \cos m\omega t + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 \sum_{m}^n q^3 \cos nx^1 \cos m\omega t.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Відмітимо, що верхні n і нижні m індекси при функціях $C(x^1, t)$ і $S(x^1, t)$ прийняті для позначення:

а) верхні n – номер просторової гармоніки по x^1 циклічно симетричної форми коливань оболонки ($n=1, 2, \dots, N$);

б) нижні m – номер часової гармоніки по t складової функції, що відповідає $\frac{T}{m}$ – періодичним коливанням оболонки, де $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – період гармонічного навантаження ($m=0, 1, 2$).

Підставляємо (2.45) в (2.38) і (2.39) і помножимо вирази $\varepsilon_{12}, \mu_{12}, \mathcal{G}_1$ на $\frac{2}{\pi t} \sin nx^1 \cdot \cos m\omega t$, а решту на $\frac{2}{\pi t} \cos nx^1 \cdot \cos m\omega t$. Далі проінтегруймо їх по змінній x^1 в межах від 0 до 2π і по змінній часу t в межах від 0 до T . Застосуємо цю операцію також до диференціальних рівнянь (2.36).

Запишемо отриману таким чином систему нелінійних алгебраїчних рівнянь усталених коливань для точки j і вирази для величин, які до неї входять:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}}}{2} \left[-n \frac{T^{n11}}{m(j)} + \frac{1}{2} \Gamma_{12(j)}^1 (a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} \frac{T^{n12}}{m(j+0,5)} + a_{1(j-0,5)}^{1(j)} a_{2(j-0,5)}^{2(j)} \frac{T^{n12}}{m(j-0,5)}) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} \underbrace{b_{1(j)}^1 T^{n13}}_m + a_{1(j-0,5)}^{1(j)} a_{2(j-0,5)}^{2(j)} \underbrace{b_{1(j)}^1 T^{n13}}_m) \right] + \\
& + (\sqrt{a} \frac{T^{n21}}{m})_{(j+0,5)} a_{1(j+0,5)}^{1(j)} - (\sqrt{a} \frac{T^{n21}}{m})_{(j-0,5)} a_{1(j-0,5)}^{1(j)} + \frac{1}{2} \left[(\sqrt{a} \frac{q^1}{m})_{(j+0,5)} a_{1(j+0,5)}^{1(j)} - (\sqrt{a} \frac{q^1}{m})_{(j-0,5)} a_{1(j-0,5)}^{1(j)} \right] + \\
& + \gamma h m^2 \omega^2 \left[(\sqrt{a} \frac{u}{m_1})_{(j)} a_{(j)}^{11} \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}}}{2} \left[\frac{1}{2} n (a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} T_{m(j+0,5)}^{n12} + a_{1(j-0,5)}^{1(j)} a_{2(j-0,5)}^{2(j)} T_{m(j-0,5)}^{n12}) + (\Gamma_{11}^2 T_m^{n11})_{(j)} \right] + \\
& + (\sqrt{a} T_m^{n22})_{(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} - (\sqrt{a} T_m^{n22})_{(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{2(j)} + (\sqrt{a} T_m^{n23})_{(j+0,5)} a_{3(j+0,5)}^{2(j)} - (\sqrt{a} T_m^{n23})_{(j-0,5)} a_{3(j-0,5)}^{2(j)} + \\
& + \frac{1}{2} \left[\sqrt{a_{(j+0,5)}} (q_{m(j+0,5)}^{n2} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} + q_{m(j+0,5)}^{n3} a_{3(j+0,5)}^{2(j)}) + \sqrt{a_{(j-0,5)}} (q_{m(j-0,5)}^{n2} a_{2(j-0,5)}^{2(j)} + q_{m(j-0,5)}^{n3} a_{3(j-0,5)}^{2(j)}) \right] + \\
& + \gamma h m^2 \omega^2 (\sqrt{a} u_{m2}^n)_{(j)} a_{(j)}^{22} = 0, \\
& \frac{\sqrt{a_{(j+0,5)}} + \sqrt{a_{(j-0,5)}}}{2} \left[(T_m^{n11} b_{11})_{(j)} + \frac{1}{2} n (a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{3(j+0,5)}^{3(j)} T_{m(j+0,5)}^{n13} + a_{1(j-0,5)}^{1(j)} a_{3(j-0,5)}^{3(j)} T_{m(j-0,5)}^{n13}) \right] + \\
& + (\sqrt{a} T_m^{n22})_{(j+0,5)} a_{2(j+0,5)}^{3(j)} - (\sqrt{a} T_m^{n22})_{(j-0,5)} a_{2(j-0,5)}^{3(j)} + (\sqrt{a} T_m^{n23})_{(j+0,5)} a_{3(j+0,5)}^{3(j)} - (\sqrt{a} T_m^{n23})_{(j-0,5)} a_{3(j-0,5)}^{3(j)} + \\
& + \frac{1}{2} \left[(\sqrt{a_{(j+0,5)}} (q_{m(j+0,5)}^{n2} a_{2(j+0,5)}^{3(j)} + q_{m(j+0,5)}^{n3} a_{3(j+0,5)}^{3(j)}) + \sqrt{a_{(j-0,5)}} (q_{m(j-0,5)}^{n2} a_{2(j-0,5)}^{3(j)} + q_{m(j-0,5)}^{n3} a_{3(j-0,5)}^{3(j)}) \right] + \quad (2.47) \\
& + \gamma h m^2 \omega^2 \cdot (\sqrt{a} u_{m3}^n)_{(j)} = 0, \\
& (m=0,1,2).
\end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо вирази для зусиль, моментів (2.37) і деформацій (2.38) і (2.39) у вигляді

$$\begin{aligned}
T_{m(j)}^{n11} &= \frac{Eh_{(j)}}{1-\nu^2} \left\{ (a^{11} a^{11} \varepsilon_{m11}^n)_{(j)} + \frac{a_{11(j)}}{2} \nu \left[(a^{22} \varepsilon_{m22}^n)_{(j+0,5)} + (a^{22} \varepsilon_{m22}^n)_{(j-0,5)} \right] \right\}, \\
T_{m(j+0,5)}^{n22} &= \frac{Eh_{(j+0,5)}}{1-\nu^2} \left\{ (a^{22} a^{22} \varepsilon_{m22}^n)_{(j+0,5)} + \frac{a_{22(j+0,5)}}{2} \nu \left[(a^{11} \varepsilon_{m11}^n)_{(j+1)} + (a^{11} \varepsilon_{m11}^n)_{(j)} \right] \right\}; \\
T_{m(j+0,5)}^{n12} &= T_{m(j+0,5)}^{n21} = \frac{Eh_{(j+0,5)}}{1-\nu^2} (1-\nu) (a^{11} a^{22} \varepsilon_m^{n12})_{(j+0,5)}. \\
T_{m(j+0,5)}^{n13} &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & -n(a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)})^2 M_{m(j+1)}^{n11} - n(a_{1(j)}^{1(j+0,5)})^2 M_{m(j)}^{n11} + \\ & \Gamma_{21(j+0,5)}^1 (a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)} a_{2(j+1)}^{2(j+0,5)} M_{m(j+1)}^{n12} + a_{1(j)}^{1(j+0,5)} a_{2(j)}^{2(j+0,5)} M_{m(j)}^{n12}) \end{aligned} \right] + \\
& + \frac{1}{a(j+0,5)} \left[(a M_m^{n12})_{(j+1)} a_{2(j+0,5)}^{2(j+1)} - (a M_m^{n12})_{(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} \right],
\end{aligned}$$

$$T_{m(j+0,5)}^{n23} = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{11(j+0,5)}^2 \left[(a_{1(j+1)}^{1(j+0,5)})^2 M_{m(j+1)}^{n11} + (a_{1(j)}^{1(j+0,5)})^2 M_{m(j)}^{n11} \right] + \right. \\ \left. + na_{1(j)}^{1(j+0,5)} a_{2(j)}^{2(j+0,5)} M_{m(j+1)}^{n12} + na_{1(j)}^{1(j+0,5)} a_{2(j)}^{2(j+0,5)} M_{m(j+1)}^{n12} \right\} + \quad (2.48)$$

$$+ \frac{1}{a(j+0,5)} \left[(a M_m^{n22})_{(j+1)} a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} - (a M_m^{n22})_{(j)} a_{1(j+0,5)}^{1(j)} \right],$$

$$M_{m(j)}^{n11} = \frac{Eh_{(j)}^3}{12(1-\nu^2)} (a^{11} a^{11} \mu_{11}^n + \nu a^{11} a^{22} \mu_{22}^n)_{(j)},$$

$$M_{m(j)}^{n22} = \frac{Eh_{(j)}^3}{12(1-\nu^2)} (a^{22} a^{22} \mu_{22}^n + \nu a^{11} a^{22} \mu_{11}^n)_{(j)},$$

$$M_{m(j)}^{n12} = M_{m(j)}^{n21} = \frac{Eh_{(j)}^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) (a^{11} a^{22} \mu_{12}^n)_{(j)}$$

– зусилля і моменти ($m = 0, 1, 2$);

$$\varepsilon_{m11(j)}^n = (n u_{m1}^n - \Gamma_{11}^2 u_{m2}^n - b_{m11} u_{m3}^n)_{(j)},$$

$$\varepsilon_{m22(j+0,5)}^n = u_{m2(j+1)}^n a_{2(j+0,5)}^{2(j+1)} - u_{m2(j)}^n a_{2(j+0,5)}^{2(j)} + u_{m3}^n a_{2(j+0,5)}^{3(j+1)} - u_{m3(j)}^n a_{3(j+0,5)}^{3(j)} + \frac{1}{2} (\mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_2)_{(j+0,5)}^n,$$

$$\varepsilon_{m(j+0,5)}^{n12} = \frac{1}{4} \left[a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} a_{2(j+0,5)}^{2(j+1)} (-n u_1^n - \Gamma_{12}^1 u_1^n)_{(j+1)} + a_{1(j+0,5)}^{1(j)} a_{2(j+0,5)}^{2(j)} (-n u_2^n - \Gamma_{12}^1 u_1^n)_{(j)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} (u_1^n a_{1(j+0,5)}^{1(j+1)} - u_1^n a_{1(j+0,5)}^{1(j)}) + \frac{1}{2} (\mathcal{G}_1 \cdot \mathcal{G}_2)_{(j+0,5)}^n,$$

$$\mu_{m(j)}^{n11} = n v_1^n - \frac{1}{2} \left[(\Gamma_{11}^2 \mathcal{G}_2)_{(j+0,5)}^n a_{2(j+0,5)}^{2(j)} + (\Gamma_{11}^2 \mathcal{G}_2)_{(j-0,5)}^n a_{2(j-0,5)}^{2(j)} \right],$$

$$\mu_{m(j)}^{n22} = -\sqrt{a_{22(j)}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \mathcal{G}_2 \right)_{(j+0,5)}^n - \left(\frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \mathcal{G}_2 \right)_{(j-0,5)}^n \right], \quad (2.49)$$

$$\mu_{m(j)}^{n12} = -\frac{1}{2} \left[(\Gamma_{12}^1 \mathcal{G}_1)_{(j)}^n + \frac{1}{2} (n \mathcal{G}_2 a_{1(j+0,5)}^{1(j)} + n \mathcal{G}_2 a_{1(j-0,5)}^{1(j)}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} \sqrt{a_{(j)}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \mathcal{G}_1 \right)_{(j+1)}^n a_{2(j+1)}^{2(j)} - \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \mathcal{G}_1 \right)_{(j-1)}^n a_{2(j-1)}^{2(j)} \right]$$

– тангенціальні і згинальні деформації ($m = 0, 1, 2$);

$$\mathcal{G}_1^m = (nu_3 - b_1^1 u_1)_{(j)},$$

$$\mathcal{G}_2^m = -(u_2 a_{3(j+0,5)}^{2(j+1)} - u_2 a_{3(j+0,5)}^{2(j)} + u_3 a_{3(j+0,5)}^{3(j+1)} - u_3 a_{3(j+0,5)}^{3(j)}) \quad (2.50)$$

– кути повороту нормалі серединної поверхні ($m = 0, 1, 2$).

Надаючи індексу m значення 0, 1, 2 послідовно в рівняннях системи (2.47), отримаємо систему дев'яти нелінійних алгебраїчних рівнянь усталених коливань точки j твірної.

Аналогічно для виразів (2.48)-(2.50) отримаємо сімейство трьох складових по часу компонент векторів зусиль, моментів і деформацій в точках j і $j+0,5$:

(C_0^m, C_1^m, C_2^m) і (S_0^m, S_1^m, S_2^m) , де C_0^m, S_0^m – постійні складові компонент C, S ; C_1^m, S_1^m – амплітуди

компонент C, S , які відповідають гармонічним коливанням оболонок з періодом

$T = \frac{2\pi}{\omega}$; C_2^m, S_2^m – амплітуди компонент C, S , які відповідають субгармонічним

коливанням оболонки, з періодом $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.

Амплітуда m -ої складової по t нелінійних складових C, S , які входять в співвідношення (1.26)-(1.29), виражена у вигляді

$$C \cdot S^m \quad (n = const). \quad (2.51)$$

Враховуючи, що вимушені коливання оболонки описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \vec{F}(\vec{u}) + \lambda \vec{q} = 0, \quad (2.52)$$

де $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор переміщень; $\vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ – нелінійна вектор-функція, компоненти якої є поліномами відносно u_1, u_2, u_3 і їх похідних по x^1 та x^2 ;

$\vec{q} = \{q^1, q^2, q^3\}$ – вектор T - періодичної по часу t і 2π - періодичної по x^1 зовнішнього навантаження; λ – параметр інтенсивності навантаження.

а розв'язок системи (2.52) шукається у вигляді (2.45)

$$\vec{u}(x^1, x^2, t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-2}^2 \vec{u}_{nm}(x^2) e^{i(nx^1 + m\omega t)}, \quad (N \geq N_p) \quad (2.53),$$

добуток будь яких двох функцій часу $(C \cdot S)$ представляємо відрізком Фур'є-розкладання в ряд по часу t :

$$C \cdot S = \frac{1}{2} C \cdot S + \sum_{m=1}^2 C \cdot S \cos m\omega t \quad (n = const),$$

де коефіцієнти ряду (2.51) обчислюються згідно формулам, які випливають з викладеного проєкційного методу

$$\begin{aligned} C \cdot S_0 &= C \cdot S_0 + \frac{1}{2} (C \cdot S_1 + C \cdot S_2), \\ C \cdot S_1 &= C \cdot S_0 + C \cdot S_1 + \frac{1}{2} (C \cdot S_2 + C \cdot S_1), \\ C \cdot S_2 &= \frac{1}{2} (C \cdot S_1) + C \cdot S_2 + C \cdot S_0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Таким чином, застосування проєкційного методу дозволило звести проблему побудови $\frac{2\pi}{\omega}$ - і $\frac{\pi}{\omega}$ - періодичних розв'язків вихідної нелінійної задачі до проблеми визначення коренів нелінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти яких представляють собою коефіцієнти ряду Фур'є шуканих функцій переміщень (2.45).

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

Розв'язок нелінійних задач про усталені коливання оболонок зводиться до побудови нелінійної залежності переміщення від параметра інтенсивності навантаження за допомогою розв'язку замкнутої системи алгебраїчних рівнянь. Для дослідження геометрично нелінійних задач будівельної механіки широко застосовуються різні числові методи з лінеаризацією по деякому параметру і кроковим ітераційним процесом розв'язку.

Одним з ефективних ітераційних методів розв'язку нелінійних рівнянь є метод Ньютона-Канторовича [19, 66, 67], при застосуванні якого істотне значення має вибір початкового наближення, що забезпечує збіжність даного ітераційного процесу. Труднощі, пов'язані з відсутністю вибору початкового наближення в значній мірі вирішилось при спільному використанні методу продовження розв'язку по параметру [66, 76]. При реалізації такого процесу в функціональному просторі розв'язок нелінійної крайової задачі зводиться до розв'язку послідовних лінійних крайових задач. Такий підхід використовується для розв'язку задач стійкості нелінійних вимушених усталених коливань тонких оболонок [67-71, 86, 100, 101, 164-167, 169, 179-183]. В монографії В.І. Гуляєва, В.А. Баженова, Є.О. Гоцуляка, Є.С. Дехтярюка і П.П. Лізунова дано теоретичне обґрунтування застосування синтезу методів продовження розв'язку по ведучому параметру, Ньютона-Канторовича, теорії Флоке і теорії розгалуження для побудови періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь усталених коливань оболонок і дослідження стійкості форм руху [85].

3.1. Визначення частот і форм власних коливань тонких оболонок

Якісна оцінка поведінки тонких оболонок при дії реальних динамічних навантажень вимагає знання їх динамічних характеристик, а саме спектра частот і відповідних їм форм власних коливань. Наявність цих характеристик надає можливість визначити такі параметри оболонок, які в подальшому виключають можливість їх попадання в резонанс з зовнішнім впливом.

Розглянемо вільні з малою амплітудою коливання оболонки в лінійній постановці. Рівняння руху можна представити у матричному вигляді

$$M\ddot{\vec{U}} + K\vec{U} = 0, \quad (3.1)$$

де M, K – матриці відповідно мас і жорсткості оболонки; $\ddot{\vec{U}}$ – друга похідна по часу вектора переміщення \vec{U} .

Припустимо, що власні коливання мають вид простих гармонічних коливань, тоді розв'язок можна представити у вигляді

$$\vec{U}(x^1, x^2, t) = \vec{U}^*(x^1, x^2) \sin(\omega t + \theta), \quad (3.2)$$

де $\vec{U}^*(x^1, x^2)$ – вектор, який характеризує форму коливань системи; ω – частота коливань; θ – фазовий кут.

Якщо другу похідну по часу від (3.2) підставити в (3.1), отримаємо рівняння власних коливань оболонок

$$-\omega^2 M \vec{U}^* \sin(\omega t + \theta) + K \vec{U}^* \sin(\omega t + \theta) = 0, \quad (3.3)$$

яке можна подати у вигляді

$$\left[K - \omega^2 M \right] \vec{U}^* = 0. \quad (3.4)$$

Існування кінцевих амплітуд при вільних коливаннях системи можливо за умови

$$\| K - \omega^2 M \| = 0. \quad (3.5)$$

Рівняння вільних коливань (3.4) зводиться до стандартної задачі на власні значення, де квадрати частот представляють собою власні числа, а форми коливань – власні вектори. Розв’язок задачі на власні значення для системи з $3N$ ступенями вільності ускладнено, тому знижено порядок розмірності вихідної задачі до n ступенів вільності безпосередньо застосуванням метода Бубнова – Гальоркіна.

Власний вектор

$$\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N] \quad (3.6)$$

подаємо у вигляді розкладання за попередньо заданою системою лінійно незалежних векторів z_j

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N q_{ij} z_j, \quad (3.7)$$

де q_{ij} – амплітуда j -ї узагальненої координати.

Базис проектування z_j будується з розв’язку статичних задач

$$Kz_j = P_j. \quad (3.8)$$

В якості зовнішнього навантаження P_j задаються зосереджені сили в вузлах кінцево-різницевої сітки або комбінації сил.

Обмежуючись в розкладанні (3.7) числом n членів ряду, записуємо вираз для i -ї наближеної власної форми коливань

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} z_j = Q_i Z, \quad (3.9)$$

де

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdot & \cdot & q_{3N1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1n} & \cdot & \cdot & q_{3Nn} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdot & \cdot & z_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{13N} & \cdot & \cdot & z_{3Nn} \end{pmatrix} - \text{матриця амплітуд}$$

узагальнених координат та лінійно незалежних базисних векторів відповідно.

Редуковані матриці жорсткості і мас отримуємо в результаті перетворень

$$\tilde{K} = Z^T K Z, \quad \tilde{M} = Z^T M Z. \quad (3.11)$$

В цьому випадку задачу на власні значення

$$(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M})Q = 0 \quad (3.12)$$

розв'язують стандартними методами, які дозволяють знайти спектр власних значень і коефіцієнти амплітуд узагальнених координат, за допомогою яких знаходять наближені власні форми коливань оболонки.

Обчислювальний комплекс, створений на базі розробленої числової методики дослідження стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок, дозволяє визначити значення нижчих власних частот коливань оболонок по лінійній теорії. Пошук першої нижчої частоти власних коливань оболонки здійснюється на основі наступного алгоритму: варіюючи значення частоти малих коливань ω в околиці недеформованого тривіального (стійкого) стану оболонки будується перший лінійний крок обчислювального процесу для ряду осесиметричних задач, який визначається системою (2.47) з урахуванням (2.48-2.50) при $n = 0$ і $\Delta q = 10^{-7} \text{ МПа} = \text{const}$. При цьому початкове значення параметра частоти ω дорівнює нулю.

На першому кроці чисельного алгоритму матриця (2.47) визначається як матриця лінійної крайової задачі про малі усталені вільні коливання оболонки з частотою $\omega = \text{const}$. Неперервна зміна параметра ω при розв'язку лінійних рівнянь, які впливають з системи (2.47) дозволяє отримати неперервну послідовність стаціонарних станів системи, яка визначається амплітудно-частотною характеристикою її власних коливань. На кожному кроці розв'язку лінійної задачі по змінній частоті ω аналізується знак визначників системи. Граничне значення параметра ω_k^* , при якому визначник (3.5) змінює знак, характеризує одну з власних частот. Мінімальне значення ω_k^* відповідає першій нижчій частоті власних коливань ω_1^* оболонки.

Описаний підхід застосовується і для визначення нижчих частот більш складних циклічно симетричних форм власних коливань. Одночасно з підрахунком матриці лінійної системи на першому кроці при певній частоті ω , яка відповідає осесиметричній формі власних коливань, будується матриця тієї ж системи при $n > 0$ і аналізується їх поведінка.

Для оцінки збіжності розв'язку описаного вище процесу використовується критерій

$$\frac{(\omega_{k(c+1)}^* - \omega_{k(c)}^*)}{\omega_{k(c)}^*} \leq \varepsilon, \quad (3.13)$$

де $\varepsilon = 10^{-6}$ – задана точність; в дужках вказані номери послідовних граничних кроків по частоті $\omega(c; c+1)$, між якими відбувається виродження визначника, тобто при настанні явища резонансу.

3.2. Чисельний підхід до дослідження усталених нелінійних вимушених коливань оболонок

Система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку усталених нелінійних коливань оболонки має вигляд

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = G(t; Y) + \mu F(t), \quad (3.13)$$

де M, C, K – матриця відповідно мас, демпфірування і жорсткості; $G(t, Y)$ – нелінійна T -періодична по t вектор-функція; $Y(y_1, y_2, \dots, y_r)$ – вектор-функція розв'язку (переміщення) системи; μ – параметр інтенсивності (амплітуди) зовнішнього навантаження; $F(t)$ – T -періодична вектор-функція зовнішньої дії.

Необхідною і достатньою умовою періодичності розв'язку системи (3.13) є виконання рівності

$$y(t) = y(t+T) \quad (3.14)$$

Наближений розв'язок системи, який описує нелінійні коливання під дією періодичної збурюючої сили, поданий у вигляді відрізка ряду Фур'є в комплексній формі з частотою, яка дорівнює частоті зовнішнього дії:

$$y(t) = \sum_{n=-N}^N B_n e^{in\omega t}, \quad (3.15)$$

де B_n – r - вимірні вектори, складові яких є коефіцієнтами Фур'є періодичних функцій $y_m(t)$ ($m=1,2,\dots,r$), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота.

Для побудови і дослідження T - періодичних розв'язків системи (3.13) використовується метод продовження розв'язку по параметру.

Приймаємо в якості ведучого параметру μ інтенсивність (амплітуду) навантаження. Нехай при деякому значенні $\mu = \mu^1$ відомий T - періодичний розв'язок задачі (3.13). Тоді, надаючи параметру малий приріст $\Delta\mu^1$, розв'язок подаємо у вигляді $y^2 = y^1 + \Delta y^1$. Підставляючи рішення у (3.13), отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами відносно невідомих приростів вектор-функцій Δy

$$M\Delta\dot{y}^1 + C\Delta\dot{y}^1 + K\Delta y^1 = G'y(t, y^1)\Delta y^1 + \Delta\mu^1 F(t) + R^1(t), \quad (3.16)$$

де $G'y(t, y^1)$ – матриця з елементами $g_{sj} = \frac{\partial G_s(t, y^1)}{\partial y_j}$, які є T - періодичними

функціями від t ; $R^1(t)$ – вектор-функція нев'язки попереднього кроку

$$R^1(t) = M\dot{y}^1 + C\dot{y}^1 - G(t, y^1) - \mu^1 F(t) \quad (3.17)$$

Розв'язок нелінійної системи зводиться до послідовного (покрокового) процесу знаходження T - періодичних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (3.16) з T - періодичними коефіцієнтами.

Для побудови періодичного розв'язку системи (3.16) використовується метод Бубнова-Гальоркіна. Розв'язок системи знаходиться наближено у вигляді відрізків ряду Фур'є

$$\Delta y^1(t) = \sum_{n=-N}^N \Delta B_n^1 e^{in\omega t}. \quad (3.18)$$

T - періодичні вектор-функції $F(t), R(t)$ і елементи матриці подаються у вигляді

$$F(t) = \sum_{s=-M}^M f_s e^{is\omega t}; R(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_l e^{il\omega t}; g_{sj} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{sjl} e^{il\omega t}. \quad (3.19)$$

Підставивши (3.18) і (3.19) в систему (3.16), а потім спроектувавши отриману систему на функції $\exp(-il\omega t)$ і $\exp(il\omega t)$, ($l=1,2,\dots,N$) маємо систему лінійних рівнянь відносно вектору ΔB_n^1 :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^r [K_{sj} - \text{Re } g_{os}^1] \text{Re } \Delta B_{0j}^1 - \sum_{j=1}^r \left\{ \sum_{n=1}^N 2 \text{Re } g_{nsj}^1 \text{Re } \Delta B_{nj}^1 + \sum_{n=1}^N 2 \text{Jmg}_{nsj}^1 \text{Jm } \Delta B_{nj}^1 \right\} = \Delta \mu^1 \text{Re } f_{0s} + \text{Re } r_{0s}^1; \\ & \sum_{j=1}^r \left\{ \begin{aligned} & -\text{Re } g_{lsj}^1 \text{Re } \Delta B_{0j}^1 + \sum_{n=1}^N [(K_{sj} - \delta_s^j m_{sj}(\omega)^2) \delta_e^n - (\text{Re } g_{(l+n)sj}^1 + \text{Re } g_{|l-n|sj}^1)] \text{Re } \Delta B_{nj}^1 + \\ & + \sum_{n=1}^N [\delta_s^j \delta_e^n C_{sj} l \omega + (\text{Jmg}_{(l+n)sj}^1 - \text{sign}(l-n) \text{Jmg}_{|l-n|sj}^1)] \text{Jm } \Delta B_{nj}^1 \end{aligned} \right\} = \Delta \mu^1 \text{Re } f_{ls} + \text{Re } r_{ls}^1; \\ & \sum_{j=1}^r \left\{ \begin{aligned} & -\text{Jmg}_{lsj}^1 \text{Re } \Delta B_{0j}^1 + \sum_{n=1}^N [\delta_s^j \delta_e^n C_{sl} l \omega - (\text{Jmg}_{(l+n)sj}^1 + \text{sign}(l-n) \text{Jmg}_{|l-n|sj}^1)] \text{Re } \Delta B_{nj}^1 + \\ & + \sum_{n=1}^N [(K_{sj} - \delta_s^l m_{sj}(\omega)^2) \delta_e^n + (\text{Re } g_{(l+n)sj}^1 - \text{Re } g_{|l-n|sj}^1)] \text{Jm } \Delta B_{nj}^1 \end{aligned} \right\} = \Delta \mu^1 \text{Jm } f_{ls} + \text{Jm } r_{ls}^1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$(s=1,2,\dots,r; l=1,2,\dots,N)$

де δ_{β}^{α} - символ Кронекера.

Розв'язуючи систему (3.20), знаходимо значення коефіцієнтів ΔB_n^1 ($n=0,\pm 1,\dots,\pm N$). Наближений розв'язок системи (3.13), який відповідає значенню параметра μ^2 ,

$$\Delta y^2(t) = \sum_{n=-N}^N (B_n^1 + \Delta B_n^1) e^{in\omega t}. \quad (3.21)$$

Цей алгоритм можна використовувати і для побудови послідовних розв'язків системи (3.13), коли при постійній інтенсивності зовнішньої дії змінюється його частота. В цьому випадку ведучим параметром є частота зовнішньої дії ω . Рівняння (3.13) набуде вигляду

$$\omega^2 M \ddot{y} + \omega C \dot{y} + Ky = G(\tau, y) + \mu^* F(\tau), \quad (3.22)$$

де диференціювання не по t , а по $\tau = \omega t$.

Лінеризована система диференціальних рівнянь в даному випадку має вигляд

$$\omega^2 M \Delta \ddot{y} + \omega C \Delta \dot{y} + K \Delta y = G'_y(\tau, y) \Delta y + [2\omega M \dot{y} + C \dot{y}] \Delta \omega + R(\tau). \quad (3.23)$$

Нев'язку вираховуємо аналогічно (3.17) при фіксованому значенні параметра μ^* .

Використовуючи описаний раніше алгоритм, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно ΔB_n^l ($n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$), аналогічну залежностям (3.20), де в правій частині стоять координати вектора.

3.3. Дослідження стійкості усталених вимушених коливань тонких оболонок

Для дослідження стійкості T - періодичного розв'язку $y(t)$ по першому наближенню необхідно скласти рівняння в варіаціях. Для системи (3.13) рівняння в варіаціях має вигляд

$$M \Delta \ddot{y} + C \Delta \dot{y} + K \Delta y = G'_y(t, y) \Delta y. \quad (3.24)$$

Властивості обмеженості і стійкості розв'язків рівнянь (3.24) визначаються характеристичними показниками цієї системи. Нехай λ – деякий характеристичний показник системи (3.24), тоді згідно теорії Флоке, система має рішення виду

$$\Delta y(t) = e^{\lambda T} \sum_{n=-N}^N \Delta B_n e^{in\omega t}, \quad (3.25)$$

де ΔB_n – T - періодичні вектор-функції.

Підставляючи (3.25) в (3.24) і проектуючи його на систему функцій $\exp(-il\omega t)$ і $\exp(il\omega t)$, ($l = 1, 2, \dots, N$), отримуємо однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^r \left[\lambda^2 \delta_s^j m_{sj} + \lambda \delta_s^j C_{sj} + K_{sj} - \operatorname{Re} g_{0sj} \right] \operatorname{Re} \Delta B_{0j} - \sum_{j=1}^r \left\{ \sum_{n=1}^N 2 \operatorname{Re} g_{nsj} \operatorname{Re} \Delta B_{nj} + \sum_{n=1}^N 2 \operatorname{Im} g_{nsj} \operatorname{Im} \Delta B_{nj} \right\} = 0; \\
& \sum_{j=1}^r \left\{ -\operatorname{Re} g_{lsj} \operatorname{Re} \Delta B_{0j} + \sum_{n=1}^N \left[(\lambda^2 - (l\omega)^2) \delta_s^j m_{sj} \delta_l^n + \delta_s^j \delta_l^n \lambda C_{sj} + \delta_l^n K_{sj} - (\operatorname{Re} g_{(l+n)sj} + \operatorname{Re} g_{/l-n/sj}) \right] \operatorname{Re} \Delta B_{nj} - \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^N \left[2\lambda l \omega \delta_s^j \delta_l^n m_{sj} + l \omega \delta_s^j \delta_l^n C_{sj} + (\operatorname{Im} g_{(l+n)sj} - \operatorname{sign}(l-n) \operatorname{Im} g_{/l-n/sj}) \right] \operatorname{Im} \Delta B_{nj} \right\} = 0; \quad (3.26) \\
& \sum_{j=1}^r \left\{ -\operatorname{Im} g_{lsj} \operatorname{Re} \Delta B_{0j} + \sum_{n=1}^N \left[2\lambda l \omega \delta_s^j \delta_l^n m_{sj} + l \omega \delta_s^j \delta_l^n C_{sj} - (\operatorname{Im} g_{(l+n)sj} + \operatorname{sign}(l-n) \operatorname{Im} g_{/l-n/sj}) \right] \operatorname{Re} \Delta B_{nj} + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^N \left[(\lambda^2 - (l\omega)^2) \delta_s^j m_{sj} \delta_l^n + \delta_s^j \delta_l^n \lambda C_{sj} + \delta_l^n K_{sj} + (\operatorname{Re} g_{(l+n)sj} - \operatorname{Re} g_{/l-n/sj}) \right] \operatorname{Im} \Delta B_{nj} \right\} = 0; \\
& s = 1, 2, \dots, r; \quad l = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Згідно теореми Ляпунова, якщо визначник матриці системи (3.26) перетворюється в нуль тільки при значенні характеристичного показника λ , у якого дійсна частина менше нуля, то розв'язок $y(t)$ стійкий, а якщо хоча б у одного λ дійсна частина більша нуля, то розв'язок $y(t)$ – нестійке.

Рівняння, які описують коливання по кососиметричним формам, незалежні між собою, тому рівняння в варіаціях для них приводяться до рівняння типу Хілла

$$\Delta \ddot{y} + 2\varepsilon \Delta \dot{y} + \omega_0^2 \Delta y + 2\Phi(t) \Delta y = 0, \quad (3.27)$$

де ε – коефіцієнт демпфірування; ω_0^2 – квадрат частоти власних коливань; $\Phi(t)$ – періодична функція з періодом T , яка залежить від параметрів, які характеризують оболонки.

Визначення границь областей нестійкості зводиться до знаходження умов, при яких диференціальне рівняння (3.27) має періодичне рішення з періодом T або $2T$.

Періодична функція представлена у вигляді збіжного ряду Фур'є:

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{ik\omega t}, \quad (3.28)$$

де Φ_k – коефіцієнт Фур'є функції $\Phi(t)$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота.

РОЗДІЛ 4

ОЦІНКА ВПЛИВУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ НА СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ПРИ ДІЇ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

4.1. Оцінка достовірності розробленої методики та її апробація при розв'язанні тестових задач

Широке впровадження в інженерну і проектну практику сучасних методів чисельного аналізу пов'язане з розробкою великої кількості орієнтованих на певний клас задач прикладної механіки методів чисельного розрахунку конструкцій. Серед багатьох проблем, які виникають при цьому, найбільш актуальною є проблема адекватності і достовірності створених розрахункових методів. Відповідь на це запитання може бути отримане, як шляхом порівняння отриманих результатів з існуючими в літературі розв'язками, так і дослідженням внутрішньої збіжності чисельних результатів при згущенні різницевої сітки. В зв'язку з тим, що результати дослідження стійкості вимушених коливань напрямку даної роботи в літературі практично відсутні, оцінка достовірності розробленої методики і її апробація проведена при дослідженні власних коливань оболонок і порівняння з існуючими розв'язками, збіжності результатів при згущенні кінцево-різницевої сітки, розв'язку задач, пов'язаних з оцінкою статичної стійкості оболонок та виконання порівняльного аналізу отриманих результатів з результатами досліджень методом скінченних елементів, який реалізовано в програмному комплексі NASTRAN [103].

В роботі виконано порівняння з існуючими в літературі даними результатів розрахунку власних коливань кругової циліндричної оболонки, яка жорстко закріплена по краю.

Серединна поверхня циліндричної оболонки описана рівняннями в параметричному вигляді

$$x = R \cos x^1, \quad y = R \sin x^1, \quad z = x^2, \quad (4.1)$$

де R – радіус циліндричної оболонки, x^1, x^2 – відповідно колова і орієнтована в напрямку твірної координати [85].

Порівняння нижчих власних частот циліндричної оболонки з геометричними і механічними параметри: товщина оболонки $h = 0,00254$ м, радіус $R = 0,0762$ м, висота $L = 0,3048$ м; модуль пружності $E = 2,04 \cdot 10^{11}$ Па, щільність $\gamma = 7836,5$ кг/м³, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,29$, отриманих за допомогою запропонованої методики, з результатами наведеними в роботі [95] було виконано Гоцуляком Є.О., Гуляєвим В.І., Киричуком О.А. [67]. Спостерігалась хороша збіжність результатів.

В якості тестової розв’язана задача визначення нижчих частот і форм власних коливань циліндричної оболонки (4.1) з геометричними параметрами: $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м, $L = 0,48$ м. Модуль пружності $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, щільність $\gamma = 7800$ кг/м³, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$. На оболонку накладені такі граничні умови: на верхньому краю – ковзне кріплення вздовж твірної, інший край оболонки жорстко закріплений.

Значення нижчих частот і відповідні форми власних коливань циліндричної оболонки, отримані згідно методики (розділ 3), представлені на рис. 4.1. Кількість вузлів кінцево-різницевої сітки вздовж твірної приймалась рівною 45. Точність розв’язку перевірялася перерахунком задачі визначення частот власних коливань зі зменшенням величини кроку $\Delta\omega$ по параметру ω (частота).

Для достовірності отриманих значень частот і форм власних коливань оболонки виконано їх порівняння з результатами, отриманими в комплексі NASTRAN методом Ланцоша, які склали:

$$\nu_1 = 482,16 \text{ Гц}; \quad \nu_2 = 523,32 \text{ Гц}; \quad \nu_3 = 543,18 \text{ Гц}; \quad \nu_4 = 634,98 \text{ Гц}; \quad \nu_5 = 767,52 \text{ Гц}.$$

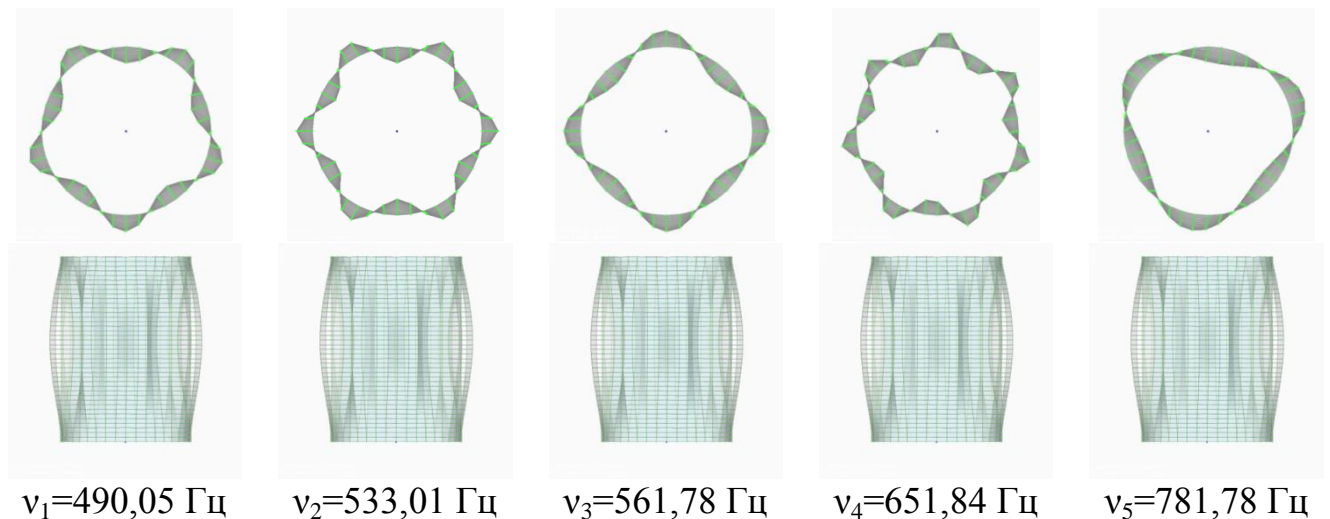


Рис. 4.1. Форми і частоти власних коливань циліндричної оболонки.

Кількість півхвиль в коловому напрямку і вздовж твірної співпали, значення частот власних коливань відрізняються менше ніж на 4%.

Розв’язана тестова задача визначення нижчих частот і форм власних коливань захисної ємності паливного резервуару, який розташований на Українській антарктичній станції ”Академік Вернадський”. Захисна ємність має вигляд циліндричної оболонки висотою $L=6,58$ м, діаметром $D=6,96$ м, товщиною стінки – $h=5$ мм. Модуль пружності $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Па, щільність $\gamma=7800 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт Пуассона $\mu=0,3$.

Перші п’ять форм і частот власних коливань оболонки, обчислені за допомогою методикою в розділі 3, подані на рис. 4.2. При цьому поверхня циліндричної оболонки описана рівняннями в параметричному вигляді (4.1). Кількість вузлів кінцево-різницевої сітки вздовж твірної приймалась рівною 65.

Виконано порівняння отриманих значень частот і форм власних коливань захисної ємності паливного резервуара з результатами, отриманими методом Ланцоша в комплексі скінченно-елементного аналізу [103]:

$$\nu_1 = 14,14 \text{ Гц}; \nu_2 = 14,38 \text{ Гц}; \nu_3 = 14,63 \text{ Гц}; \nu_4 = 15,24 \text{ Гц}; \nu_5 = 16,41 \text{ Гц}.$$

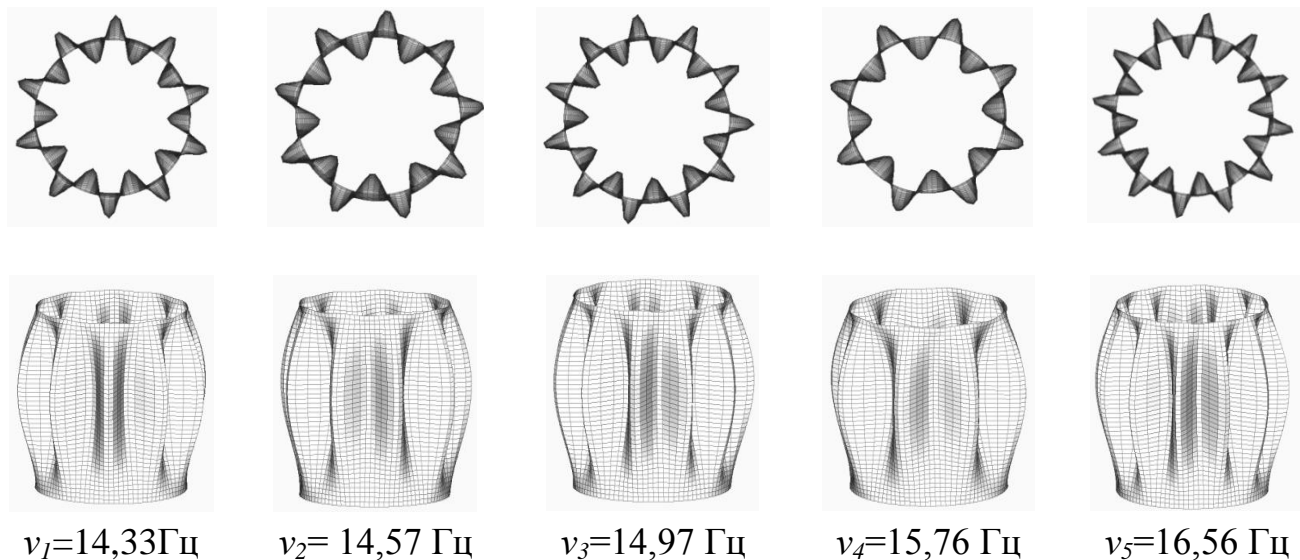


Рис. 4.2. Форми і частоти власних коливань захисної ємності паливного резервуару.

Найбільше відхилення отриманих результатів при порівнянні не перевищує 3%. Спостерігається співпадіння кількості півхвиль вздовж твірної і в коловому напрямку оболонки.

В зв'язку з тим, що в роботі досліджена стійкість нелінійних коливань конічної оболонки, розв'язана тестова задача визначення частот і форм її власних коливань.

Рівняння серединної поверхні конічної оболонки представлено в параметричному вигляді

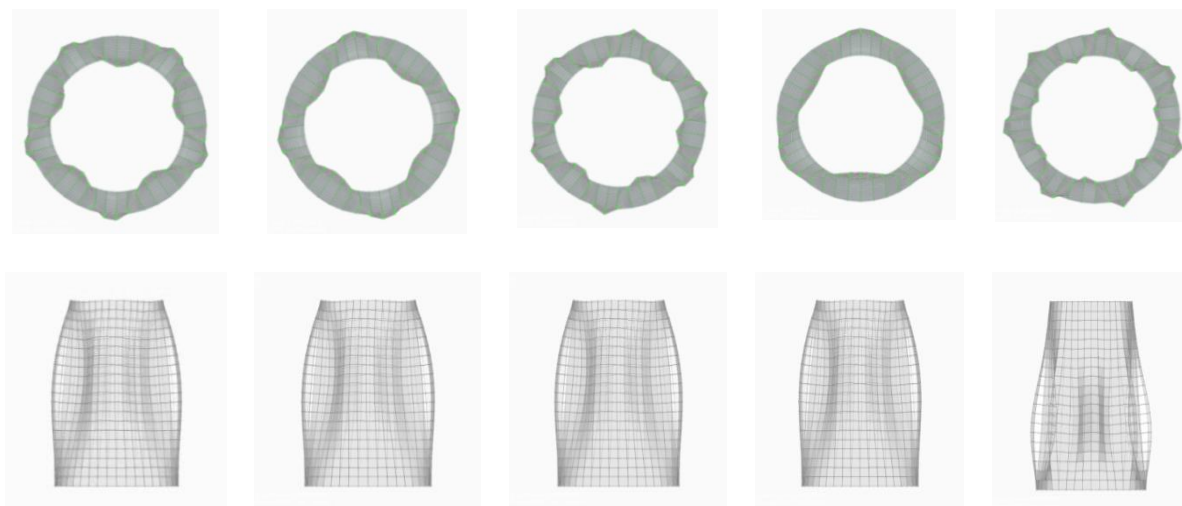
$$x = (R - x^2 \cos \alpha) \cos x^1, \quad y = (R - x^2 \cos \alpha) \sin x^1, \quad z = x^2 \sin \alpha, \quad (4.2)$$

де R , r – радіуси конічної оболонки, x^1, x^2 – відповідно колова і орієнтована в напрямку твірної координати, $\sin \alpha = \frac{L}{a}$; $\cos \alpha = \frac{R-r}{a}$ [85].

Розглядалась конічна оболонка з такими геометричними і механічними параметрами: $h = 0,002$ м, $r = 0,15$ м, $R = 0,2$ м і $L = 0,48$ м, $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\gamma = 7800$ кг/м³, $\mu = 0,3$. Граничні умови: на одному кінці оболонка жорстко

закріплена, а на іншому кінці задано ковзне кріплення вздовж твірної. Кількість вузлів кінцево-різницевої сітки вздовж твірної 45.

Форми перших п'яти власних коливань і значення частот конічної оболонки, які визначені за представленою методикою в розділі 3, відображені на рис. 4.3.



$$\nu_1=540,12 \text{ Гц} \quad \nu_2=554,53 \text{ Гц} \quad \nu_3=648,03 \text{ Гц} \quad \nu_4=749,99 \text{ Гц} \quad \nu_5=818,01 \text{ Гц}$$

Рис. 4.3. Форми і частоти власних коливань конічної оболонки.

Частоти власних коливань конічної оболонки, які отримані методом Ланцоша в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу [103] мають значення :

$$\nu_1 = 528,54 \text{ Гц}; \quad \nu_2 = 547,58 \text{ Гц}; \quad \nu_3 = 635,24 \text{ Гц}; \quad \nu_4 = 729,08 \text{ Гц}; \quad \nu_5 = 801,77 \text{ Гц}.$$

Спостерігається співпадіння кількості півхвиль вздовж твірної і в коловому напрямку оболонки. При порівнянні отриманих результатів найбільше відхилення не перевищує 3%.

В роботі проведено порівняння результатів розрахунку власних коливань однополого гіперболоїда з результатами, отриманими методом скінченних елементів [103].

Серединна поверхня однополого гіперболоїда описана рівняннями в параметричному вигляді

$$\begin{aligned}
 x &= \left(\frac{a}{b} \sqrt{(x^2 - z_b)^2 + b^2} + c\right) \cos x^1, \\
 y &= \left(\frac{a}{b} \sqrt{(x^2 - z_b)^2 + b^2} + c\right) \sin x^1, \\
 z &= x^2,
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

де x^1, x^2 – відповідно колова і орієнтована в напрямку твірної координати; a, b, c – параметри гіперболи [167].

Геометричні і механічні параметри оболонки приймалися такими: $h = 0,002$ м, $r = 0,15$ м, $R = 0,2$ м і $L = 0,48$ м, $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\gamma = 7800$ кг/м³, $\mu = 0,3$. Граничні умови: на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому кінці задано ковзне кріплення вздовж твірної. Достатня точність розв'язку досягнута при 80 вузлах кінцево-різницевої схеми.

На рис. 4.4 зображені форми і частоти власних коливань однополого гіперболоїда, які отримані за представленою методикою (розділ 3).

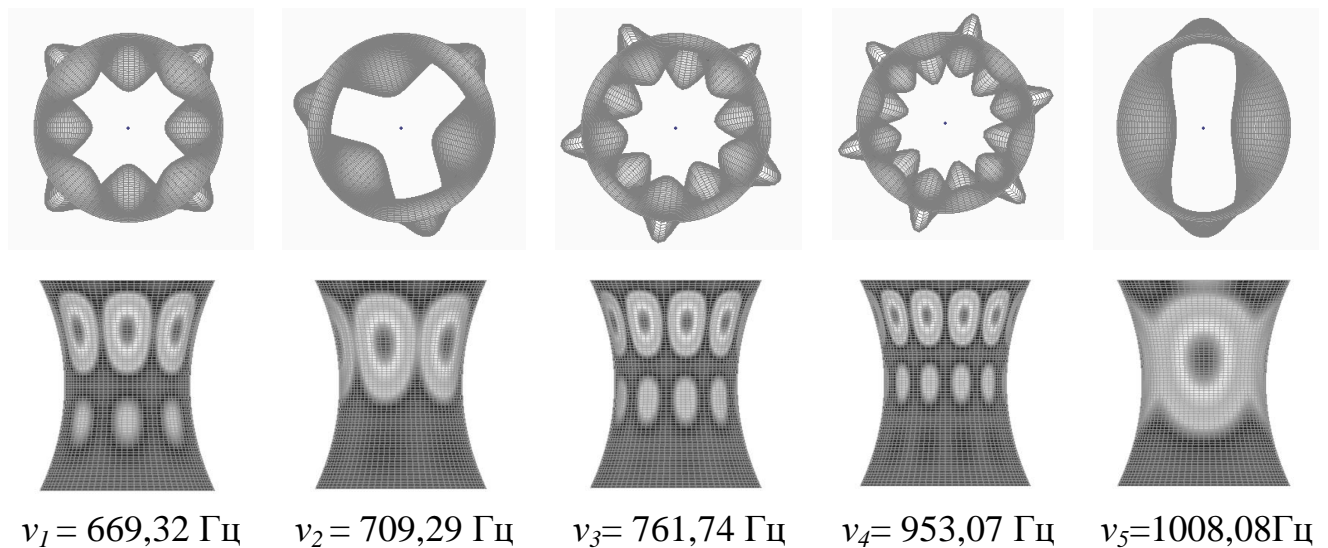


Рис. 4.4. Форми і частоти власних коливань гіперболоїда.

Значення перших п'яти частот власних коливань однополого гіперболоїда, які підраховані в комплексі NASTRAN методом Ланцоша, склали:

$$\nu_1 = 655,81 \text{ Гц}; \quad \nu_2 = 683,04 \text{ Гц}; \quad \nu_3 = 721,25 \text{ Гц}; \quad \nu_4 = 908,97 \text{ Гц}; \quad \nu_5 = 974,13 \text{ Гц}.$$

При порівнянні отриманих результатів найбільше відхилення не перевищує 6%. Кількість півхвиль вздовж твірної і в коловому напрямку оболонки співпали.

Для достовірності і апробації розробленої методики проведено порівняння результатів розрахунку стійкості циліндричної, конічної оболонок при дії статичного навантаження в лінійній і нелінійній постановці з аналітичними і чисельними результатами [19, 84, 103]. Виконано порівняння критичних значень навантаження та форми втрати стійкості оболонок, геометричні та механічні характеристик яких приймалися такими самими як при визначенні частот і форм власних коливань (див. вище).

Розглянемо результати дослідження статичної стійкості циліндричної оболонки при дії поздовжнього навантаження, прикладеного до її верхньої кромки. Визначено критичне значення статичного навантаження із застосуванням методу криволінійних сіток та методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича $q_{cr}^{st} = 2325,57$ кН/м. Виконано порівняння з аналітичним результатом за формулою Лоренца-Тимошенка $q_{cr} \approx 0,6 \frac{Eh}{R} \approx 2514,95$ кН/м [19], та чисельним – в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу NASTRAN: 2521,01 кН/м – лінійна задача стійкості методом Ланцоша, 2510,23 кН/м – нелінійна задача статичної механіки методом Ньютона-Рафсона. Форма втрати стійкості оболонки однакова для всіх розрахунків. Критичне значення статичного навантаження нижче на 8 % і 7 % за значення, які отримані за формулою Лоренца-Тимошенка і методом Ньютона-Рафсона відповідно.

На рис. 4.5, 1а представлена перша форма втрати статичної стійкості оболонки в лінійній постановці, на рис. 4.5, 1б – в нелінійній постановці.

Виконано дослідження статичної стійкості конічної оболонки при дії поздовжнього навантаження, прикладеного до її верхньої кромки. Визначено критичне значення статичного навантаження із застосуванням методу криволінійних сіток та методу продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича $q_{cr}^{st} = 3327,25$ кН/м, яке порівняно з аналітичним

результатом за формулою Штаермана 3511,49 кН/м [19], та чисельним – в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу NASTRAN: 3338,69 кН/м – лінійна задача стійкості методом Ланцоша, 3336,32 кН/м – нелінійна задача статики методом Ньютона-Рафсона. На рис. 4.5, 2а представлена перша форма втрати статичної стійкості конічної оболонки в лінійній постановці, на рис. 4.5, 2б – в нелінійній постановці.

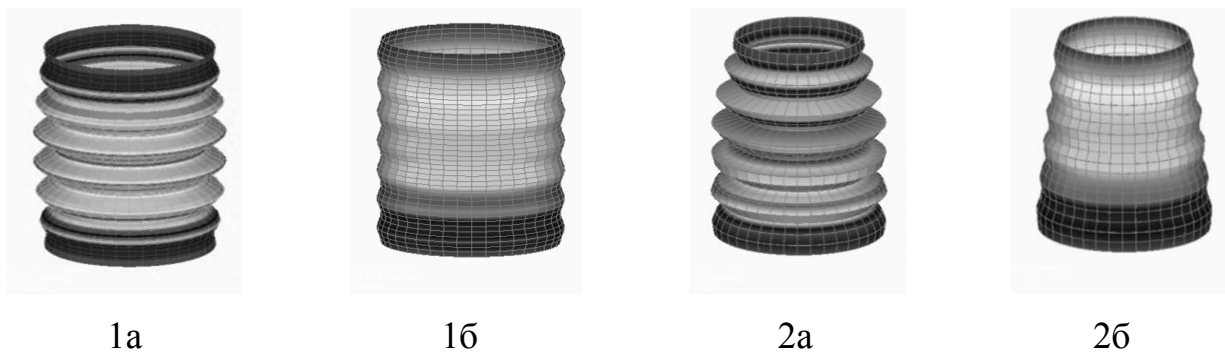


Рис. 4.5. Форма втрати статичної стійкості циліндричної (1) і конічної (2) оболонок в лінійній (а) та в нелінійній постановках (б).

Збіжність розв'язку перевірялася перерахунком задачі зі зменшенням кінцево-різницевих інтервалів по координаті x^2 (вздовж твірної). Достатня збіжність розв'язку досягнута при 45 вузлах кінцево-різницевої схеми. Точність розв'язку перевірялася перерахунком задачі статичної стійкості зі зменшенням величини кроку Δq по параметру q (навантаження).

4.2. Оцінка впливу геометричних параметрів на стійкість усталених нелінійних вимушених коливань тонких оболонок при дії поздовжнього періодичного навантаження

На основі методики, викладеної в розділі 3, розглядається стійкість усталених вимушених коливань оболонок під дією поздовжнього періодичного навантаження. Для розв'язання задачі стійкості вимушених нелінійних коливань оболонок її диференційні рівняння дискретизуються в напрямку твірної за

допомогою модифікованого кінцево-різницевого метода криволінійних сіток, який здійснюється перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. В коловому напрямку компоненти вектора переміщень елемента серединної поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами [165-167]. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича, які дозволяють розв'язок нелінійної крайової задачі звести до розв'язку послідовності лінеризованих крайових задач. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму аналізуються значення визначників матриці лінеризованих рівнянь, що відповідають симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати стійкості коливань оболонки полягає у зміні знаку відповідного визначника, а рівень інтенсивності навантаження, що відповідає цьому стану, характеризує критичне динамічне навантаження [67, 68, 69, 85].

Проведені дослідження нелінійних усталених коливань тонких оболонок фіксованої частоти при збільшенні амплітуди навантаження з різними геометричними параметрами. Визначені значення критичних динамічних навантажень в залежності від частоти усталених коливань оболонок в області нижчих частот. Отримані (побудовані) форми втрати стійкості. В дослідженнях не враховано вплив демпфірування на динамічну стійкість оболонок у зв'язку з малим значенням параметра затухання для сталевих пружних тонких оболонок.

Збіжність розв'язку перевірялась перерахунком задачі зі зменшенням кінцево-різницевого інтервалів по координаті x^2 та величини кроку Δq по параметру навантаження q .

4.2.1. Стійкість усталених вимушених коливань циліндричних оболонок

В геометрично нелінійній постановці розглядалась стійкість вимушених усталених коливань пружної тонкої циліндричної оболонки (4.1), яка знаходилась

під дією періодичного за часом рівномірно розподіленого поздовжнього навантаження. Інтенсивність навантаження змінювалась за законом $q = q_1 \cos \omega t$, де q_1 , ω – амплітуда і частота навантаження відповідно. Для дослідження впливу геометричних параметрів на стійкість усталених нелінійних вимушених коливань тонких оболонок при дії поздовжнього періодичного навантаження розглянута тонка пружна циліндрична оболонка з варіюванням параметрів: товщиною $h = [0,001; 0,0015; 0,002; 0,004]$ м, радіусом $R = [0,2; 0,4; 0,8]$ м і висотою $L = [0,48; 0,72; 0,96]$ м. Механічні характеристики сталеві оболонки приймалися такими: модуль пружності $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, щільність матеріалу $\gamma = 7800$ кг/м³, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$. Товщина h оболонки змінювалась в межах від 0,001 м до 0,004 м. На оболонку накладено такі граничні умови: на верхньому краю – ковзне кріплення вздовж твірної, інший край оболонки жорстко закріплений.

На першому етапі досліджена стійкість вимушених усталених коливань циліндричної оболонки зі сталими геометричними параметрами: $R = 0,2$ м і $L = 0,48$ м і при варіюванні її товщини $h = [0,001; 0,0015; 0,002; 0,004]$. Чисельне дослідження стійкості вимушених коливань проведено в області перших трьох частот власних коливань циліндричної оболонки, які представлені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Нижчі частоти власних коливань циліндричної оболонки

R=0,2 м L=0,48 м			
Товщина оболонки h , м	ω , с ⁻¹		
	ω_1	ω_2	ω_3
0,004	4214	4645	5120
0,002	3081	3348	3528
0,0015	2762	2777	3199
0,001	2252	2257	2536

h=0,002 м		R=0,2 м		
Висота оболонки L , м	ω , c^{-1}			
	ω_1	ω_2	ω_3	
0,48	3081	3348	3528	
0,72	2092	2245	2738	
0,96	1575	1783	2007	
h=0,002 м		L=0,72 м		
Радіус оболонки R , м	ω , c^{-1}			
	ω_1	ω_2	ω_3	
0,2	2092	2245	2738	
0,4	1481,5	1562,6	1579,5	
0,8	1044,62	1047,50	1087,67	

В табл. 4.2. наведені результати критичних значення динамічного навантаження $q_{кр}$, визначенні за методикою, представленою в розділі 3, а також n кількість півхвиль в коловому напрямку, які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості коливань при відповідних частотах усталеного руху.

Таблиця 4.2

**Критичні значення навантаження $q_{кр}$ (кН/м) при відповідних частотах
коливань ω (c^{-1})**

h=0,004 м		R=0,2 м		L=0,48 м							
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	6	11000,05	2600	6	10700,05	4210	4	600,05	4630	5	1550,05
100	6	11000,05	2800	6	10650,05	4211	4	500,05	4640	5	850,05
300	6	11000,05	2850	4	10650,05	4212	4	350,05	4645	5	0,05
500	6	11000,05	2900	4	10500,05	4213	4	100,05	4700	3	9050,05
700	6	11000,05	3000	4	10300,05	4214	4	0,05	4800	3	8000,05
1000	6	10950,05	3100	4	10000,05	4220	5	7650,05	4900	3	6700,05
1400	6	10950,05	3300	4	9300,05	4300	5	7000,05	5000	3	5000,05
1700	6	10900,05	3600	4	7900,05	4400	5	6000,05	5100	3	2100,05
2000	6	10850,05	3800	4	6600,05	4500	5	4700,05	5120	3	0,05
2200	6	10800,05	4000	4	4850,05	4600	5	2650,05	5200	5	910,05
2400	6	10750,05	4200	4	1250,05						

h=0,002 м			R=0,2 м			L=0,48 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	8	2800,05	2500	5	2350,05	3090	6	1800,05	3370	4	1650,05
100	8	2800,05	3000	5	950,05	3100	6	1800,05	3390	4	1550,05
300	8	2800,05	3010	5	900,05	3150	6	1600,05	3400	4	1500,05
500	8	2800,05	3030	5	750,05	3160	6	1600,05	3450	4	1150,05
700	8	2850,05	3050	5	600,05	3200	6	1400,05	3500	4	700,05
1000	8	2850,05	3060	5	500,05	3330	6	500,05	3520	4	400,05
1400	8	2800,05	3070	5	350,05	3340	6	350,05	3528	4	0,05
1700	8	2750,05	3080	5	100,05	3347	6	100,05	3550	7	2550,05
2000	9	2750,05	3081	5	0,05	3348	6	0,05	3600	7	2500,05
2300	5	2600,05	3085	6	1850,05	3360	4	1700,05			
h=0,0015 м			R=0,2 м			L=0,48 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	10	1570,01	1400	10	1550,01	2700	6	520,01	2777	5	0,01
50	10	1570,01	1600	10	1550,01	2750	6	230,01	2780	7	1410,01
100	10	1570,01	1800	10	1540,01	2760	6	100,01	2800	7	1400,01
200	10	1565,01	2100	6	1480,01	2762	6	0,01	2900	7	1280,01
300	10	1565,01	2200	6	1400,01	2763	5	250,01	3000	7	1100,01
600	10	1565,01	2300	6	1290,01	2765	5	230,01	3100	7	810,01
700	10	1565,01	2400	6	1170,01	2770	5	180,01	3199	7	0,01
900	10	1560,01	2500	6	1010,01	2775	5	100,01	3220	4	1270,01
1000	10	1560,01	2600	6	820,01	2776	5	60,01	3250	4	1170,01
h=0,001 м			R=0,2 м			L=0,48 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	13	690,002	1000	12,13	687,502	2250	6	40,002	2400	5	445,002
50	13	690,002	1200	13	685,002	2252	6	0,002	2450	5	355,002
100	13	690,002	1400	13	682,502	2260	7	327,502	2500	5	232,502
200	13	690,002	1600	13	680,002	2280	7	295,002	2530	5	92,5025
300	13	690,002	1800	6	625,002	2300	7	255,002	2536	5	0,002
600	13	687,502	2000	6	485,002	2350	7	90,002	2550	8	540,002
700	13	687,502	2100	6	382,502	2356	7	35,002			
900	13	687,502	2200	6	227,502	2357	7	0,002			

На рис. 4.6 і 4.7 відображені залежності критичних значень $q_{кр}$ динамічного навантаження, що періодично змінюється з часом, від частоти коливань циліндричних оболонок ω з геометричними параметрами: $R=0,2$ м і $L=0,48$ м. При цьому h набуває значень: $h=0,004$ м (рис. 4.6, а), $h=0,002$ м (рис. 4.6, б), $h=0,0015$ м (рис. 4.7, а і б), $h=0,001$ м (рис. 4.7, в).

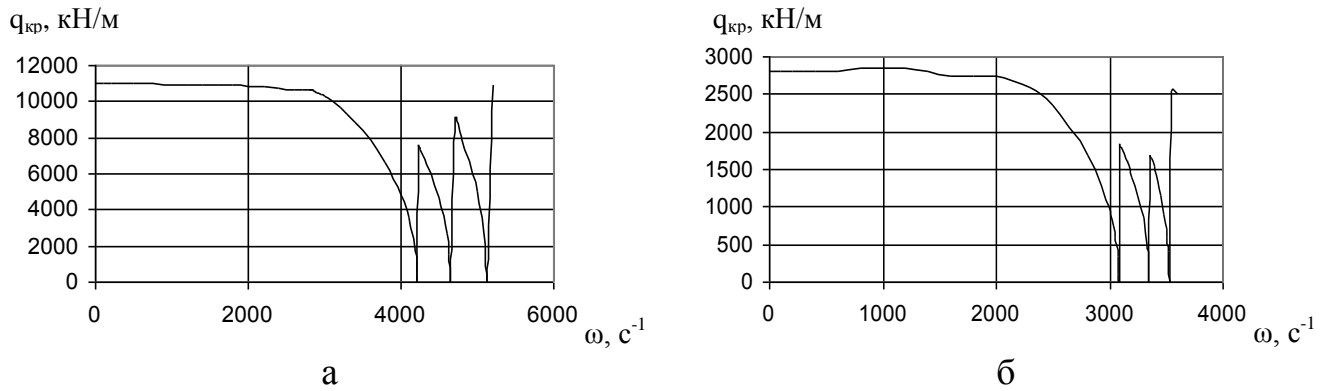


Рис.4.6. Залежність критичного значення динамічного навантаження від частоти при $R = 0,2$ м, $L = 0,48$ м: а) $h = 0,004$ м, б) $h = 0,002$ м.

Оскільки значення власних частот в деяких частотних зонах є дуже близькими (рис.4.7, а), вони приведені в більшому масштабі на рис.4.7, б.

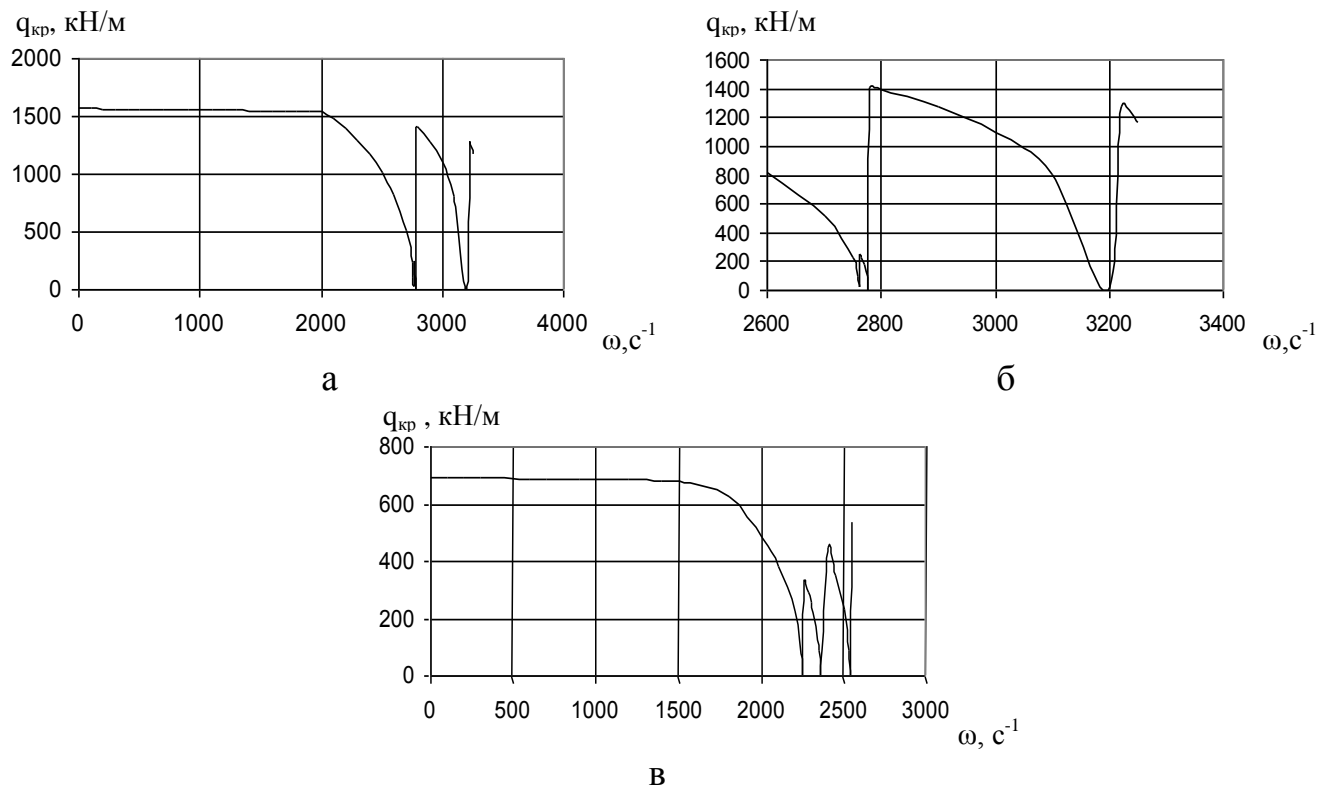


Рис.4.7. Залежність критичного значення динамічного навантаження від частоти при $R = 0,2$ м, $L = 0,48$ м: $h = 0,0015$ м (а, б), $h = 0,001$ м (в).

На другому етапі досліджена стійкість вимушених усталених коливань циліндричної оболонки зі сталими геометричними параметрами: $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м і варіюванні її висоти $L = [0,48; 0,72; 0,96]$ м в області її перших трьох

частот власних коливань. Значення нижчих частот, підрахованих за методикою (розділ 3), власних коливань циліндричної оболонки з відповідними геометричними параметрами $R=0,2$ м і $h=0,002$ м при різних параметрах висоти $L=[0,48;0,72;0,96]$ м представлені в табл. 4.1.

Критичні значення $q_{кр}$ динамічного навантаження, а також кількості півхвиль в коловому напрямку n , які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості коливань оболонки з $h=0,002$ м, $R=0,2$ м для випадків: $L=0,48$ м, $L=0,72$ м, $L=0,96$ м при відповідних частотах усталеного руху, наведені в таб.4.3.

Таблиця 4.3.

Критичні значення навантаження $q_{кр}$ (кН/м) при відповідних частотах коливань ω (с⁻¹)

h=0,002м			R=0,2 м			L=0,48 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	8	2800,05	2500	5	2350,05	3090	6	1800,05	3360	4	1700,05
100	8	2800,05	2800	5	1700,05	3100	6	1800,05	3370	4	1650,05
300	8	2800,05	3000	5	950,05	3150	6	1600,05	3390	4	1550,05
500	8	2800,05	3010	5	900,05	3160	6	1600,05	3400	4	1500,05
700	8	2850,05	3030	5	750,05	3180	6	1500,05	3450	4	1150,05
1000	8	2850,05	3050	5	600,05	3200	6	1400,05	3500	4	700,05
1400	8	2800,05	3060	5	500,05	3330	6	500,05	3520	4	400,05
1700	8	2750,05	3070	5	350,05	3340	6	350,05	3528	4	0,05
2000	8,9	2750,05	3080	5	100,05	3347	6	100,05	3550	7	2550,05
2300	5	2600,05	3081	5	0,05	3348	6	0,05	3600	7	2500,05
h=0,002 м			R=0,2 м			L=0,72 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	9	1820,005	1400	9	1785,005	2220	5	465,005	2460	6	1695,005
100	9	1820,005	1800	4	1415,005	2230	5	355,005	2500	6	1680,005
200	9	1820,005	2000	4	825,005	2240	5	190,005	2600	3	1575,005
300	9	1820,005	2050	4	560,005	2245	5	0,005	2700	3	845,005
400	9	1815,005	2080	4	305,005	2250	9	1725,005	2720	3	590,005
600	9	1815,005	2092	4	50,005	2300	9	1720,005	2730	3	405,005
800	9	1810,005	2100	5	1095,005	2400	9	1715,005	2738	3	0,005
1000	9	1800,005	2200	5	625,005	2420	9	1710,005	2740	6	1490,005
1200	9	1795,005	2210	5	550,005	2440	6	1705,005	2750	6	1470,005

h=0,002 м			R=0,2 м			L=0,96 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	15	1080,005	1000	15	1065,005	1575	4	0,005	1784	15	1025,005
100	15	1080,005	1200	15	1055,005	1580	15	1040,005	1800	15	1025,005
200	15	1080,005	1400	4	935,005	1600	15	1040,005	1900	5	1005,005
300	15	1080,005	1500	4	630,005	1700	3	845,005	2000	5	275,005
400	15	1080,005	1550	4	365,005	1750	3	535,005	2007	5	0,005
600	15	1075,005	1560	4	280,005	1760	3	445,005	2050	15	1010,005
800	15	1070,005	1570	4	150,005	1783	3	0,005	2100	15	1005,005

Рисунок 4.8 демонструє залежності критичних значень $q_{кр}$ динамічного навантаження від частоти коливань ω циліндричних оболонок з сталими геометричними параметрами $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м для випадків: $L = 0,48$ м (рис.4.8, а), $L = 0,72$ м (рис. 4.8, б), $L = 0,96$ м (рис. 4.8, в).

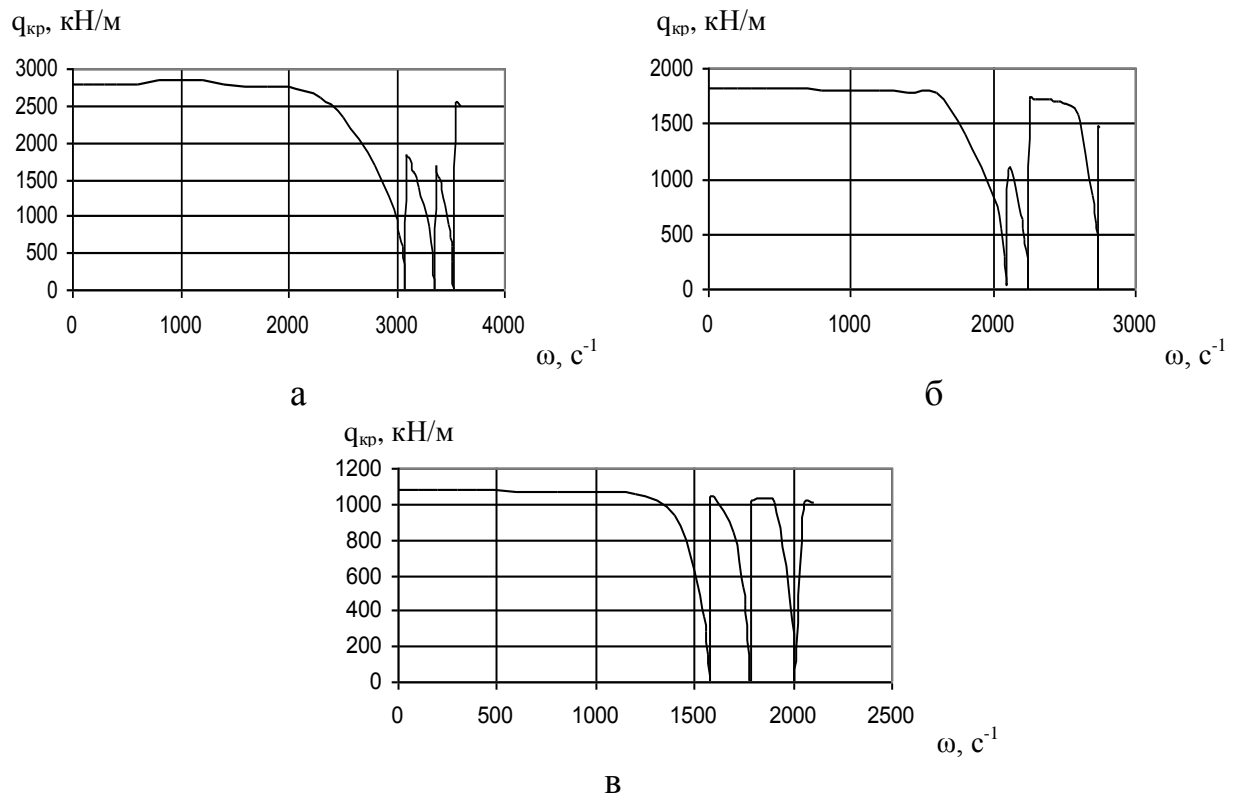


Рис.4.8. Залежність критичного значення динамічного навантаження від частоти при значеннях параметрів оболонки $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м: $L = 0,48$ м (а), $L = 0,72$ м (б), $L = 0,96$ м (в).

Чисельне дослідження стійкості вимушених коливань циліндричної оболонки з геометричними параметрами: $h=0,002$ м, $L=0,72$ м і варіюванні її радіуса $R=[0,2;0,4;0,8]$ м проведено в області перших трьох частот власних коливань циліндричної оболонки.

Значення нижчих частот власних коливань циліндричної оболонки зі сталими геометричними параметрами $L=0,72$ м і $h=0,002$ м при різних параметрах радіуса $R=[0,2;0,4;0,8]$ м представлені в табл. 4.1.

Визначені критичні значення $q_{кр}$ динамічного навантаження та форми втрати стійкості при частотах ω усталених коливань циліндричної оболонки з $h=0,002$ м, $L=0,72$ м для випадків: $R=0,2$ м, $R=0,4$ м, $R=0,8$ м. Отримані результати обчислень наведені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Критичні значення навантаження $q_{кр}$ (кН/м) при відповідних частотах коливань ω (с⁻¹)

h=0,002 м			R=0,2 м			L=0,72 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	9	1820,01	1400	9	1785,005	2220	5	465,005	2460	6	1695,005
100	9	1820,01	1600	4,9	1775,005	2230	5	355,005	2500	6	1680,005
200	9	1820,01	1800	4	1415,005	2240	5	190,005	2600	3	1575,005
300	9	1820,005	2000	4	825,005	2245	5	0,005	2700	3	845,005
400	9	1815,005	2050	4	560,005	2250	9	1725,005	2720	3	590,005
600	9	1815,005	2080	4	305,005	2300	9	1720,005	2730	3	405,005
800	9	1810,005	2092	4	50,005	2400	9	1715,005	2738	3	130,005
1000	9	1800,005	2200	5	625,005	2420	9	1710,005	2740	6	1490,005
1200	9	1795,005	2210	5	550,005	2440	6	1705,005	2750	6	1470,005
h=0,002 м			R=0,4 м			L=0,72 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	12,13	930,005	1100	7	890,005	1482	8	490,005	1563	6	230,005
100	12,13	930,005	1200	7	795,005	1485	8	485,007	1565	6	220,005
200	12,13	930,005	1300	7	660,005	1490	8	470,005	1570	6	175,005
400	12,13	930,005	1400	7	455,005	1500	8	435,005	1579,5	6	0,005
600	13	930,005	1450	7	299,005	1550	8	200,005	1580	9	820,005
700	12,13	925,005	1460	7	240,005	1560	8	90,005	1600	9	800,005
900	12,13	920,005	1480	7	60,005	1562,5	8	17,005			
1000	12,13	920,005	1481,5	7	0,005	1562,6	8	0,005			

h=0,002 м			R=0,8 м			L=0,72 м					
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	15	465,005	1000	11	205,005	1044,7	12	50,005	1070	10	140,005
100	15	465,005	1010	11	185,005	1045	12	50,005	1080	10	95,005
200	15	465,005	1020	11	155,005	1046	12	35,005	1085	10	55,005
300	15	465,005	1040	11	70,005	1047	12	15,005	1086	10	35,005
400	14,15	465,005	1042	11	55,005	1047,5	12	0,005	1087	10	35,005
600	15	460,005	1043	11	50,005	1048	10	205,005	1088	13	35,005
700	12-15	460,005	1044	11	25,005	1049	10	205,005	1090	13	270,005
800	12	425,005	1044,5	11	15,005	1050	10	200,005			
900	11	350,005	1044,6	11	0,005	1060	10	175,005			

Рис. 4.9 і 4.10 відображає залежності $q_{кр}$ від частоти коливань циліндричних оболонок ω з геометричними параметрами: $h = 0,002$ м, $L = 0,72$ м. При цьому R набуває значень: $R = 0,2$ м (рис. 4.9, а), $R = 0,4$ м (рис. 4.9, б в), $R = 0,8$ м (рис. 4.10, а б).

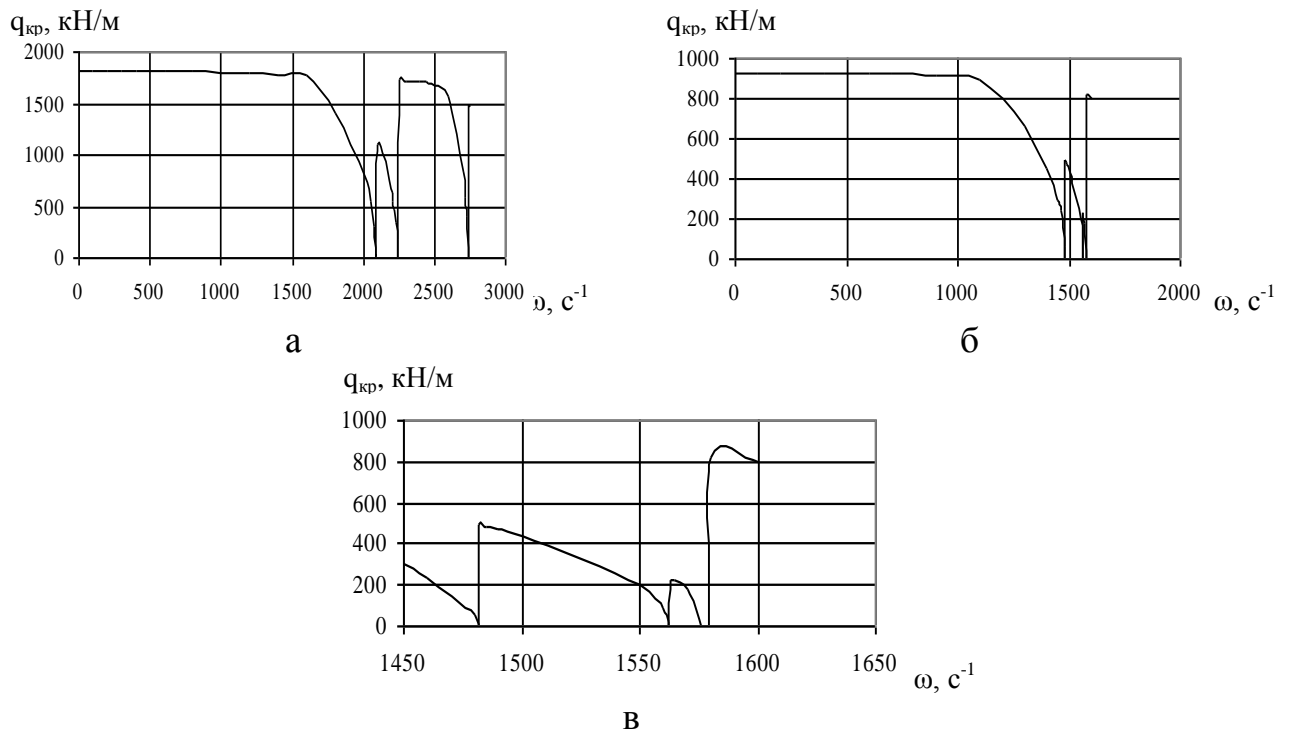


Рис.4.9. Залежність критичного значення динамічного навантаження від частоти при $h = 0,002$ м, $L = 0,72$ м: $R = 0,2$ м (а), $R = 0,4$ м (б, в).

Оскільки значення власних частот в деяких частотних зонах є дуже близькими (рис. 4.9, б і рис. 4.10, а), вони приведені в більшому масштабі на рис. 4.9, в і рис. 4.10, б.

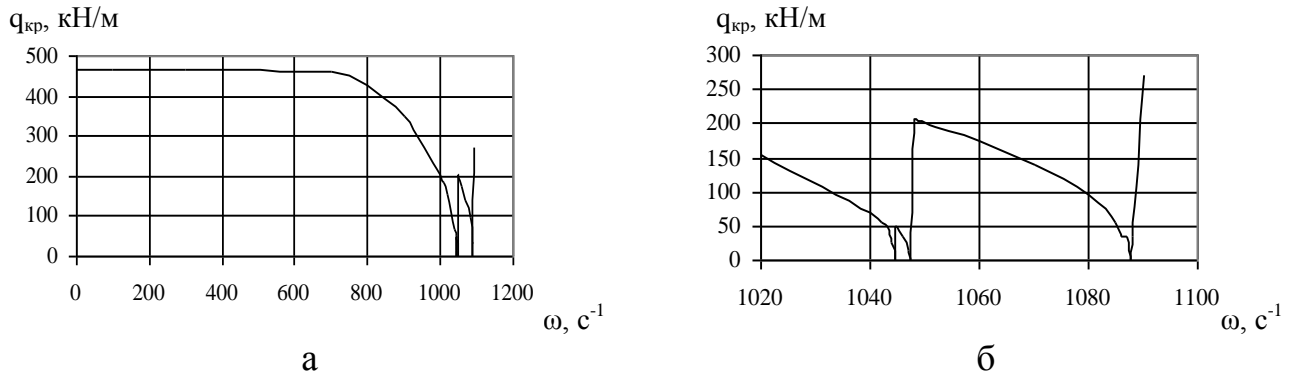


Рис.4.10. Залежність критичного значення динамічного навантаження від частоти при $h=0,002$ м, $L=0,72$ м: $R=0,8$ м (а, б).

В табл. 4.3, 4.5, 4.7 існують області частот коливань, при яких критичні значення $q_{кр}$ амплітуд навантаження наближаються до нуля. На відповідних залежностях критичних навантажень від частоти вимушених коливань (рис. 4.6, рис. 4.7, рис. 4.8, рис. 4.9, рис. 4.10), існують зони, в яких зазначені криві перетинають вісь частот. Втрата стійкості в таких станах набуває резонансного характеру, а значення частот відповідають власним частотам вільних коливань.

З ціллю порівняння результатів дослідження динамічної стійкості розглянутих циліндричних оболонок з різними геометричними параметрами на рис. 4.11, рис. 4.12 і рис. 4.13 відображені залежності величин критичного динамічного навантаження $q_{кр}$ від частоти ω вимушених коливань в прийнятому діапазоні її зміни і форми втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль n в коловому напрямку оболонки.

Рис. 4.11 демонструє залежності $q_{кр} - \omega$ для циліндричної оболонки з сталими геометричними параметрами $h=0,002$ м, $R=0,2$ м для випадків: $L=0,48$ м (крива 1), $L=0,72$ м (крива 2), $L=0,96$ м (крива 3).

На рис. 4.12 відображені залежності критичного динамічного навантаження від частоти вимушених коливань для оболонки з $R=0,2$ м, $L=0,48$ м, коли

товщина оболонки $h=0,004$ м (крива 1), $h=0,002$ м, (крива 2), $h=0,001$ м (крива 3).

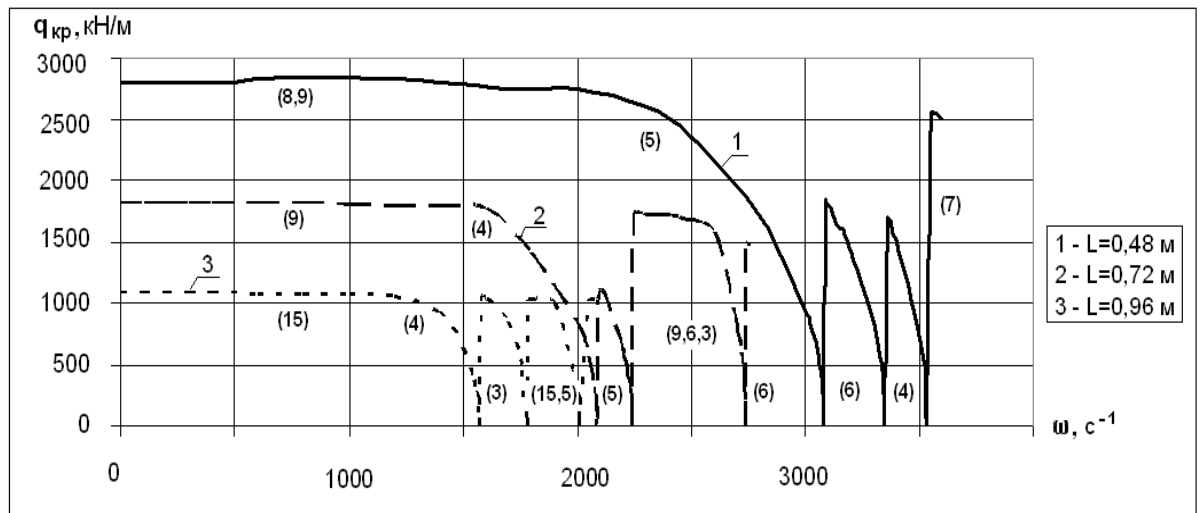


Рис. 4.11. Залежність критичного навантаження від частоти при змінній висоті.

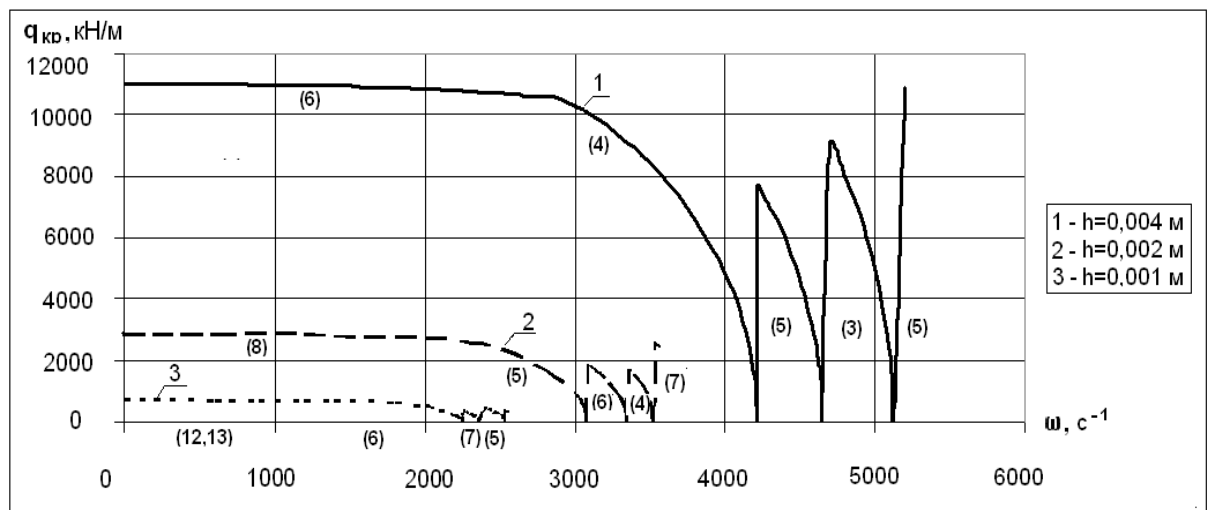


Рис. 4.12. Залежність критичного навантаження від частоти при змінній товщині.

Рис. 4.13 демонструє залежність критичного динамічного навантаження $q_{кр}$ від частоти вимушених коливань ω для циліндричної оболонки з геометричними параметрами $h=0,002$ м, $L=0,72$ м для випадків $R=0,2$ м (крива 1), $R=0,4$ м (крива 2), $R=0,8$ м (крива 3).

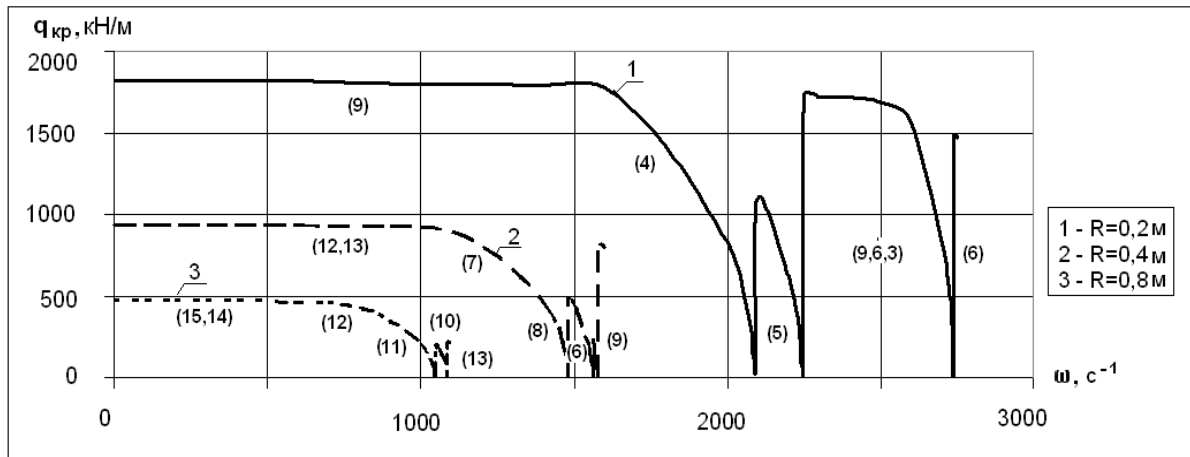


Рис. 4.13 Залежність критичного навантаження від частоти при змінному радіусі.

Вплив геометричних параметрів оболонки на стійкість вимушених усталених нелінійних коливань оцінено за критичними значеннями динамічного навантаження $q_{кр}$ та формами втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль n в коловому напрямку оболонки (рис. 4.11, рис. 4.12, рис. 4.13).

В початковому діапазоні частот збурення критичні значення періодичного навантаження більші за критичне значення статичного навантаження, яке є сталою величиною і не залежить від частоти збурення. Розглянемо для прикладу рис. 4.11 (криву 1): втрата динамічної стійкості відбувається спочатку по шостій, потім по десятій формі власних коливань оболонки з відповідною кількістю півхвиль в коловому напрямку (вісім та дев'ять) і двома півхвилями вздовж твірної. При подальшому збільшенні частоти збурення до перетину кривою 1 осі частот на значенні, яке відповідає першій частоті власних коливань оболонки (резонансний характер втрати стійкості), форма втрати стійкості співпадає з першою формою власних коливань оболонки. На частотах збурення, які лежать між резонансними втратами стійкості, оболонка деформується по другій та третій формах власних коливань (рис. 3). На даних частотах збурення спостерігається одна півхиля вздовж твірної.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що критичні навантаження і нижчі власні частоти зменшуються: при збільшенні висоти

оболонки та при $h/R = const$ (рис. 4.11); при зменшенні товщини та при фіксованих значеннях радіуса R та висоти L циліндричної оболонки (рис. 4.12); при збільшенні радіуса оболонки і при однакових значеннях товщини h та висоти L оболонки (рис. 4.13). Втрата стійкості оболонок відбувається по циклічно-симетричним формам. Найбільш чутливі оболонки – найвищі, найтонші та оболонки з найбільшим радіусом. Збіжність розв'язку перевірялась перерахунком задачі зі зменшенням кінцево-різницевого інтервалів по координаті x^2 та величини кроку по параметру навантаження. Достатня точність досягнута при 45 кінцево-різницевого вузлів.

4.2.2. Стійкість усталених вимушених коливань конічних оболонок

В геометрично нелінійній постановці досліджувалась стійкість вимушених нелінійних усталених коливань конічних оболонок при дії рівномірно розподіленого поздовжнього гармонічного навантаження виду $q = q_1 \cos \omega t$, фіксованої частоти ω і при збільшенні амплітуди q_1 навантаження.

Для дослідження впливу геометричних параметрів на стійкість усталених нелінійних вимушених коливань тонких оболонок при дії поздовжнього періодичного навантаження $q = q_1 \cos \omega t$, розглянута тонка пружна конічна оболонка. Радіуси оболонки задавалися сталими $r = 0,15$ м та $R = 0,2$ м, змінювалась товщина $h = [0,001; 0,002]$ м і висота $L = [0,48; 0,72]$ м оболонки, механічні характеристики приймалися рівними: $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\gamma = 7800$ кг/м³, $\mu = 0,3$. Нижній край оболонки жорстко закріплений, на верхньому краю задано ковзне кріплення вздовж твірної. Поверхня конічної оболонки в параметричному вигляді описується рівнянням (4.2). Чисельне дослідження стійкості вимушених коливань конічної оболонки при варіюванні її геометричних параметрів проведено в області перших трьох частот власних коливань оболонки.

Значення нижчих частот власних коливань конічної оболонки з відповідними геометричними параметрами представлені в табл. 4.5.

Таблиця 4.5

Нижчі частоти власних коливань конічної оболонки

h=0,002 м R=0,2 м r=0,15 м			
Висота оболонки L, м	ω, c^{-1}		
	ω_1	ω_2	ω_3
0,48	3438	3545	4099
0,72	2274	2667	2763
R=0,2 м r=0,15 м L=0,48 м			
Товщина оболонки L, м	ω, c^{-1}		
	ω_1	ω_2	ω_3
0,001	2501	2555	2858
0,002	3438	3545	4099

На першому етапі досліджена стійкість вимушених усталених коливань конічної оболонки зі сталими геометричними параметрами: $h = 0,002$ м, $r = 0,15$ м, $R = 0,2$ м та висотою, яка приймала значення $L = 0,48$ м. і $L = 0,72$ м.

В табл. 4.6. наведені критичні значення $q_{кр}$ навантаження при відповідних частотах ω коливань конічних оболонок, а також кількості півхвиль в коловому напрямку n , які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості.

Таблиця 4.6

Критичні значення навантаження $q_{кр}$ (кН/м) при відповідних частотах коливань ω (c^{-1})

h=0,002 м			R=0,2 м			r=0,15 м			L=0,48 м		
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	9	3650,045	3000	5	2700,045	3520	4	675,045			
500	9	3650,045	3100	5	2385,045	3545	4	0,045			
700	9	3645,045	3200	5	2025,045	3600	6	3375,045			
800	9	3645,045	3400	5	855,045	3650	6	3300,045			
1000	8,9	3645,045	3410	5	720,045	3800	6	2925,045			
1400	8,9	3645,045	3438	5	0,045	4000	6	1800,045			
1700	9	3600,045	3450	4	1350,045	4099	6	0,045			
2300	9	3555,045	3500	4	945,045	4090	6	540,045			
2500	8,9	3555,045	3510	4	810,045	4080	6	810,045			

		h=0,002 м			R=0,20 м	r=0,15 м			L=0,72 м
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	
0	10-14	2300,025	2000	4	1700,025	2650	3	600,025	
100	10-14	2300,025	2200	4	925,025	2667	3	0,025	
300	9	2300,025	2250	4	525,025	2670	5	1375,025	
500	9-14	2300,025	2274	4	0,025	2680	5	1300,025	
700	9-14	2300,025	2300	9-15	2275,025	2700	5	1125,025	
1000	9-14	2300,025	2400	3	2250,025	2750	5	525,025	
1400	10-15	2300,025	2500	3	1825,025	2760	5	250,025	
1700	12,13	2275,025	2600	3	1175,025	2763	5	0,025	

В табл. 4.7 наведені результати обчислень критичних значень $q_{кр}$ навантаження і кількості півхвиль в коловому напрямку n для конічних оболонок з геометричними параметрами: $r = 0,15$ м, $R = 0,2$ м, $L = 0,48$ м при відповідних значеннях частоти ω . Товщина оболонки h приймала значення $0,001$ м та $0,002$ м.

Таблиця 4.7

Критичні значення навантаження $q_{кр}$ (кН/м) при відповідних частотах коливань ω (с⁻¹)

		h=0,001 м				R=0,2 м		r=0,15 м				L=0,48 м		
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	12	880,01	1700	9	880,01	2540	5	170,01	2750	7	530,01			
100	12	880,01	2000	6	840,01	2550	5	100,01	2800	7	400,01			
300	12	880,01	2300	6	570,01	2555	5	0,01	2840	7	230,01			
500	12	880,01	2500	6	50,01	2570	7	810,01	2850	7	160,01			
700	12	880,01	2501	6	0,01	2580	7	800,01	2858	7	0,01			
1000	12	880,01	2510	5	290,01	2600	7	780,01						
1400	8,9	880,01	2520	5	250,01	2700	7	630,01						
		h=0,002 м				R=0,2 м		r=0,15 м				L=0,48 м		
ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$	ω	n	$q_{кр}$
0	9	3650,05	2500	8,9	3555,05	3450	4	1350,05	3800	6	2925,04			
500	9	3650,05	3000	5	2700,05	3500	4	945,05	4000	6	1800,04			
700	9	3645,05	3100	5	2385,05	3510	4	810,05	4080	6	810,04			
1000	9	3645,05	3200	5	2025,05	3520	4	675,05	4090	6	540,04			
1400	9	3645,05	3400	5	855,05	3545	4	0,05	4099	6	0,05			
1700	9	3600,05	3410	5	720,05	3600	6	3375,05						
2300	9	3555,05	3438	5	0,05	3650	6	330,05						

Залежності критичних значень $q_{кр}$ динамічного навантаження, що періодично змінюється з часом, від частоти ω коливань конічних оболонок з геометричними параметрами: $h=0,002$ м, $r=0,15$ м, $R=0,2$ м відображені на рис. 4.14. При цьому L набуває значень: $L=0,48$ м (рис. 4.14, а); $L=0,72$ м (рис. 4.14, б).

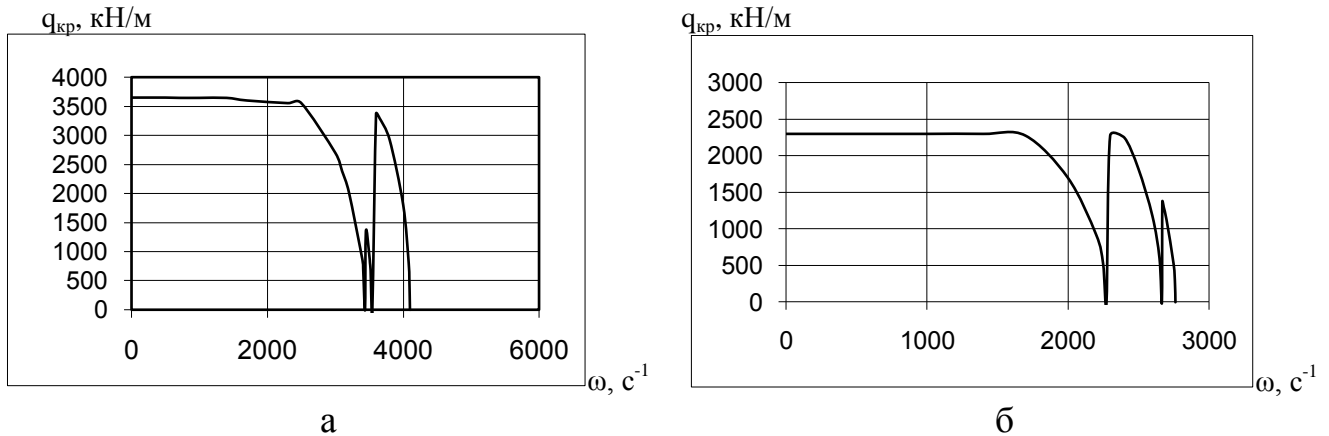


Рис. 4.14. Залежність критичного навантаження від частоти для конічної оболонки: $h=0,002$ м, $R=0,2$ м, $r=0,15$ м, $L=0,48$ м (а) та $L=0,72$ м (б).

Рисунок 4.15 демонструє залежності $q_{кр}-\omega$ для оболонки з $L=0,48$ м, $r=0,15$ м, $R=0,2$ м для випадків: $h=0,001$ м (рис. 4.15, а), $h=0,002$ м (рис. 4.15, б).

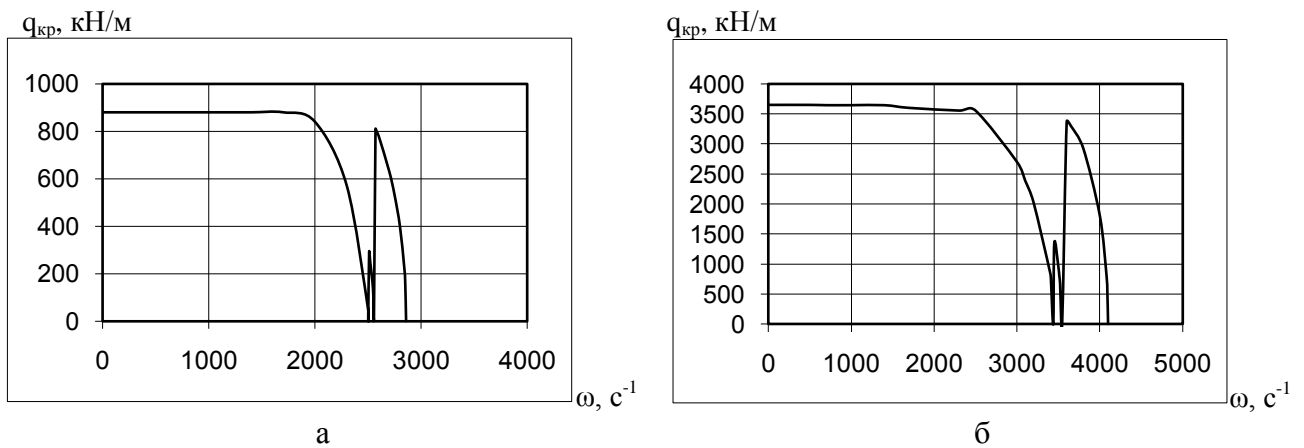


Рис. 4.15. Залежність критичного навантаження від частоти для конічної оболонки: $r=0,15$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м, $h=0,001$ м (а) і $h=0,002$ м (б).

В табл. 4.7 і табл. 4.8 бачимо, що існують частоти коливань конічної оболонки, при яких критичні значення $q_{кр}$ навантаження наближаються до нуля. На відповідних залежностях (рис. 4.14, рис. 4.15) існують частоти зовнішнього навантаження, в яких зазначені криві перетинають вісь частот. Значення таких частот відповідають власним частотам вільних коливань і характеризують втрату стійкості усталених вимушених коливань конічної оболонки.

З ціллю порівняння результатів дослідження динамічної стійкості розглянутих конічних оболонок з різними геометричними параметрами на рис. 4.16, рис. 4.17 відображені залежності величин критичного динамічного навантаження $q_{кр}$ від частоти ω вимушених коливань в прийнятому діапазоні її зміни і форми втрати стійкості з визначенням кількості півхвиль n в коловому напрямку оболонки.

Рис. 4.16 демонструє залежність $q_{кр} - \omega$ для конічних оболонок з геометричними параметрами $h = 0,002$ м, $r = 0,15$ м, $R = 0,2$ м для випадків $L = 0,48$ м (крива 1), $L = 0,72$ м (крива 2).

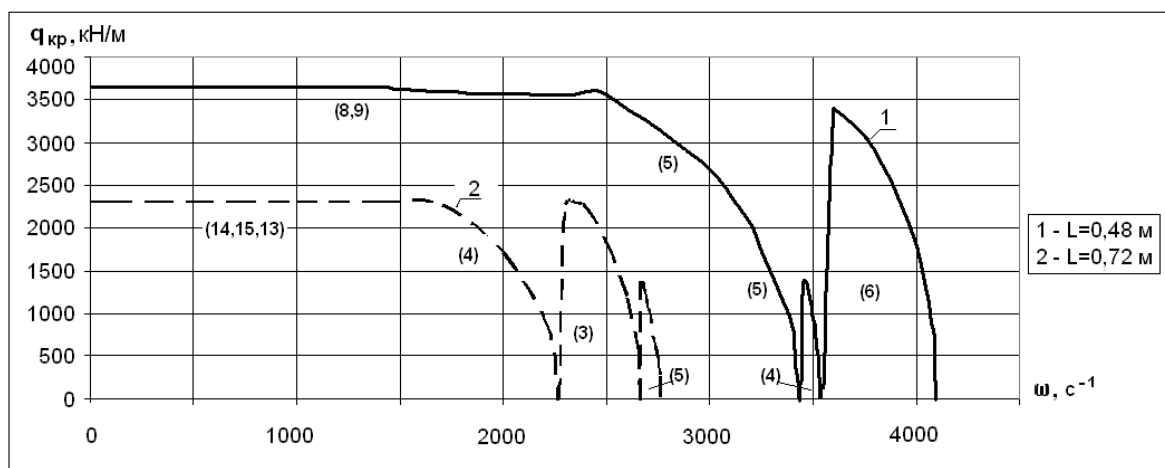


Рис. 4.16. Залежність критичного навантаження від частоти для конічної оболонки при змінній висоті L і сталих $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м, $r = 0,15$ м.

На рис. 4.17 відображені залежності для оболонки з $r = 0,15$ м, $R = 0,2$ м, $L = 0,48$ м, коли товщина оболонки $h = 0,002$ м, (крива 1), $h = 0,001$ м (крива 2).

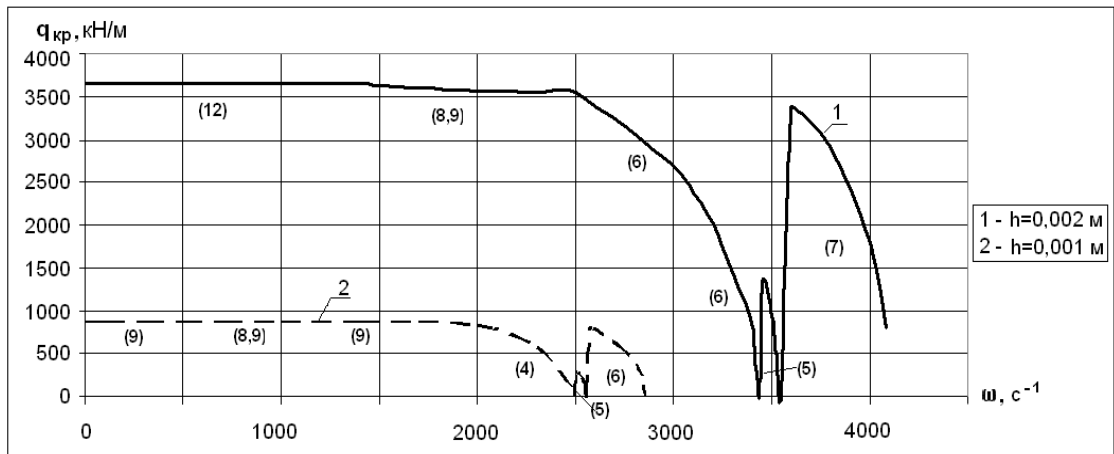


Рис. 4.17. Залежність критичного навантаження від частоти для конічної оболонки при змінній товщині h і сталей $L=0,48$ м, $R=0,2$ м, $r=0,15$ м.

Втрата стійкості конічної оболонки набуває резонансного характеру при перетині осі частот кривими на значеннях, які відповідають частотам власних коливань, форми втрати стійкості співпадають з формами власних коливань конічної оболонки (рис 4.3). Існує початковий діапазон частот збурення, в якому критичні значення періодичного навантаження більші за критичне значення статичного навантаження, при цьому форма втрати стійкості не співпадає з першою формою власних коливань оболонки.

Дослідження показали, що при сталих значеннях товщини і радіусів оболонки ($h, r, R = const$) збільшення її висоти призводить до пониження амплітуди критичного навантаження і частот власних коливань оболонки (рис. 4.16). При фіксованих значеннях радіусів та висоти конічної оболонки ($L, r, R = const$) збільшення її товщини підвищує значення нижчих частот власних коливань і критичних навантажень оболонки (рис. 4.17). Втрата стійкості розглянутих оболонок відбувається по циклічно симетричним формам.

Представлена чисельна методика дозволила дослідити вплив геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних і конічних оболонок при дії періодичних за часом рівномірно розподілених поздовжніх навантажень. Виявлено особливості коливального руху та форм втрати стійкості циліндричних і конічних оболонок. Визначено критичні значення поздовжніх

навантажень. Досліджена залежність критичних значень інтенсивності навантажень від частоти усталених коливань при варіюванні геометричних параметрів оболонок.

4.3. Дослідження динамічної стійкості однополого гіперболоїда при дії повздовжнього періодичного навантаження.

Оцінена стійкість нелінійних коливань тонкого пружного сталевого однополого гіперболоїда, геометричні і механічні параметри якого приймалися такими: $h=0,002$ м, $r=0,15$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м, $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\gamma=7800$ кг/м³, $\mu=0,3$. Оболонка жорстко закріплена на нижньому краю, на верхньому – задано ковзне кріплення вздовж твірної. До верхнього краю оболонки прикладено повздовжнє періодичне параметричне навантаження $q = q_0 + q_1 \cos \omega t$, де q_0, q_1 – статична і динамічна складові навантаження відповідно. В роботі не враховано розповсюдження поздовжніх періодичних хвиль в оболонці ($q_1=0$). Втрата стійкості оцінена за нижчим критичним значенням статичної складової динамічного навантаження q_0 , коли перша частота власних коливань оболонки дорівнює нулю.

В розділі 4.1 на рис. 4.4 представлені п'ять перших частот і форм власних коливань гіперболоїда, які були порівняні з результатами розрахунку методом скінченних елементів.

Дослідження динамічної стійкості однополого гіперболоїда в комплексі криволінійних сіток виконано у два етапи. Спочатку виконано статичний нелінійний розрахунок від статичної складової динамічного навантаження q_0 для визначення напружено-деформованого стану оболонки. Далі розв'язана задача на власні значення згідно наведеної в розділі 3.1 методики для визначення частот і форм власних коливань оболонки з урахуванням статичної складової динамічного навантаження q_0 (табл. 4.8).

**Частоти власних коливань оболонки $\tilde{\nu}_i$ (Гц)
при дії статичної складової повздожнього навантаження**

Номер частоти ν_1	Статична складова осьового навантаження q_0 , кН/м								
	0	3180	4450	5010	5155	5220	5260	5270	5271,21
1	669,32	471,15	308,04	151,32	125,13	91,72	34,06	20,84	8,45
2	709,29	486,60	360,34	288,74	280,55	272,11	263,40	262,51	262,06
3	761,74	615,23	490,06	373,90	360,12	345,77	330,78	329,24	328,47
4	953,06	660,98	572,75	550,15	547,84	545,51	543,17	542,94	542,82
5	1008,08	916,35	770,55	683,77	674,38	664,84	655,15	654,17	653,68

На рис. 4.18 представлені залежності перших п'яти частот власних коливань від дії статичної складової параметричного навантаження q_0 .

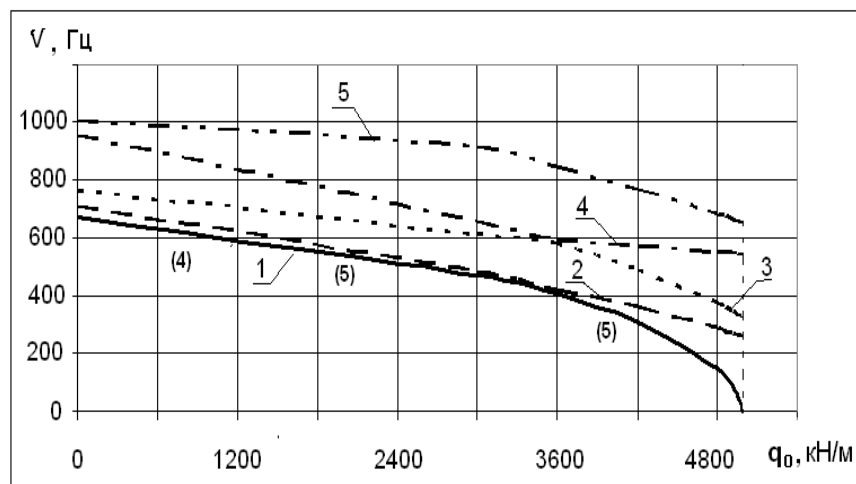
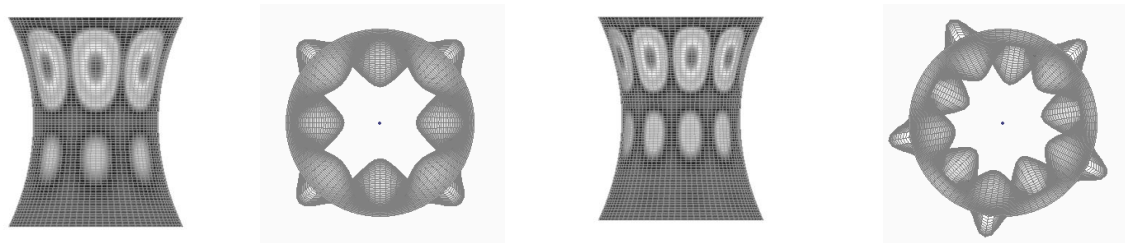


Рис. 4.18. Вплив статичної складової поздовжнього навантаження на частоти (1–першу, 2–другу, 3–третю, 4–четверту, 5–п'яту) власних коливань оболонки.

Втрата стійкості гіперболоїда відбулась при $q_{0cr} = 5271,21$ кН/м ($\nu_1 = 0$). Форма деформування оболонки в діапазоні навантаження $q_0 = [0 \div 2100,08]$ кН/м мала чотири півхвилі в коловому напрямку і дві півхвилі вздовж твірної, в подальшому до втрати стійкості спостерігалися п'ять півхвиль в коловому напрямку оболонки і дві півхвилі вздовж твірної (рис. 4.19).



$$q_0 = [0 \div 2100,08] \text{кН/м}$$

$$q_0 = [2100,08 \div 5271,21] \text{кН/м}$$

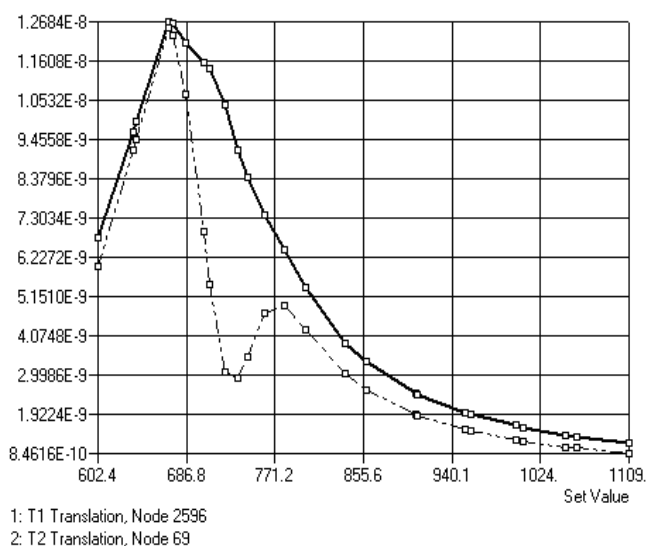
Рис. 4.19. Форми деформування гіперboloїда при дії статичної складової динамічного навантаження q_0 .

Для підтвердження достовірності нижчого критичного значення статичної складової динамічного навантаження q_{0cr} виконано його порівняння з результатом, отриманим методом скінченних елементів в програмному комплексі NASTRAN. Скінченно-елементна модель однополого гіперboloїда містила 6480 вузлів та 6400 плоских прямокутних оболонкових скінченних елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі. Повздожнє навантаження прикладалось до вузлів верхньої кромки оболонки. Дослідження виконувалось в два етапи: спочатку розв'язувалась нелінійна задача статички методом Ньютона-Рафсона від дії статичної складової динамічного навантаження q_0 , потім за допомогою метода Ланцоша визначалися частоти і форми власних коливань оболонки з урахуванням попередньо напружено-деформованого стану. Форми деформування оболонки співпали (рис. 4.19). Нижче критичне значення статичної складової динамічного навантаження менше за q_{0cr} на 12 % .

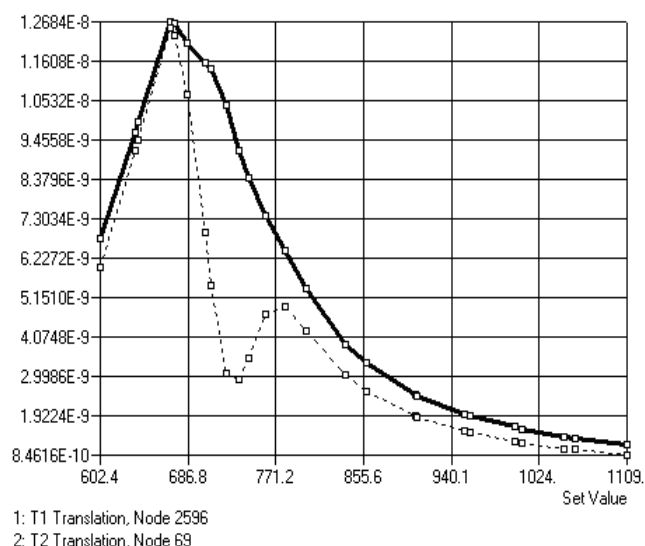
В роботі за допомогою методу скінченних елементів виконана перевірка достовірності частот власних коливань оболонки без ($q_0 = 0$) і при дії статичної складової повздожнього навантаження $q_0 = 5155 \text{кН/м}$ з урахуванням періодичного збурення $q_1 = 5100 \text{кН/м}$. Для цього виконано динамічний аналіз усталеного відгуку у вигляді переміщень вузлів оболонки в залежності від частоти періодичного збурення. Застосовано два методи розв'язання задачі: прямого частотного аналізу (Direct Frequency), в якому навантаження є синусоїдальною хвилею з першою частотою власних коливань оболонки;

модального частотного аналізу (Modal Frequency), який є аналогічним до попереднього, але з урахуванням десяти частот і форм власних коливань оболонки, отриманих в попередніх розрахунках (рис. 4.4). В розрахунках врахована нульова початкова фаза коливань та коефіцієнт конструкційного демпфірування 0,001. Резонансні частоти усталеного періодичного руху відповідають частотам власних коливань гіперболоїда.

На рис. 4.20 наведені криві залежності максимальних колових переміщень (мм) від частоти періодичного навантаження ν (Гц) при $q_0 = 0$ та $q_1 = 5100$ кН/м. для вузлів скінченно-елементної моделі гіперболоїда, які розташовані на протилежних сторонах оболонки і в яких спостерігались максимальні значення переміщень.



Direct Frequency



Modal Frequency

Рис. 4.20 Залежність максимальних колових переміщень (вісь ординат) для вузлів моделі гіперболоїда від частоти періодичного навантаження (вісь абсцис) при $q_0 = 0$ та $q_1 = 5100$ кН/м.

Видно, що перша резонансна частота коливань оболонки дорівнює першій частоті її власних коливань $\nu = \nu_1 = 669,32$ Гц, при цьому максимальні переміщення спостерігаються в двох вузлах моделі. При збільшенні частоти

збурення $\nu = \nu_2 = 709,29$ Гц максимальні відгуки спостерігались у вузлі 2596, при $\nu = 778,54$ ($\nu_3 = 761,74$) Гц – у вузлі 69. Отримані результати дослідження аналогічні при використанні двох методів розв’язання задачі.

На рис. 4.21 наведені криві залежності максимальних колових переміщень (мм) від частоти періодичного навантаження ν (Гц) при $q_0 = 5155$ кН/м та $q_1 = 5100$ кН/м для вузлів скінченно-елементної моделі гіперболоїда, які розташовані на протилежних сторонах оболонки і в яких спостерігались максимальні значення переміщень.

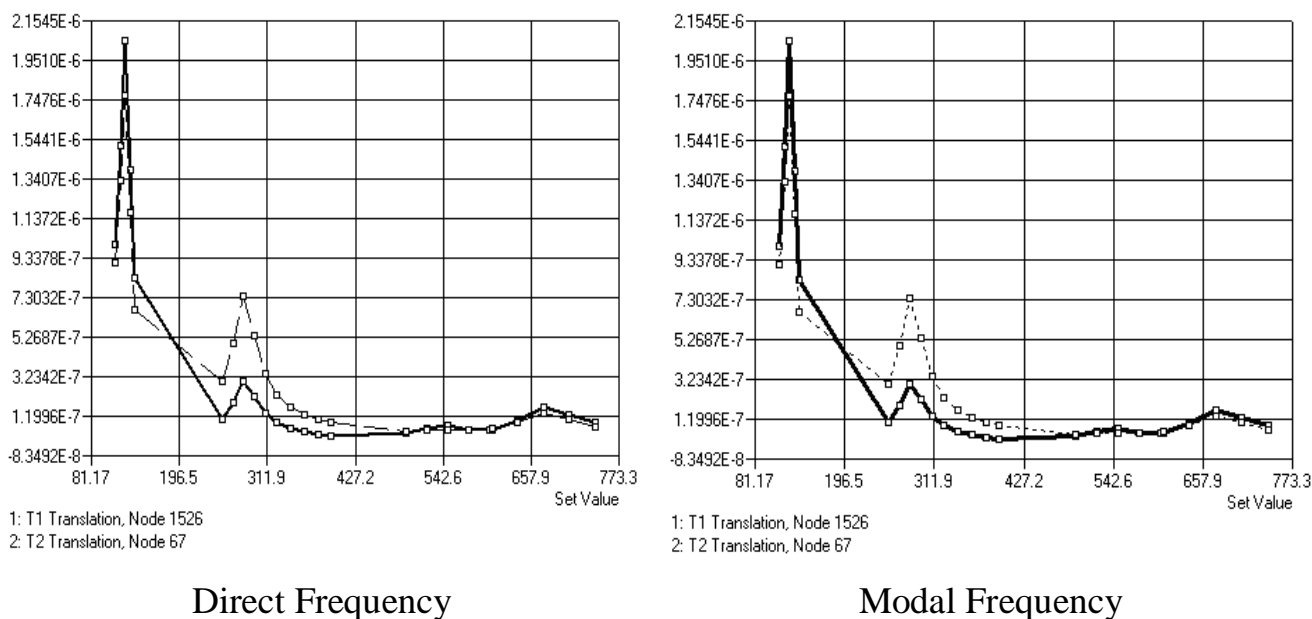


Рис. 4.21 Залежність максимальних колових переміщень (вісь ординат) для вузлів моделі гіперболоїда від частоти періодичного навантаження (вісь абсцис) при $q_0 = 5155$ кН/м та $q_1 = 5100$ кН/м

Бачимо, що максимальні переміщення спостерігаються у двох вузлах моделі оболонки при частоті зовнішнього періодичного збурення, яке дорівнює першій частоті власних коливань оболонки $\nu = \nu_1 = 125,13$ Гц. Резонансними є частоти: $\nu = [\nu_2, \nu_4, \nu_5] = [280,55; 547,84; 674,38]$ Гц. Ці результати співпадають з результатами, які представлені в табл. 4.8.

При виконанні прямого та модального частотного аналізу отримані аналогічні результати дослідження.

На теперішній час розроблене автором програмне забезпечення має обмеження до параметрів однополюх гіперболоїдів. З метою оцінки стійкості гіперболоїда з реальними геометричними параметрами (високого гіперболоїда) та для подальшого удосконалення програмного забезпечення програмного комплексу методу криволінійних сіток в роботі досліджена динамічна стійкість коливань високого гіперболоїда при дії поверхневого та повздовжнього навантаження за допомогою методу скінченних елементів, який реалізовано в програмному комплексі NASTRAN [103].

Геометричні і механічні параметри високого сталевого гіперболоїда приймалися такими: $h = 0,02$ м, $r = 20$ м, $R = 40$ м, $L = 160$ м, $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\gamma = 7800$ кг/м³, $\mu = 0,3$. Граничні умови: обмежені всі лінійні і кутові переміщення вузлів моделі оболонки на нижньому та верхньому контурах, крім лінійних вертикальних переміщень вузлів верхнього контуру.

Розглядалась окрема дія статичних складових поверхневого q_0 і повздовжнього P_0 динамічних навантажень без урахування періодичних складових навантажень ($q_1 = 0$, $P_1 = 0$). Динамічна втрата стійкості оболонки оцінена за критичним значенням навантаження, яке відповідає нульовому значенню нижчої частоти власних коливань оболонки.

Модальний аналіз високого гіперболоїда виконано методом Ланцоша. Спостерігалась різна кількість півхвиль в коловому напрямку та вздовж твірної оболонки. Спектр власних частот коливань оболонки щільний. На рис. 4.22 представлені перші чотири форми і частоти власних коливань високого гіперболоїда.

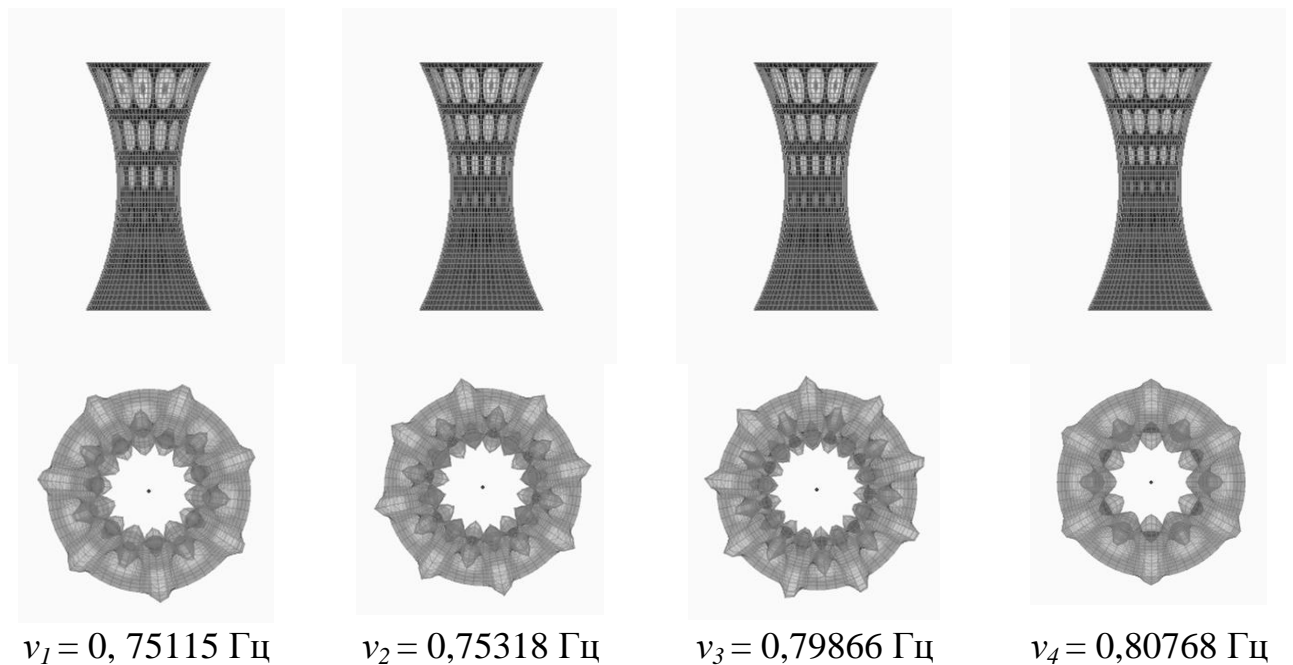


Рис. 4.22. Перші чотири форми власних коливань високого гіперболоїда

Частоти власних коливань оболонки, навантаженої постійною складовою поверхневого навантаження $q_0 = [100 - 2200] \text{ Па}$, представлені в табл. 4.9.

Таблиця 4.9

Частоти власних коливань оболонки $\tilde{\nu}_i$ (Гц)

при дії статичної складової поверхневого тиску

№ $\tilde{\nu}_i$	Постійна складова поверхневого тиску q_0 , Па						
	0	100	200	400	600	800	1000
1	0,75115	0,77252	0,75649	0,71619	0,66905	0,61379	0,56176
2	0,75318	0,78159	0,76042	0,72335	0,68861	0,63701	0,57663
3	0,79866	0,82589	0,81478	0,76138	0,70394	0,64909	0,6163
4	0,80768	0,84021	0,81515	0,79325	0,77072	0,70556	0,63178
5	0,87174	0,93355	0,90481	0,844367	0,77926	0,74476	0,72296
	1200	1400	1600	1750	1800	2000	2200
1	0,47005	0,42822	0,31511	0,15343	-0,0696	-0,3822	-0,6768
2	0,48602	0,44708	0,32823	0,22498	0,14116	-0,2995	0,29159
3	0,49740	0,45982	0,38259	0,22710	0,17750	0,36167	0,35439
4	0,55475	0,52191	0,39377	0,33528	0,27671	0,36171	0,59824
5	0,5675	0,54408	0,48199	0,33988	0,31326	0,58724	0,60142

Вплив статичної складової поверхневого навантаження на частоти власних коливань оболонки представлені на рис. 4.23.

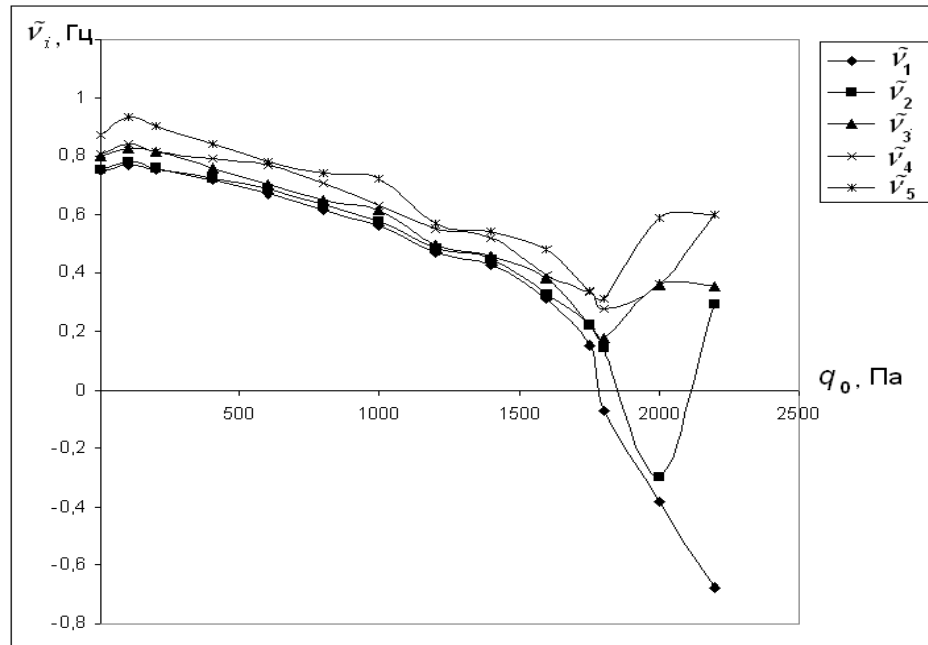


Рис. 4.23. Вплив статичної складової поверхневого навантаження на власні частоти коливань високого гіперболоїда.

Втрата стійкості високого гіперболоїда при дії поверхневого тиску відбулась по першій та другій формам власних коливань, при цьому критичні значення поверхневого тиску склали: $q_{cr} = [1766,24; 1876,95]$ Па. Частоти власних коливань оболонки з врахуванням постійної складової осьового навантаження $P_0 = [0,1 - 450]$ кН/вузол, прикладеної до кожного з 64 вузлів верхньої кромки оболонки, представлені в табл. 4.10.

**Частоти власних коливань оболонки $\tilde{\nu}_i$ (Гц)
при дії статичної складової повздожнього навантаження**

№ $\tilde{\nu}_i$	Постійна складова осьового навантаження P_0 , кН/вузол						
	0	0,1	1	10	50	100	150
1	0,75115	0,78816	0,78746	0,78038	0,74807	0,69574	0,63524
2	0,75318	0,80212	0,80125	0,79227	0,75104	0,70543	0,65987
3	0,79866	0,83643	0,83594	0,83104	0,80647	0,74290	0,67268
4	0,80768	0,86477	0,86376	0,85356	0,80884	0,78016	0,75031
5	0,87174	0,95413	0,95384	0,94943	0,89951	0,83225	0,75819
	200	250	300	350	370	400	450
1	0,56788	0,49081	0,38535	0,21238	0,00587	-2,3445	0,23830
2	0,59343	0,50084	0,39843	0,27573	0,19707	-1,4512	0,29468
3	0,61071	0,55699	0,46125	0,29812	0,20682	-0,2872	0,53545
4	0,67500	0,57878	0,49726	0,42899	0,39237	0,25827	0,57588
5	0,71916	0,68651	0,59519	0,46005	0,39833	0,34718	0,79066

Вплив статичної складової повздожнього навантаження на частоти власних коливань оболонки представлені на рис. 4.24 .

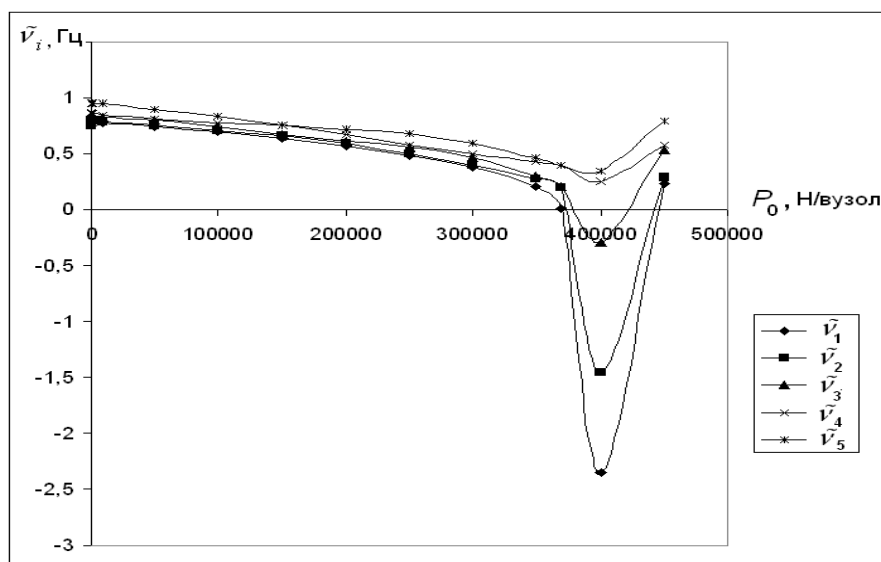


Рис. 4.24. Вплив статичної складової повздожнього навантаження на власні частоти коливань високого гіперboloїда.

При дії повздожнього навантаження (рис. 4.24) втрата динамічної стійкості оболонки відбувалася по першим трьом формам власних коливань з подальшим

виходом в стан рівноваги. Критичні значення поздовжнього навантаження склали $P_{cr} = [370,03; 379,12; 383,41]$ кН/вузол.

Дослідження показали, що частоти власних коливань високого гіперболоїда з урахуванням дії поверхневого тиску меншому за 200 Па (рис. 4.23) та поздовжнього навантаження меншому за 50 кН (рис. 4.24) більші за відповідні значення, що отримані для оболонки без урахування навантаження.

На рис. 4.25. представлено порівняльний аналіз частот (а) і кількості півхвиль в коловому напрямку (б) власних коливань циліндричної (1), конічної (2), гіперболічної (3) оболонок з однаковими параметрами: $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м, $r = 0,15$ м і $L = 0,48$ м.

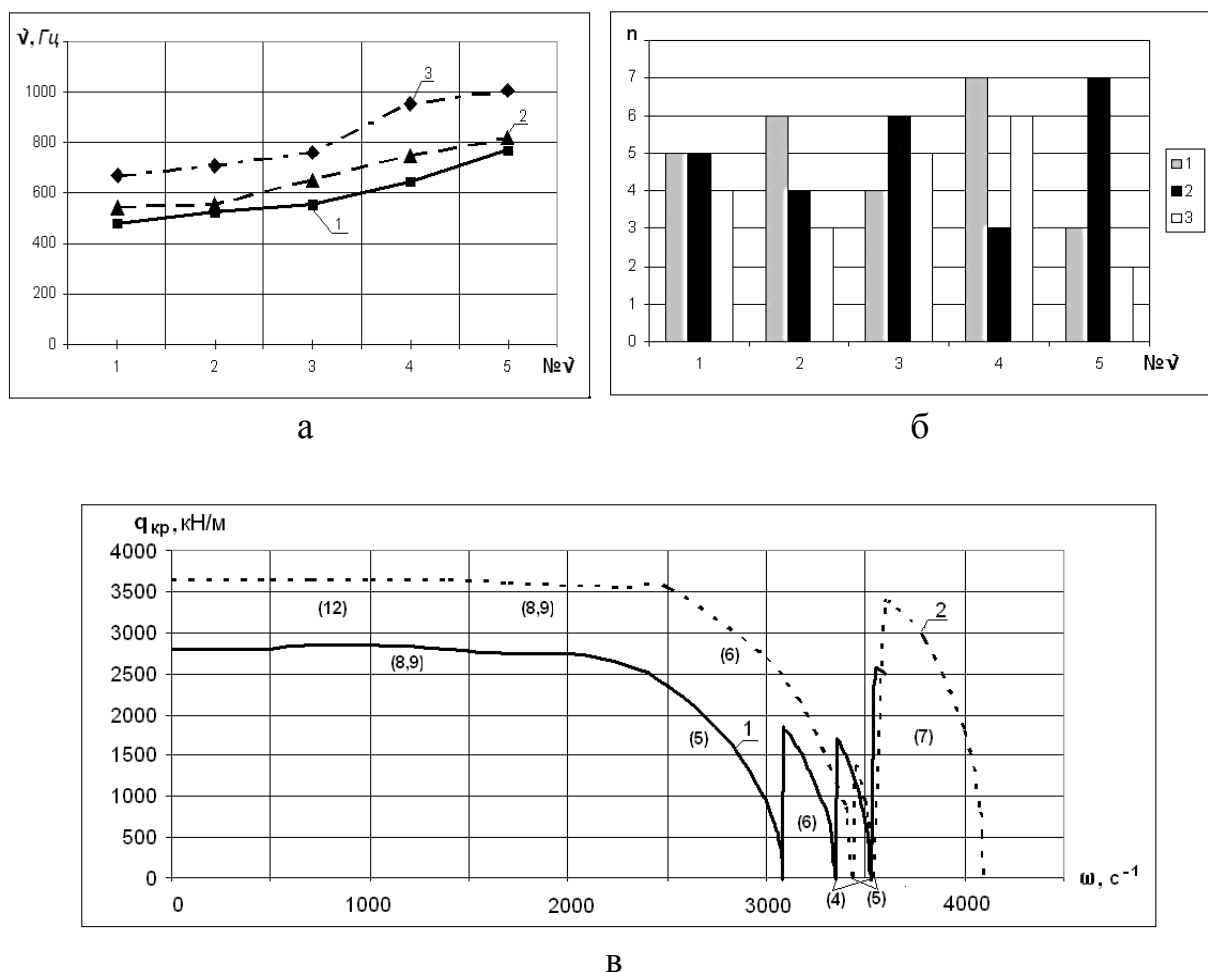


Рис. 4.25. Порівняльний аналіз циліндричної (1), конічної (2), гіперболічної (3) оболонок з однаковими параметрами: $h = 0,002$ м, $R = 0,2$ м, $r = 0,15$ м і $L = 0,48$ м: частот власних коливань (а) і відповідної кількості півхвиль в коловому напрямку (б), критичних значень динамічного навантаження (в).

Представлені результати дослідження осесиметричних оболонок різної форми на рис. 4.25 засвідчують, що нижчі частоти власних коливань циліндричної оболонки менші за відповідні значення конічної і гіперболічної, кількість півхвиль в коловому напрямку відрізняються, критичні значення динамічного навантаження для конічної оболонки більші ніж для циліндричної. Спостерігається співпадіння кількості півхвиль в коловому і в твірному напрямках форм втрати динамічної стійкості на деяких діапазонах частот коливань (рис. 4.25).

4.4. Дослідження стійкості вимушених коливань циліндричної оболонки при дії кінематичного навантаження

В цьому розділі наведені результати дослідження стійкості вимушених коливань циліндричної оболонки при дії кінематичного збурення. В результаті прискореного переміщення опор передається вібраційне кінематичне збурення на оболонку, в якій можуть з'являтися динамічні напруження більші за допустимі значення експлуатації. Це відбувається у тих випадках, коли кінематично збурені коливання оболонок набувають резонансного характеру чи втрачають стійкість, в результаті чого швидко збільшується амплітуда змушених коливань або виникають нові форми руху.

Закон руху основи задається співвідношенням

$$z_1 = H \cos Qt, \quad (4.5)$$

де H , Q – значення амплітуди і частоти збурення руху основи.

Диференціальні рівняння руху оболонки, виходячи з умов рівності нулю головного вектора і головного моменту всіх сил, прикладених до елемента серединної поверхні оболонки, представимо у вигляді

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \sqrt{a} \vec{q}(t) - \sqrt{a} \gamma h \vec{w} = 0;$$

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{M}^\alpha}{\partial x^\alpha} + [\vec{e}_\alpha \times \vec{T}^\alpha] \sqrt{a} = 0, \quad \alpha = 1, 2$$
(4.6)

де a – фундаментальний визначник метричного тензора поверхні оболонки, h – товщина, γ – щільність матеріалу, \vec{w} – вектор абсолютного прискорення, $\vec{T}^\alpha, \vec{M}^\alpha$ – контраваріантні складові тензорів внутрішній зусиль і моментів.

Розглянемо випадок усталених вимушених коливань оболонки.

Введемо інерціальну систему координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ і рухому систему координат $OXYZ$, яка пов'язана з основою оболонки (рис. 4.26). Розглянемо коливання оболонки як складний рух, в якому рух системи координат $OXYZ$ відносно інерціальної системи $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ є переносним, а рух оболонки в системі $OXYZ$ – відносним. Рух основи в інерціальній системі координат задається прискорення \vec{w}_O його полюса і вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$ повороту навколо полюса.

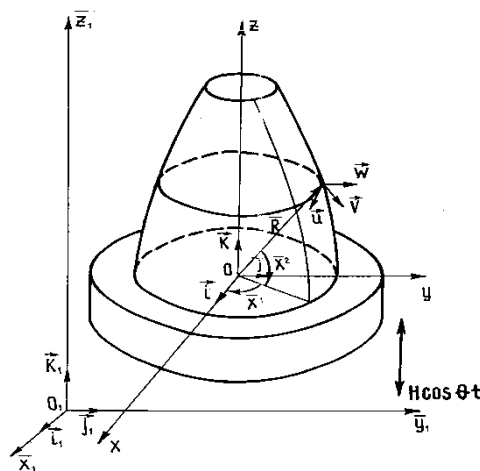


Рис. 4.26. Інерціальна, рухома і криволінійна системи координат.

Тоді абсолютне прискорення довільної точки серединної поверхні оболонки при довільному законі руху її основи буде виражатися співвідношенням:

$$\vec{w} = \vec{w}^r + \vec{w}^e + \vec{w}^c, \quad (4.7)$$

де вектор \vec{w}^r – прискорення точки у відносному русі, \vec{w}^e – вектор прискорення в переносному русі, \vec{w}^c – вектор коріолісового прискорення, які визначаються за формулами (співвідношеннями)

$$\vec{w}^r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (4.8)$$

$$\vec{w}^e = \vec{w}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}), \quad (4.9)$$

$$\vec{w}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}^r, \quad (4.10)$$

де $\vec{R} = \vec{R}(x, y, z)$ – радіус-вектор точки в рухомій системі координат $OXYZ$; $\vec{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості рухомої системи координат; $\vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення; \vec{V}^r – вектор швидкості у відносному русі.

Будемо розглядати випадок, коли періодичний переносний рух основи оболонки є поступальним і відбувається в паралельному осі симетрії оболонки напрямку. Для цього випадку формулюються рівняння нелінійних коливань осесиметричних оболонок при поступальному вібраційному русі зв'язаною з нею основою.

Відомо, що при складанні рівнянь руху матеріальної точки відносно поступального руху системи відліку потрібно врахувати, що коріолісові сили інерції відсутні, а переносні сили інерції не залежать від положення, що займає точка в рухомій системі відліку. Відповідно

$$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} = 0, \quad (4.11)$$

$$\vec{w}^c = 0. \quad (4.12)$$

З огляду на сказане вище, вектор переносного прискорення приводиться до вигляду

$$\vec{w}^e = \vec{w}_o = \ddot{z}_1 \vec{k} = -HQ^2 \cos Qt \vec{k}_1. \quad (4.13)$$

Підставляючи вираз (4.8) і (4.13) в рівняння (4.7) з врахуванням (4.12), отримаємо вираз для вектора абсолютного прискорення довільної точки при заданому законі руху основи:

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} - HQ^2 \cos Qt\vec{k}_1. \quad (4.14)$$

Підставимо отриманий вираз в (4.6), отримаємо в такому випадку рівняння руху елемента оболонки у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{a} T^\alpha}{\partial x^\alpha} + \sqrt{a} \vec{q}(t) - \sqrt{a} \gamma h (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} - \\ - HQ^2 \cos Qt\vec{k}_1) = 0; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \sqrt{a} M^\alpha}{\partial x^\alpha} + [e_\alpha^\rightarrow \times T^\alpha] \sqrt{a} = 0 \quad \alpha = 1, 2.$$

Використовуючи числову методику дослідження стійкості нелінійних вимушених коливань осесиметричних оболонок, диференціальні рівняння в часткових похідних (4.15) спочатку приведемо до системи звичайних диференціальних рівнянь. Потім, за допомогою модифікованого кінцево-різницевого методу криволінійних сіток, система звичайних диференціальних рівнянь дискретизується до системи алгебраїчних рівнянь [80, 85].

Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича [67, 85]. Використання вказаного підходу дозволяє розв'язок нелінійної крайової задачі звести до знаходження розв'язку послідовності лінеризованих крайових задач. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму аналізуються значення визначників матриці лінеризованих рівнянь, що відповідають симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати стійкості коливань оболонки полягає у зміні знаку відповідного визначника матриці лінеризованих рівнянь. Критичне значення кінематичного збурення H^* , що відповідає цьому стану системи, характеризує втрату стійкості усталеного руху, при якому відбувається інтенсивний ріст амплітуд коливань зі

збереженням просторово-часової конфігурації досліджуваного стану або втрату стійкості коливань, що супроводжується різкою перебудовою форм усталеного руху.

В роботі виконано розрахунок стійкості захисної оболонки паливного резервуару, який розташований на Українській антарктичній станції "Академік Вернадський" при дії кінематичного збурення. Захисний резервуар має вигляд циліндричної оболонки висотою 6,58 м, діаметром 6,96 м, товщина стінки – 5 мм.

Кінематичні навантаження виникають в результаті періодичних за часом коливань жорсткої платформи, на якій розташована ємність, в напрямку, паралельному її осі симетрії. Розглядаються усталені режими коливань резервуару з певною фіксованою частотою при збільшенні амплітуди кінематичних збурень до деякої критичної величини. В рамках нелінійної теорії оболонок, знайдено залежності амплітуд усталених коливань оболонки від інтенсивності періодичного збурення її основи. Визначені критичні значення амплітуди коливань оболонки при різних значеннях частоти кінематичного збурення її основи. Одержано залежність критичних значень кінематичного збурення від фіксованих значень частоти коливань оболонки. Спектр частот усталених коливань, для яких побудовані вказані залежності, лежить в діапазоні, що включає в себе нижчі власні частоти:

$$\nu_1 = 14,33 \text{ Гц}, \quad \nu_2 = 14,57 \text{ Гц}, \quad \nu_3 = 14,97 \text{ Гц}, \quad \nu_4 = 15,76 \text{ Гц}, \quad \nu_5 = 16,56 \text{ Гц}.$$

В таблиці 4.11 приведені критичні значення H^* при різних частотах Q кінематичного збурення основи, а також кількість півхвиль n в коловому напрямку оболонки.

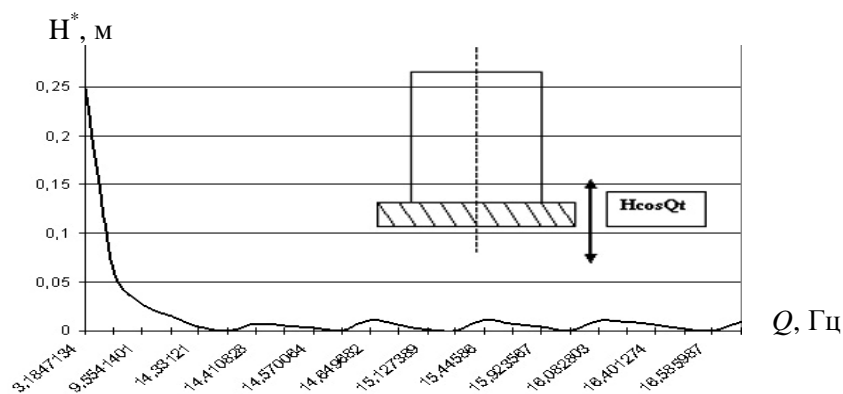
Таблиця 4.11

Критичні значення кінематичного збурення

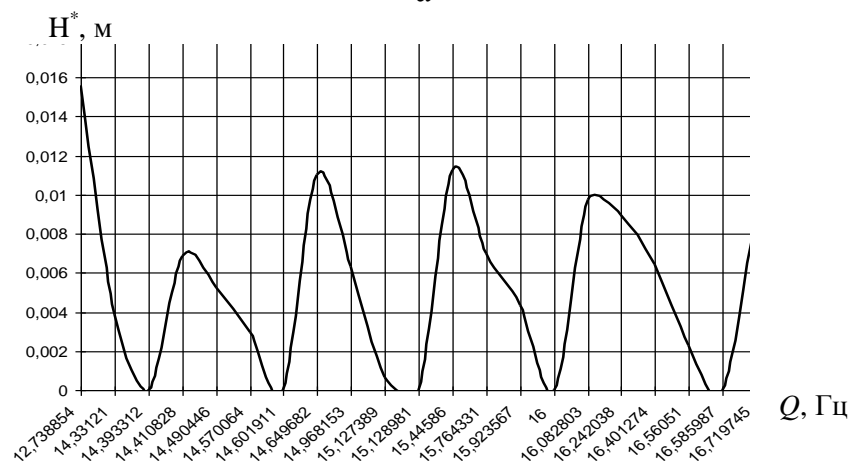
Частота збурення Q , Гц	3,18	6,37	9,55	12,74	14,33	14,39	14,41	14,49	14,57
Критична амплітуда H^* , м	0,25	0,06	0,03	0,02	0,004	0	0,007	0,005	0,003
Кількість півхвиль в колову напрямку n	12	11	11	10	10	10	9	9	9

Частота збурення Q , Гц	14,60	14,65	14,97	15,13	15,45	15,76	15,99	16,24	16,56
Критична амплітуда H^* , м	0	0,01	0,006	0	0,01	0,007	0	0,01	0
Кількість півхвиль в колову напрямку n	9	9	11	11	8	8	8	12	12

На рис. 4.27 відображена залежність критичних значень кінематичного збурення від частоти коливань оболонки. Оскільки критичні значення кінематичного збурення розташовані щільно в діапазоні, що включає перші п'ять власних частот, вони приведені в більшому масштабі на рис. 4.27 (б).



а



б

Рис. 4.27. Залежність критичних значень кінематичного збурення від його частоти (а) та в збільшеному масштабі (б) в діапазоні частот власних коливань оболонки.

На рис. 4.28 приведені залежності амплітуд усталених коливань певних точок оболонки в напрямку твірної V від інтенсивності періодичного збурення її

основи H , віднесених до товщини h оболонки при частоті $Q = 6,37$ Гц, яка є нижчою за значення першої власної частоти (рис. 4.28, а) і частоті $Q = 14,49$ Гц (рис. 4.28, б), значення якої вище за першу власну частоту.

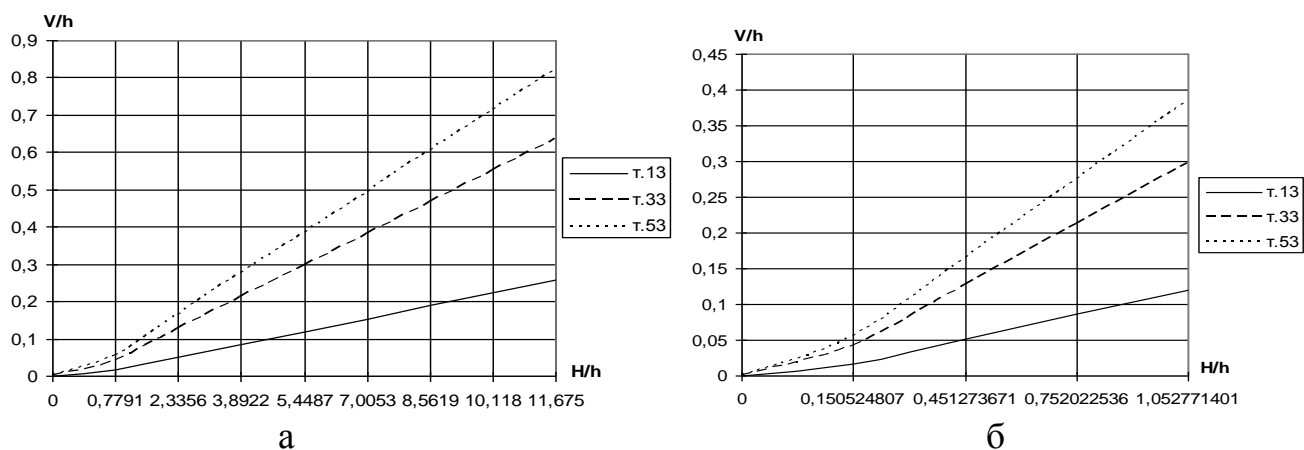


Рис. 4.28. Залежності амплітуд усталених коливань в напрямку твірної оболонки V від інтенсивності періодичного збудження її основи H , віднесених до товщини h при $Q = 6,37$ Гц (а) і $Q = 14,49$ Гц (б)

На рис. 4.29 відображені залежності амплітуд усталених коливань точок оболонки в радіальному напрямку W від інтенсивності періодичного збудження її основи H , віднесених до товщини h оболонки при частоті $Q = 6,37$ Гц, яка є нижчою за значення першої власної частоти (рис. 4.29, а) і частоті $Q = 14,49$ Гц (рис. 4.29, б), значення якої вище за першу власну частоту.

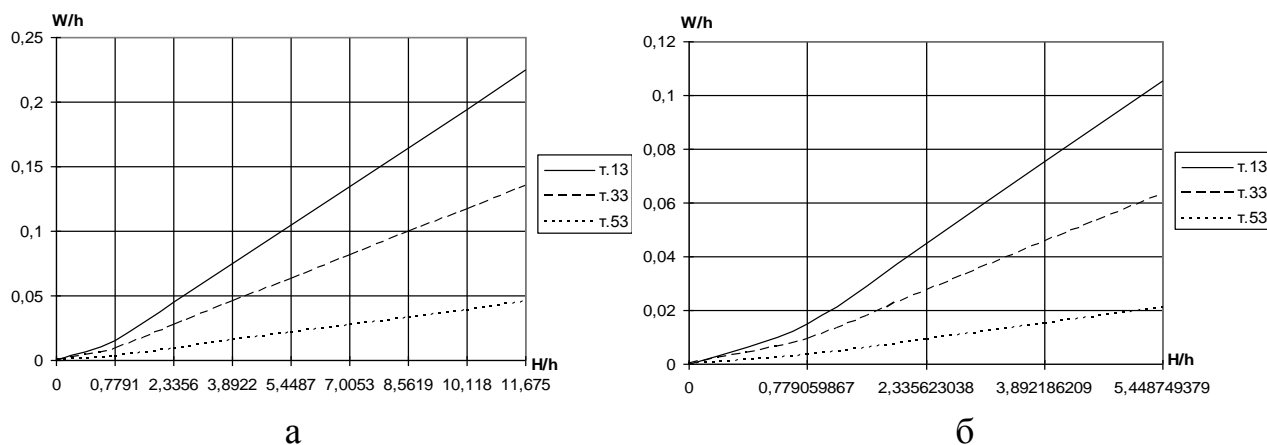


Рис. 4.29. Залежності амплітуд усталених коливань в коловому напрямку оболонки W від інтенсивності періодичного збудження її основи H , віднесених до товщини h при $Q = 6,37$ Гц (а) і $Q = 14,49$ Гц (б)

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити наступні висновки: збільшення частоти вібрації основи оболонки, починаючи з нульової і наближення її значення до першої власної частоти, яка дорівнює 14,39 Гц, приводить до різкого зниження критичного значення кінематичного збурення. В межах кожного діапазону частот, що обмежується власними частотами, збільшення частоти кінематичного збурення спричиняє зростання критичного значення до певного рівня, а потім – його зниження.

Результати проведених досліджень засвідчують, що втрата стійкості коливань захисного резервуару відбувається по циклічно симетричним формам втрати стійкості усталеного руху на відповідних частотах власних коливань (рис. 4.2).

При порівнянні залежностей, зображених на рис. 4.28, а і на рис. 4.28, б впливає, що амплітуди усталених коливань V певних фіксованих точок на твірній оболонки від інтенсивності періодичного збудження її H основи набувають більшого значення при частоті коливань $Q=6,37$ Гц, яка є нижчою за значення першої власної частоти ніж при частоті коливань $Q=14,49$ Гц, значення якої вище за першу власну частоту. Як впливає з графіків, найбільшу амплітуду усталених коливань має точка 53, яка найбільш віддалена від основи оболонки.

Користуючись отриманими залежностями (рис. 4.29, а і рис. 4.29, б) можна зробити висновок, що амплітуди усталених коливань точок оболонки в радіальному напрямку W від інтенсивності періодичного збудження її основи H при частоті коливань $Q=6,37$ Гц, мають більше значення ніж при частоті коливань $Q=14,49$ Гц. Найбільшу амплітуду усталених коливань набуває точка 13, яка розміщена найближче до основи оболонки.

ВИСНОВКИ

Основні результати, отримані в дисертаційній роботі, полягають у наступному:

- сформована система розрахункових рівнянь усталених вимушених нелінійних коливань із застосуванням геометрично нелінійних співвідношень моментної теорії тонких пружних оболонок на основі векторної апроксимації функції переміщень в загальній криволінійній системі координат, які сформульовані в тензорній формі і задовольняють гіпотезам Кірхгофа-Лява;

- побудована математична модель динамічної стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких пружних оболонок згідно теорії Флоке за допомогою проєкційного методу;

- виконана дискретизація диференціальних розрахункових співвідношень теорії тонких оболонок в задачах усталених вимушених нелінійних коливань та їх стійкості на основі методу криволінійних сіток;

- застосовано метод редукції базису, який є чисельною модифікацією метода Бубнова-Гальоркіна, для зменшення кількості узагальнених координат дискретної динамічної моделі;

- отримано розв'язки нових прикладних задач стійкості усталених вимушених нелінійних коливань тонких осесиметричних пружних оболонок (циліндричних, конічних, однополюх гіперболоїдів) при дії повздовжніх, поверхневих, кінематичних періодичних навантажень за допомогою методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича та теорії Ляпунова;

- виконана оцінка впливу геометричних параметрів тонких оболонок на частоти і форми власних коливань без і з урахуванням навантаження, амплітуди усталених вимушених нелінійних коливань, критичні значення динамічного навантаження та відповідні форми втрати стійкості;

- створено програмне забезпечення для реалізації чисельного підходу до дослідження стійкості нелінійних коливань тонких оболонок, яке надає розвитку обчислювальному комплексу методу криволінійних сіток;

- достовірність отриманих в дисертаційній роботі результатів обґрунтовується строгістю математичних перетворень, узгодженням чисельних результатів з аналітичними результатами інших авторів, збіжністю результатів в залежності від згущення сітки та точності розв'язання системи рівнянь, порівняльним аналізом отриманих результатів з результатами досліджень методом скінченних елементів.

В даній дисертаційній роботі сукупність отриманих результатів являє собою розв'язання актуальної науково-технічної проблеми будівельної механіки щодо забезпечення стійкістю тонких оболонкових конструкцій при дії динамічних навантажень з метою їх безаварійної експлуатації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Варвак П.М. Экспериментальное исследование тонких упругих пластинок прямоугольных в плане / П.М. Варвак, В.С. Кравчук, А.О. Рассказов // Расчет пространственных строительных конструкций. — 1971. — Вып. 2. — С. 110-121.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 446 с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
6. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. — М.: Наука, 1982. — 568 с.
7. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек / Н.А. Кильчевский. — К.: Изд. АН УССР, 1963. — 354 с.
8. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
9. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 431 с.
10. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек / К.Ф. Черных. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. — Ч. I. — 274 с.
11. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек / К.Ф. Черных. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. — Ч. II. — 395 с.
12. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, П.Г. Паламарчук. — К.: Наукова думка, 1983. — 207 с.

13. Амиро И.Я. Колебания оболочек вращения / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий и др. — К.: Наукова думка, 1988. — 172 с.
14. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин.— М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
15. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков.— М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
16. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. — М.: Гостехиздат, 1956. — 419 с.
17. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. — М.: Госфизматлит, 1963. — 880 с.
18. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
19. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. — М.: Наука, 1978. — 359 с.
20. Григолюк Э.И. Устойчивость и колебание трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. — М.: Машиностроение, 1973. — 170 с.
21. Образцов И.Ф. Методы конечных элементов в задачах строительной механики летальных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. — М.: Выш. шк., 1985. — 392 с.
22. Огибалов П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек / П.М. Огибалов. — М.: Изд-во. Моск. ун-та, 1963. — 420 с.
23. Огибалов П.М. Оболочки и пластины / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. — М.: Изд-во. Моск. ун-та, 1969. — 696 с.
24. Ониашвили О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек / О.Д. Ониашвили. — М.: Изд-во. АН СССР, 1957. — 320 с.
25. Перцев А.К. Динамика пластин и оболочек / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов. — Л.: Судостроение, 1987. — 317 с.
26. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями / И.Н. Преображенский. — М.: Машиностроение, 1986. — 240 с.

27. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Гришак. — М.: Машиностроение, 1986. — 240 с.
28. Арчер Р. О колебаниях и устойчивости пологих сферических оболочек при конечных перемещениях/ Р. Арчер, Ж. Фэмили // Прикладная механика. —1965. — Серия Е, № 1. — С. 134–138.
29. Budiansky B. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells / B. Budiansky, R.S. Roth //Collected papers on instability of shell structures. NASA TN D-1510, 1962. — P. 597–606.
30. Gjelsvik A. Nonsymmetrical snap buckling of spherical shells / A. Gjelsvik, S.R. Bodner // Journ. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. — 1962. — Vol.88, № 5. — P. 135–168.
31. Famili J. Finite asymmetric deformation of shallow spherical shells / J. Famili, R.R. Archer // AIAA Journal. —1965. — Vol. 3, № 3. — P. 506-510.
32. Flugge W. Stresses in shells / W. Flugge. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973. — 526 с.
33. Humphreys I.S. Dynamic buckling of shallow shells under impulsive loading / I.S. Humphreys, S.R. Bodner // Eng. Mech. Div. —1962. — Vol. 88, № 2 —P. 17–36.
34. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates / Soedel W. – New York: Marcel Dekker, Inc. 3rd edition, 2005. – 586 p.
35. Челомей В.Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций / В.Н. Челомей. — Изд-во Аэрофлота, 1939. — 125с.
36. Челомей В.Н. Динамическая устойчивость пластин / В.Н. Челомей // Труды Киевского авиационного института. —1938. —Вып. 10. — С. 31–40.
37. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1972. — 432 с.

38. Вольмир А.С. Нелинейные задачи динамики оболочек / А.С. Вольмир // Расчеты на прочность. — М.: Машиностроение, 1971. — Вып. 15. — С. 251–311.
39. Кильдибеков И.Г. Исследование нелинейных колебаний цилиндрических оболочек / И.Г. Кильдибеков // В сб. IX Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин. — 1973. — с. 37.
40. Мишенков Г.В. О динамической устойчивости пологих упругих оболочек / Г.В. Мишенков // Инж. журнал.—1961. —№2. — С. 112–118.
41. Мишенков Г.В. О динамической устойчивости пологой цилиндрической оболочки / Г.В. Мишенков // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек. — Казань: Казанский гос. ун-т, 1961. — С. 239–245.
42. Reissner I. Nonlinear effects in vibrations of cylindrical shells / I. Reissner // Aeromechanics Reports. —The Ramo-Wooldridge Corp. —1955. — No AM 5-6.
43. Fu F.C.U. Stability of solution of systems of linear differential equations with harmonic coefficients / F.C.U. Fu // J.AIAA.—1972. —№10. — P. 30–36.
44. Fung Y.C. On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure / Y.C. Fung, E.E. Sechler, A. Kaplan // J. Aeronaut. Sci. —1957. — №24. — P. 650–660.
45. Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. — М.-Л.: ОНТИ, 1935. — 674 с.
46. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко. — К.: Наук. думка, 1972. — 510 с.
47. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье.— М.: Наука, 1980. — 512 с.
48. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. — М.: Гостехиздат, 1948. — 211 с.
49. Муштари Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. — Казань: Таткнигоиздат, 1957. — 431 с.

50. Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г. Основания нелинейной теории оболочек / К.З. Галимов, В.Н. Паймушин, И.Г. Терегулов. — Казань: ФЭН, 1996. — 215 с.
51. Chien Wei-Zang. The intrinsic theory of thin shells and plates: part I.— General theory / Wei-Zang Chien // Quarterly of Applied Mathematics, 1944. — Vol. 1, No. 4. — P. 297–327.
52. Chien Wei-Zang. The intrinsic theory of thin shells and plates: part II.— Application to thin plates / Wei-Zang Chien // Quarterly of Applied Mathematics, 1944. — Vol. 2, No. 1. — P. 43–59.
53. Алумяэ Н.А. О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек / Н.А. Алумяэ // Прикл. математика и механика. —1956. — Т.20, № 1. — С. 136–139.
54. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов.— М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
55. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин.— М.: Наука, 1966. — 532 с.
56. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин.— М.: Наука, 1976. — 320 с.
57. Болотин В.В. О понятии устойчивости в строительной механике / В.В. Болотин // Проблемы устойчивости в строительной механике. —1965. — С. 6–27.
58. Болотин В.В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / В.В. Болотин // Избранные проблемы прикладной механики. —1974.—С. 159–166.
59. Овчарова Д.К. К вопросу об устойчивости колебаний нелинейных систем / Д.К. Овчарова // Вестник Харьковского политехнического института. —1979. — №148. — С. 13–15.

60. Хлуднев А.П. О существовании периодических решений в задаче о нелинейных колебаниях пластин / А.П. Хлуднев // Динамика сплошной среды. —1977. — №31. — С. 122–131.
61. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.— М.: Наука, 1937. — 568 с.
62. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский.— М.: Физматгизд, 1963. — 410 с.
63. Крылов Н.М. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов // Исследование колебаний конструкций. —1935.— №42 – С. 25.
64. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М.З. Коловский. — М. Наука, 1966. —256 с.
65. Мартынюк А.А. Прямой метод А.М. Ляпунова на основе матричных вспомогательных функций: 40 лет развития (обзор) / А.А. Мартынюк // Прикладная механика. —2020. — Т.56, №3. — С. 3–75.
66. Гуляев В.И. Построение периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений / В.И. Гуляев, Е.С. Дехтярюк, // Соппротивление материалов и теория сооружений. —1978. — №32. — С. 106–110.
67. Гоцуляк Е.А. Численное исследование устойчивости нелинейных вынужденных колебаний тонких упругих оболочек / Е.А. Гоцуляк, В.И. Гуляев, Е.С. Дехтярюк, А.А. Киричук // Прикладные проблемы прочности и пластичности. —1981. — №19. — С. 51–60.
68. Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных вынужденных колебаний сферических элементов / Е.А. Гоцуляк, В.И. Гуляев, Е.С. Дехтярюк, А.А. Киричук // Соппротивление материалов и теория сооружений. —1981. — №38. — С. 53–57.

69. Киричук А.А. Влияние динамической составляющей нагрузки на устойчивость сферических оболочек / А.А. Киричук // Сопротивление материалов и теория сооружений. —1985. — №45. — С. 18–20.

70. Гайдайчук В.В. Устойчивость нелинейных вынужденных колебаний пологой сферической оболочки / В.В. Гайдайчук, В.И. Гуляев, А.А. Киричук, З. Мруз // Сопротивление материалов и теория сооружений. —1987. — №51. — С. 15–18.

71. Киричук А.А. Устойчивость нелинейных колебаний тороидальной оболочки эллиптического сечения / А.А. Киричук, А.А. Гбену // Сопротивление материалов и теория сооружений. —1990. — №57. — С. 28–32.

72. Prather G. On the Nonlinear vibrations of rectangular plates / G. Prather, T.K. Varadan // J. sound and vibration. —1978. — 4, №56. — P. 521–530.

73. Singh P.N. Exact solution of some nonlinear oscillation problems / P.N. Singh, A.M. Awin, A.R. Shouman // J. sound and vibration. —1981. — №75, 2. — P. 303–306.

74. Пастушихин В.Н. Свободные колебания нелинейно- упругих оболочек / В.Н. Пастушихин // Прикладная механика. —1971. — Т.7, №3. — С. 16–20.

75. Бадалов Ф.Б. Исследование физически и геометрически нелинейных колебаний вязко-упругих пластин и оболочек методом усреднения / Ф.Б. Бадалов // Прикладная механика. —1985. — Т.21, №3. — С. 61–68.

76. Давиденко Д.Ф. Об одном методе численного решения систем нелинейных уравнений / Д.Ф. Давиденко // ДАН СССР. —1953. — Т. 88, № 4. — С. 601–602.

77. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории оболочек / И.И. Ворович.— М.: Наука, 1989. — 376 с.

78. Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин.— М.: Наука, 1969. — 527 с.

79. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ / Н.В. Валишвили. — М.: Машиностроение, 1976. — 276 с.

80. Гоцуляк Е.А. Применения метода криволинейных сеток к расчету оболочек вращения / Е.А. Гоцуляк, В.Н. Ермишев, Н.Т. Жадрасинов // Киев. инж.-строит. ин-т. — Киев, 1980.— 23 с. — Деп. в УкрНИИТИ 6.01.81, № 2557-81.

81. Баженов В. А. Численные методы в механике: учебное пособие / В.А. Баженов, А.Ф. Дашенко, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Одесса: «СТАНДАРТЬ», 2004. — 564 с.

82. Bathe K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2006. — 564 p.

83. Babuska I. Finite elements: an introduction to the method and error estimation / I. Babuska, J.R. Whiteman, T. Strouboulis. — Oxford: Oxford University Press, 2011. — 352 p.

84. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques / A.H. Nayfeh. — John Wiley & Sons, 2011. — 533 p.

85. Гуляев В.И. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, П.П. Лизунов. — Л.: Вища школа, 1983. — 288 с.

86. Киричук А.А. Стабилизация статически неустойчивых состояний нелинейной механической системы при действии периодических возмущений / А.А. Киричук, З. Мруэ // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1987.—Вып. 50. — С. 25–29.

87. Гоцуляк Е.А. Сходимость метода криволинейных сеток в задачах теории оболочек/ Е.А. Гоцуляк, В.Н. Ермишев, Н.Т. Жадрасинов // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1981.—Вып. 39. — С. 80–84.

88. Гоцуляк Е.А. Исследование сходимости метода криволинейных сеток в задачах нелинейной устойчивости оболочек/ Е.А. Гоцуляк, Н.Т. Жадрасинов // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1983.—Вып. 42. — С. 48–51.

89. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 239 с.

90. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов с учетом жестких смещений / А.С. Сахаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. —1974.— Вып. 24. — С. 41–52.

91. Григолюк Э.И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. — М: ВИНТИ, 1973. — Т.5. — 272 с.

92. Лужин О.В. Некоторые вопросы динамики замкнутой сферы / О.В. Лужин // Исследования по теории сооружений. —1967.—Вып. 15. — С. 82–89.

93. Desilva C.N. Axisymmetric vibrations of thin elastic shells / C.N. Desilva, G.E. Tersteeg // Journ. Acoust. Soc. Am. — 1964. —No. 36. —P. 666–672.

94. Kimihiko Y. Nonlinear forced oscillation of a shallow spherical shell / Y. Kimihiko, K. Genichiro // Bulletin of JSME. —1984. — Vol. 27, No. 232. — P. 2233–2240.

95. Zohar A. The free vibrations of a thin circular finite rotating cylinder / A. Zohar, J. Aboudi // International Journal of Mechanical Science. — 1973. — Vol. 15, No. 4. —P. 269–278.

96. Преображенский И.Н. Устойчивости и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Грищак. — М.: Машиностроение, 1986. — 376 с.

97. Слепов Б.И. Колебания и устойчивость эллиптической оболочки / Б.И. Слепов // Механика и машиностроение. —1964.—№3. — С. 144-146.

98. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик. — М.: Наука, 1979. — 384 с.

99. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.Н. Беспалова, А.Б. Китайгородский и [др.]. — К.: Наук. думка, 1986. — 172 с.

100. Гайдайчук В.В. Динаміка повздожніх коливань тонкої циліндричної оболонки / В.В. Гайдайчук, О.А. Киричук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. — 2007. — Вип. 81. — С. 51-56.

101. Гайдайчук В.В. Розрахунок динамічних характеристик оболонки паливного резервуару / В.В. Гайдайчук, О.А. Киричук, О.В. Кузько, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд— 2010. — Вип. 86. — С. 16-21.

102. Будақ В.Д. Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах / В.Д. Будақ, М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук, О.Я. Григоренко // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2015. — №2. — С. 20-28.

103. Рычков С.П. MSC.visualNASTRAN для Windows. / С.П. Рычков. — М.: ИТ Пресс, 2004. — 552 с.

104. Budak V.D. Determination of the natural frequencies of an elliptic shell of constant thickness by the finite-element method / V.D Budak, A.Y Grigorenko, M.Y Borisenko, E.V Boichuk // Journal of Mathematical Sciences. —2016. —Vol. 212, No2. — С. 182-192.

105. Будақ В.Д. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В.Д. Будақ, М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук, О.Я. Григоренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2014. — №2. — С. 32-37.

106. Чернобрышко М.В. Собственные колебания параболических оболочек / М.В. Чернобрышко, К.В. Аврамов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2014. — 57, № 3. — С. 78-85.

107. Баженов В.А. Аналіз власних коливань тонких параболічних оболонок / В. А. Баженов, О.П. Кривенко, Ю.В. Ворона // Опір матеріалів і теорія споруд. — 2019. — № 102. — С. 171-179.

108. Григоренко А.Я. Свободные колебания незамкнутой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения / А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Прикладная механика, 2020. — Т.56, №4. — С. 3-14

109. Kairov A.S. An experimental study of the natural vibrations of supported shells / A.S. Kairov // Jour. of mathematical sciences. — New York, 1995. — 77, № 6. — P.3533–3536.

110. Каиров А.С. О собственных колебаниях подкрепленных оболочек с присоединенными телами / А.С. Каиров, В.П. Шевченко // Збірник наукових праць Укр. державного морського технічн. ун-ту. —2000. — № 5 (371). — С.121-130.

111. Каиров А.С., Каиров В.А. Численное исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами / А.С. Каиров, В.А. Каиров // Вісник Донецького університету, Сер.А: Природничі науки. —2008. — Вип. 1. — С. 170-174.

112. Каиров А.С. Свободные колебания подкрепленных ребрами конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек / А.С. Каиров, О.И. Власов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2011. — Вип. 16. — С. 134-140.

113. Власов О.И. Численное исследование частот и форм собственных колебаний оболочек вращения с присоединенными твердыми телами / О.И. Власов, А.С. Каиров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2015. — Вип. 24. — С. 26-34.

114. Шевченко В.П., Власов О.И., Каиров В.А. Экспериментальное исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных

цилиндрических оболочек/ О.И. Власов, В.А. Каиров // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування — 2013. — № 2(68). — С.122-126.

115. Leissa A.W. Vibration of Shells / A.W. Leissa // NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC, 1973. — 438 p

116. Evensen D.A. Nonlinear vibrations of circular cylindrical shells / A. D.A. Evensen // Thin-Shell Structures: Theory, Experiment and Design, Prentice-Hall, New York, 1974. — P.133-155.

117. Markus S. The mechanics of vibrations of cylindrical shells / S. Markus. — Elsevier, 1988. — 159 p.

118. Кубенко В.Д. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (Обзор) / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук // Прикл. механика. — 1998. — Т.34, № 8. — С. 3–31.

119. Qatu M.S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989- 2000, Part 2: Homogeneous shells / M.S. Qatu // Appl. Mech. Rev. — 2002. — V. 55. — P. 415-434.

120. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках / П.З. Луговой // Прикл. Механика. — 2001. — Т. 37, № 5. — С. 44-73.

121. Moussaoui F. Non-linear vibrations of shell-type structures: a review with bibliography / F. Moussaoui, R. Benamar // Journal of Sound and Vibration. — 2002. — 255 (1). — P. 161-184.

122. Amabili M. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction / M. Amabili, M.P. Païdoussis // Appl. Mech. Rev. — 2003. — 56 (4). — P. 349-381.

123. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / Amabili M. // New York, USA: Cambridge university press, 2008. — 374 p.

124. Григоренко Я. М. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное

решение (обзор)/ Я. М. Григоренко, А. Я. Григоренко // Прикл. механика. — 2013. — Т.49, № 2. — С. 3-70.

125. Alijani F. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 / F. Alijani, M. Amabili // International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier. — 2014. — Vol. 58. — P. 349-381.

126. Луговой П. З. Динамика неоднородных оболочечных систем при нестационарных нагрузках (обзор) / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикладная механика. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 3-65.

127. Pellicano F. Linear and Nonlinear vibration of shells / F. Pellicano // 2nd International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibration Systems, Samos, June 19-23, 2006. — P. 1-12.

128. Pellicano F. Vibration of circular cylindrical shells: theory and experiments / F. Pellicano // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — 303. — P. 154–170.

129. Pellicano F. Dynamic instability of a circular cylindrical shell carrying a top mass under base excitation: experiments and theory / F. Pellicano // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — 48. — P. 408–427.

130. Simitses G.J. On the dynamic buckling of shallow spherical caps/ G.J. Simitses // Journ. Applied Mechanics. —1974. — Vol. 41, №1. — P. 299-300.

131. Simitses G.J. Effect of static preloading on the dynamic stability of structures / G.J. Simitses // Journ. AIAA. —1983. — Vol. 21, №8. — P. 1174-1180.

132. Simitses G.J. Dynamic stability of suddenly loaded structures / G.J. Simitses. — New York: Springer-Verlag, 1990. — 290 p.

133. Lee Doo-Sung. Nonlinear dynamic buckling of orthotropic cylindrical shells subjected to rapidly applied loads. Journal Eng. Math., 2000. — Vol. 38, № 2. — P. 141-154.

134. Скосаренко Ю.В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки при действии кратковременных нагрузок / Ю.В. Скосаренко // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного

технічного університету. Технічні науки. – 2012. – Вип. Темат. вип.. – С. 37-42.

135. Vetrov O.S. Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads/ O.S.Vetrov, V.P. Shevchenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 183, No. 2. – P. 231-240.

136. Луговой П.З. Исследование деформированного состояния цилиндрической оболочки при действии локальных импульсных нагрузок / П.З. Луговой, Ю.В. Скосаренко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. — Дніпропетровськ: Ліра, 2015. – Вип. 24. – С. 152-163.

137. Луговой П.З. Влияние параметров непостоянной возмущающей нагрузки на переходный процесс колебаний ребристой цилиндрической оболочки / П.З. Луговой, В.Н. Сиренко, Н.Я. Прокопенко, К.В. Клименко // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, №6. – С. 84-91.

138. Мейш В.Ф. Численный анализ нестационарных колебаний многослойных дискретно подкрепленных оболочек различной геометрии / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Н.В. Арнаута // Прикладная механика. – 2019. – Т. 55, №4. – С. 113-122.

139. Alekseychuk O.M. Vibrations of lamellar and rod structures with energy dissipation / O.M. Alekseychuk, S.I. Trubachev // Information systems, mechanics and control.–2016. – No 14. –P. 98-105.

140. Marchuk A.V. Free and forced vibrations of thick walled anisotropic cylindrical shells / A.V. Marchuk, S.V. Gnedash, S.A. Levkovskii // Int.Applied Mechanics.–2017. – Vol. 53, No 2. –P. 81-96.

141. Marchuk A.V. Free and forced vibrations of thick walled laminated anisotropic cylindrical shells with account for energy dissipation at frequencies close to resonance ones / A.V. Marchuk, S.V. Gnedash, D.O. Shandyba // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal.– 2017. – Vol. 8, Issue 3. –P. 239-265.

142. Баженов В.А. Об устойчивости параметрических колебаний оболочки в виде гиперболического параболоида / В.А. Баженов, О.А. Лукьянченко, Ю.В. Ворона, Е.В. Костина // Прикладная механика. – 2018. – Т.54, №3. – С. 36-49

143. Лук'янченко О.О. Чисельне моделювання стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни / О.О. Лук'янченко, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. – Вип. 101. – С. 45-59.

144. Палій О.М. Побудова редукованої моделі стійкості параметричних коливань тонкостінної оболонки виду гіперболічного параболоїда Шухова / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // II Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у навчальному процесі"(Київ, 25-26 вересня 2018 р.) – К., 2018. – С. 83-85.

145. Палій О.М. Частотний аналіз відгуку однополого гіперболічного параболоїда на періодичне повздовжнє навантаження / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 199–06.

146. Toda S. Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts / S. Toda, K. Komatsu // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – V. 52, № 4. – P. 497-510.

147. Ramamurti V. Dynamic behaviour of a cylindrical shell with a cutout / V. Ramamurti, J. Pattabiraman // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – V.52, № 2. – P. 193-200.

148. Mahabaliraja V. Vibrations of stiffened cylinders with cutouts / V. Mahabaliraja, D. Boyd, R. Brugh // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – V. 52, № 1. – P. 65-78

149. Селиванов Ю.М. Голографический и конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием / Ю.М. Селиванов, Д.В. Ключник // Методи розв'язування

прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта. – 2007. – Вип. 8. – С. 140-149

150. Грищак В.З. Влияние начальных несовершенств на нелинейное динамическое поведение оболочечных конструкций из функциональноградиентных материалов переменной во времени толщины / В.З. Грищак, Ю.О. Фатеева // Вісник Запорізького національного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2015. – С. 58-66.

151. Luk'yanchenko O.O. Investigation of static and dynamic characteristics of complex thin-walled structure with cracks / O.O. Luk'yanchenko, O.V. Kostina, N.I. Bouraou, O.V. Kuz'ko // Strength of Materials. – 2016. – V. 48, № 3. – P. 401-410.

152. Лук'янченко О.О. Надійність тонких оболонок з реальними недосконалостями форми / О.О. Лук'янченко, Ю.В. Ворона, О.В. Костіна, М.О. Вабіщевич, О.М. Палій // Вісник КПІ. Серія Приладобудування. – Київ: НТУУ «КПІ», 2019. – Вип. 58(2). – С. 34-40.

153. Vorona Yu. Influence of shape imperfections on the stability of thin shells / Yu. Vorona, O. Kostina, O. Paliy // IX International Antarctic Conference dedicated to the 60th anniversary of the signing of the Antarctic Treaty (Kyiv, Ukraine, May 14-16, 2019) – K., 2019. – P. 233-236.

154. Bazhenov V. Pressing issues of trouble-free operation and modernization of the infrastructure of the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station / V. Bazhenov, O. Lukianchenko, M. Vabishchevych, O. Paliy // X International Antarctic Conference dedicated to the 25th Anniversary of raising of the National Flag of Ukraine at the Ukrainian Antarctic Akademik Vernadsky station (Kyiv, Ukraine, May 11-13, 2021) – K., 2021. – P. 93-94.

155. Бреславський В.Е. Динамика цилиндрической оболочки при кинематическом возбуждении / В.Е. Бреславський, И.Н. Гинзбург, Г.С. Дик // Динамика и прочность машин. – 1986. – 43. – С. 89-94.

156. Бреславський В.Е. Динамика пологого цилиндрического заполнителя, скрепленного с упругой оболочкой, при кинематическом

возбуждении / В.Е. Бреславський, И.Н. Гинзбург, С.М. Мордовуев // Проблемы машиностроения. – 1985. – 29. – С. 25-29.

157. Ujihashi S. Dynamic deformations and stresses in a circular cylindrical shell with both ends clamped subjected to translational excitations at the base / S. Ujihashi, A. Iton, H. Matsumoto, J. Nakahara // Bul. JSME. – 1980. – Vol.23, 161. – P. 1055-1063.

158. Iric T. Steady-state response of an internally damped cylindrical shell translationally or rotationally driven at an edge / T. Iric, Y. Kobayashi // Trans ASME, JOURNAL of Appl. Mech. – 1985. – Vol.52, №3. – P. 733-736.

159. Дик Г.С. Расчет напряженно-деформированного состояния конических оболочек при их кинематическом возбуждении / Г.С. Дик // Проблемы машиностроения. – 1988. – №29. – С. 30-33.

160. Sakai T. Practical calculation formulas and graphs earthquake stresses in vertical hollow cylindrical shell / T. Sakai // Proc. Forth Japan National congress for Appl. Mech. – Tokyo, 1954. – P. 123.

161. Шукуров А.Х. Влияние вибрационных и кинематических возмущений на устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек / А.Х. Шукуров // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць / Дніпропетр. нац. ун-т. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 7. – С. 157-162.

162. Павленко И.Д. Устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек из полимерных материалов при локальных квазистатических воздействиях / И.Д. Павленко, А.Х. Шукуров // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 10. – С. 230-239.

163. Гуляев В.И. Устойчивость кинематически возбуждаемых нелинейных колебаний тонких оболочек вращения / В.И. Гуляев, А.А. Киричук // Проблемы механики оболочек. – 1988. – С. 53-63.

164. Гуляев В.И. Устойчивость нелинейных колебаний тонких оболочек при силовых и кинематических возбуждениях / В.И. Гуляев,

А.А. Киричук // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого тела. – 1989. – С. 89-90.

165. Гуляев В.И. Устойчивость нелинейных колебаний сферических оболочек при кинематических возбуждениях / В.И. Гуляев, А.А. Киричук, З.А. Мруз, О.М. Садык // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 54. – С. 8-12.

166. Гуляев В.И. Устойчивость нелинейных колебаний эллипсоидальных оболочек при кинематическом возбуждении / В.И. Гуляев, А.А. Киричук, О.М. Садык // Динамика и прочность машин. – 1991. – Вып. 52. – С. 20-24.

167. Киричук О.А. Дослідження нелінійної стійкості кінематично збурюваних оболонок / О.А. Киричук, Томас Мост, Христіан Блюхер // Міжнародний журнал обчислень у промисловому та цивільному будівництві. – 2004. – Т. 1, № 5. – С.61-74.

168. Палій О.М. Стійкість нелінійних коливань циліндричних оболонок при кінематичних збуреннях / О.М. Палій // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА (Київ, 17-19 жовтня 2006 р.). – К.: КНУБА, 2006. – С. 11.

169. Киричук О.А. Стійкість захисної оболонки паливного резервуара при періодичних кінематичних збуреннях / О.А. Киричук, О.В. Кузько, О.М. Палій // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. – Київ: Видавництво «Сталь», 2010. – Вип. 6. – С. 148–158.

170. Маневич Л.И. Исследование устойчивости оболочек при совместном действии статических и динамических нагрузок / Л.И. Маневич, Г.В. Михайлов, И.Д. Павленко, Е.Ф. Прокопало // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 1. – С. 27-32.

171. Bray F.M. An experimental investigation of the free vibration of thin cylindrical shells with discrete longitudinal stiffening / F.M. Bray, D.M. Egle // Journal of Sound and Vibration. – 1970. – V. 12, № 2. – P.153-164.

172. Гузь А.Н. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / А.Н. Гузь, В.А. Заруцкий, И.Я. Амиро и др. – К: Наук. думка, 1984. –240 с.

173. Ковальчук П.С. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний с большими прогибами стеклопластиковых оболочек вращения / П.С. Ковальчук, В.Д. Лакиза // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 63-69.

174. Заруцкий В.А. Экспериментальные исследования динамики оболочек вращения (обзор) / В.А. Заруцкий, В.Ф. Сивак // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 3-11.

175. Заруцкий В.А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 8. – С. 38-67.

176. Кубенко В.Д. Экспериментальные исследования колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук // Прикл. механика. – 2009. –Т. 45, № 5. – С. 53-79.

177. Шевченко В. П. Экспериментальное исследование собственных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек / В.П. Шевченко, О.И. Власов, В.А. Каиров // Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія: Машинобудування. – 2013. № 2 (68). – С. 122-127.

178. Будақ В.Д. Исследование свободных колебаний цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины с помощью метода голографической интерферометрии / В.Д. Будақ, А.Я. Григоренко, В.В. Хоришко, М.Ю. Борисенко // Прикладная механика. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 101-109.

179. Палій О.М. Вплив геометричних характеристик конічних оболонок на їх динамічну стійкість / О.М. Палій, О.О. Лук'янченко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 103. – С. 235-242.

180. Киричук О.А. Математична модель параметричних нелінійних коливань тонких оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Вістник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 230-234.

181. Киричук О.А. Стійкість усталених коливань циліндричних оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Вістник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 235-239.

182. Киричук О.А. Вплив геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних оболонок / О.А. Киричук, О.М. Палій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – Вип. 82. – С. 102–110.

183. Paliy O. Influence of geometrical characteristics on the dynamic stability of thin shells / O. Paliy, O. Lukianchenko // V International Interdisciplinary Scientific Conference “Social Development Towards values. Ethics-Technology-Society” (Zabrze Polska, September 25-27, 2019) – Z.P., 2019. – P. 113-114.

Додаток А



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Повітрофлотський пр. 31, м. Київ-37, 03037, тел. (044)241-55-80, факс (044)248-32-65
E-mail: knuba_admin@ukr.net, Web: http:// www.knuba.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070909

№ _____

На № _____ від _____

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Палій О.М. на тему «Стійкість нелінійних коливань тонких оболонок при періодичних навантаженнях» у навчальному процесі Київського національного університету будівництва і архітектури

Результати дисертаційної роботи Палій О.М. на тему «Стійкість нелінійних коливань тонких оболонок при періодичних навантаженнях» використані у навчальному процесі на кафедрі теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при розробці навчальних програм дисципліни для спеціальностей: 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 131 «Прикладна механіка» та при виконанні наступних науково-дослідних робіт: ІГР-2007 «Стійкість нелінійних параметричних коливань циліндричних і конічних оболонок» (2007 р., № держ. Реєстрації 0107U0008099); «Дослідження напружено-деформованого стану і стійкості просторових конструкцій» (2018-2022 рр., № держ. Реєстрації 0118U005222).

Науковий внесок Палій О.М. полягає у чисельній реалізації методу криволінійних сіток в задачах оцінки впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних оболонок (циліндричних, конічних, однополий гіперболоїд) на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Палій О.М. на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Проректор з наукової роботи
КНУБА
д.е.н., проф.



О.І. Шкуратов

Додаток Б

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ «Б.І.Т.»

Ідентифікаційний код:43837379

02002, м. Київ, Дніпровський р-н, вул. Євгена Сверстюка, будинок 23, пов.5, приміщення 529
Код ЄДРПОУ 43837379, ІВАН: UA87 3052 9900 0002 6008 0468 0843 2, Інд. под. № 438373726539

Вих. №20

від «5» липня 2021 р.

про впровадження результатів дисертаційної роботи Палій О.М. на тему «Стійкість нелінійних коливань тонких оболонок при періодичних навантаженнях» у розробці проектної документації об'єкта «Будівництво заводу з первинної переробки коноплі за адресою с. Омелянів, Чернігівської області»

ДОВІДКА

Результати дисертаційної роботи Палій О.М. на тему «Стійкість нелінійних коливань тонких оболонок при періодичних навантаженнях» використані при проектуванні об'єкта «Будівництво заводу з первинної переробки коноплі за адресою с. Омелянів, Чернігівської області».

Науковий внесок Палій О.М. полягає у чисельній реалізації методу криволінійних сіток в задачах оцінки впливу геометричних параметрів тонких осесиметричних оболонок на стійкість усталених вимушених нелінійних коливань. Застосування чисельного підходу для виконання попередніх досліджень дозволило визначити статичні і динамічні характеристики оболонкових елементів конструкції при дії експлуатаційних навантажень.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Палій О.М. на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Директор



І. О. Чомкалова