

Київський національний університет будівництва і архітектури

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Максим'юк Юрій Всеволодович

Гриф

Прим. № _____

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНО ТА
ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ, СТІЙКОСТІ
І РУЙНУВАННЯ ТІЛ СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ
ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

05.23.17 – будівельна механіка
(19 Архітектура та будівництво)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий консультант Баженов Віктор Андрійович доктор технічних наук, професор, академік
Національної академії педагогічних наук України, Лауреат Державних премій України у галузі
науки і техніки та освіти, Заслужений діяч науки і техніки України

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Максим'юк Ю.В. Метод скінченних елементів у задачах геометрично та фізично нелінійного деформування, стійкості і руйнування тіл складної структури при термосиловому навантаженні.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 «Будівельна механіка» (19 – Архітектура та будівництво). – Київський національний університет будівництва та архітектури, м.Київ, 2019.

Зміст анотації

В першому розділі наведені отримані в результаті проведеного аналізу літературних джерел дані про підходи та методи розв'язання задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу, а також лінійної та нелінійної механіки руйнування з урахуванням геометричної не лінійності при термосиловому навантаженні. Це дозволяє більш чітко сформулювати постановку зазначених фізично і геометрично нелінійних задач деформування, стійкості і руйнування, визначити вихідні співвідношення та вибрати найбільш ефективні методи їх розв'язання.

В другому розділі наведені вихідні співвідношення теорії пружності та пружнопластичності. Викладені основні положення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ). На основі МССЕ створена бібліотека скінчених елементів (СЕ). Також показаний алгоритм розв'язання систем лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь.

В третьому розділі приведено обґрунтування ефективності отриманих в попередньому розділі на основі МССЕ розрахункових співвідношень МСЕ, розглянуто низку контрольних і прикладних задач при використанні всіх трьох типів СЕ, як основних так і модифікованих варіантів.

В четвертому розділі наведені основні вихідні і розрахункові співвідношення МСЕ вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності в криволінійній системі координат, а також алгоритми їх розв'язання. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

В п'ятому розділі виконано узагальнення методики, викладеної в попередніх розділах на нові класи задач термов'язкопружнопластичного деформування з урахуванням пошкодженості матеріалу при силовому і нестационарному температурному навантаженні розроблених на основі МССЕ відповідних скінченноелементних співвідношень і алгоритмів. Шляхом обґрунтування достовірності результатів розрахунків, отриманих при термосиловому навантаженні розглянуто ряд контрольних прикладів, які охоплюють тіла, як при пружному деформуванні так і при наявності деформацій пластичності і повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу. Також отримані розрахункові співвідношення МССЕ для спеціального контактного СЕ і на цій основі проведено співставлення двох варіантів алгоритму моделювання процесу взаємодії деформівних тіл.

В шостому розділі наведено дослідження поведінки плоско-деформованих і вісесиметричних тіл у нестационарному температурному полі, визначені пов'язані з ними температурні напруження, коректно обчислений розрахунковий ресурс окремих об'єктів і взаємодіючих деталей. Розглянуті такі важливі об'єкти машинобудування як корпус стопорного клапана парової турбіни при силовому і температурному навантаженнях, цільнокований ротор парової турбіни і ялинкове з'єднання хвостовика лопатки з диском газотурбінної установки

В сьомому розділі приведені особливості застосування МССЕ при розв'язанні вісесиметричних геометрично нелінійних задач стійкості і формозмінення.

У восьмому розділі розглянуто задачі формозмінення і втрати стійкості при великих переміщеннях і великих незворотних деформаціях пластичності і повзучості. Дослідження достовірності результатів виконане шляхом розв'язання значної кількості контрольних прикладів.

В дев'ятому розділі проілюстровані чисельні результати розв'язання геометрично нелінійних задач. Проведено визначення величини критичного навантаження для несучих корпусів дозাপравочного балону і рятувального апарату та виконано дослідження стійкості і закритичної поведінки сферичної

панелі з підкріплюючим шаром і пружними граничними умовами. В якості прикладів математичного моделювання операцій обробки металів тисненням розглянуті процеси витяжки циліндричного стакану і осадки циліндричної заготовки.

В десятому розділі розглянуто моделювання процесів розвитку магістральних тріщин при термосиловому навантаженні з урахуванням формозмінення.

Основні результати роботи полягають у отриманні нових розв'язувальних співвідношення на МССЕ і розробки алгоритмів для ефективного і вірогідного розв'язання задач деформування, стійкості, континуального і дискретного руйнування. Розробки апарату чисельного дослідження нестационарної теплопровідності та задач контактної взаємодії. Створення бібліотеки скінчених елементів для розв'язання вісесиметричних задач термов'язкопружнопластичності та механіки континуального та дискретного руйнування для масивних, тонкостінних та комбінованих тіл складної структури. Розроблено ефективний алгоритм визначення траєкторії криволінійних тріщин в зазначених об'єктах.

Наукова новизна результатів полягає в розв'язанні актуальної науково-технічної проблеми з розробки на МССЕ ефективної чисельної методики розв'язання задач деформування, стійкості, континуального і дискретного руйнування. Контактної взаємодії та нестационарної теплопровідності. Тонкостінних, масивних і комбінованих тіл обертання складної структури. Та визначення на цій основі ресурсу, тріщиностійкості і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень. Наведені результати були використані в НДІБМ КНУБА при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт та на кафедрі будівельної механіки КНУБА при виконанні атестаційних магістерських робіт. Результати дисертаційної роботи можуть застосовуватись у різних галузях техніки для визначення ресурсу, тріщиностійкості і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки.

Ключові слова: метод скінченних елементів, моментна схема скінчених елементів, фізично і геометрично нелінійні задачі деформування, стійкість, континуальне і дискретне руйнування, контактна взаємодія, нестационарна теплопровідність, тонкостінні, масивні і комбіновані тіла.

Список публікацій здобувача

а) монографія

1. Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / [Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2018. – 316с.

б) статті в наукових фахових виданнях України

2. Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95. – С. 11–20.
3. Андрієвський В.П. Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 64–72.
4. Баженов В.А. Математичне моделювання процесів розвитку магістральних тріщин в тілах обертання складної структури з урахуванням формозмінення / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2018. – Вип. 101. – С. 111–120.
5. Баженов В.А. Напружено-деформований стан і формозмінення в тілах обертання складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 3–12.
6. Дослідження напруженого стану зварного ротору на основі моментної схеми МСЕ / С.О. Пискунов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 163–172.

7. Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 89. – С. 143–157
8. Максим'юк Ю.В. Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2014. – Вип. 92. – С. 148–156.
9. Максим'юк Ю.В. Визначення тріщиностійкості вісесиметричних тіл з урахуванням формозмінення / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2018. – Вип. 100. – С. 202–213.
10. Максим'юк Ю.В. Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2017. – Вип. 99. – С. 151–159.
11. Максим'юк Ю.В. Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 97. – С. 186–193.
12. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2015. – Вип. 94. – С. 244–251.
13. Максим'юк Ю.В. Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 96. – С. 148–157.
14. Модифікований варіант метода реакцій в двовимірних задачах механіки руйнування / О.І. Гуляр, О.С. Сахаров, О.О. Шкриль, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 88. – С. 12–17.
15. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С.О. Пискунов, І.І. Солодей,

Ю.В Максим'юк, А.Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 59–75.

16. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гуляр [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 92. – С. 3–16.
17. Особливості розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності і повзучості з урахуванням геометричної не лінійності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В Максим'юк, Б.І. Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 90. – С. 73–89.

в) статті, що включені до наукових періодичних видань інших держав, та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз матеріалів:

18. Визначення параметрів напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк // Вісник НТУ «ХПІ» Технології та обладнання виробництва – 2015. – №21(1130). – С. 128-135.
19. Дослідження еволюції напружено-деформованого стану і визначення розрахункового ресурсу масивних елементів вісесиметричних конструкцій на основі універсального скінченного елемента / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк, С.В. Мицюк, С.О. Пискунов // Вісник НТУ «ХПІ» Системний аналіз, управління та інформаційні технології – 2018. – №22(1298). – С. 66-72.
20. О.І. Гуляр Дослідження нелінійного деформування складених оболонок обертання середньої товщини / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Технічні науки та технології: науковий журнал. – 2018. – №2(12). – С 9-24.
21. A modified method for evaluating the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies / V.A. Bazhenov, A.S. Sakharov, Y.V. Maksimyuk, A.A. Shkryl' // International Applied Mechanics. – 2016. – 52(2). pp. 140-146.

22. Pyskunov S.O. Finite element analysis of influence of non-homogenous temperature field on designed lifetime of spatial structural elements under creep conditions / S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksimyuk, V.V. Valer // *Applied Mathematics and Nonlinear*. – 2016. – Sciences 1(1) (2016). pp. 170–176.

г) основні публікації по доповідям на міжнародних і вітчизняних конференціях:

23. Баженов В.А. Моделювання фізично і геометрично нелінійного деформування і руйнування вісесиметричних і плоско-деформованих тіл / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк // «Математичні проблеми технічної механіки – 2013»: Матеріали міжнародної наукової конференції, м. Дніпродзержинськ, 16–29 квітня.: – Дніпродзержинськ, 2013. – С 101.

24. Баженов В.А. Напружено-деформований стан і формозмінення масивних і тонкостінних об'єктів / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Международная научно-практическая конференция «Современные методы и проблемно-ориентированные комплексы расчета конструкций и их применения в проектировании и учебном процессе». (Киев, 18-20 октября 2018). –К., 2018. – С 97.

25. Максим'юк Ю.В. Моментна схема скінчених елементів в геометрично нелінійних задачах пружнопластичного деформування тіл обертання / Ю.В. Максим'юк, В.І. Мартиновський // International scientific-practical conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2018” – К.: KNUCA., 28-30.11.2018 – 236-237s.

26. Максим'юк Ю.В. Визначення впливу урахування геометричної нелінійності на величину ресурсу стопорного клапана у випадку дискретного руйнування / Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА: тези доповідей. – в 2х частинах (м.Київ, 8-11 листопада 2011 р.). – Ч.1. –К., 2011. – С 46.

27. Максим'юк Ю.В. Оболонковий скінчений елемент (СЕ) загального типу для розв'язання задач фізичної і геометричної нелінійності вісесиметричних оболонок та пластин / Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА:тези доповідей (м.Київ, 5-8 листопада 2013 р.). –К., 2013. – С 57.
28. Максим'юк Ю.В. Розв'язання фізично і геометрично-нелінійних задач для тонкостінних об'єктів / Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА:тези доповідей. – в 2х частинах (м.Київ, 6-9 листопада 2012 р.). – Ч.1. –К., 2012. – С 55.
29. Максим'юк Ю.В. Розрахунок корпусних деталей занурюваних глибоководних апаратів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності / Ю.В. Максим'юк, О.Ю. Башинська // «Recent Studies of Applied Sciences» International scientific-practical conference. Section: TECHNICAL SCIENCE – Kyiv, Ukraine 15-17 April 2015. – pp. 39.
30. Пискунов С.О. Вплив параметрів підкріплювального шару на стійкість і закритичну поведінку сферичних панелей / С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА:тези доповідей (м.Київ, 15-17 березень 2017 р.). –К., 2017. – С 83.
31. Maksimyyuk Y. Using of foreign experience in the application of pendulumsilencers in the high-rise building in the seismic districts of Ukraine / Y. Maksimyyuk, I. Tkach // International scientific-practical conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2017” – K.: KNUCA., 28.11-01.12.2017 – 442s.

ЗМІСТ

Вступ.....	15
Розділ 1. Сучасний стан дослідження проблем фізично і геометрично нелінійного деформування і руйнування.....	29
Розділ 2. Особливості застосування моментної схеми скінчених елементів при розв’язанні вісесиметричних задач пружнопластичності.....	45
2.1. Вихідні співвідношення теорії пружності.....	46
2.2. Визначальні рівняння пружнопластичності.....	49
2.3. Основні положення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ).....	53
2.4. Скінченний елемент загального типу з чисельним інтегруванням.....	57
2.5. Модифікований скінченний елемент із інтегруванням в замкненому вигляді.....	64
2.6. Універсальний скінченний елемент для дискретизації масивних тонкостінних і комбінованих тіл обертання складної структури.....	75
2.7. Розв’язання систем лінійних і нелінійних рівнянь.....	83
Розділ 3. Аналіз достовірності та результати чисельного моделювання пружнопластичного деформування вісесиметричних тіл	88
3.1. Достовірність і ефективність МССЕ при розрахунку тонкостінних тіл обертання.....	88
3.2. Достовірність і ефективність МССЕ в задачах деформування масивних і комбінованих тіл.....	97
3.3. Ефективність алгоритмів розв’язання систем нелінійних рівнянь при пружнопластичному деформуванні	108

3.4. Моделювання пружнопластичного деформування зварного ротору парової турбіни.....	112
3.5. Дослідження напружено-деформованого стану тонкостінних резервуарів.....	122
Розділ 4. Методика розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності.....	129
4.1. Вихідні співвідношення нестационарної теплопровідності неоднорідних тіл.....	129
4.2. Вісесиметричний скінченний елемент загального типу для розв'язання задач теплопровідності.....	132
4.3. Модифікований скінченний елемент для розв'язання задач нестационарної теплопровідності.....	137
4.4. Чисельні результати розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності.....	140
Розділ 5. Методика визначення розрахункового ресурсу систем деформівних тіл при термосиловому навантаженні.....	146
5.1. Вихідні співвідношення	147
5.1.1. Основні співвідношення термов'язкопружнопластичності	147
5.1.2. Визначальні рівняння теорії повзучості з пошкодженістю.....	152
5.2. Обчислення температурних деформацій на основі МСС.....	154
5.3. Достовірність визначення параметрів напруженого стану при термосиловому навантаженні.....	156
5.4. Методика моделювання взаємодії окремих конструктивних елементів.....	167
Розділ 6. Результати розв'язання задач прогнозування несучої здатності елементів конструкцій при термов'язкопружнопластичному деформуванні.....	172
6.1 Дослідження напружено-деформованого стану корпусу	172

стопорного клапана парової турбіни при термосиловому навантаженні.....	
6.2.Визначення ресурсу цільнокованого ротору парової турбіни в умовах повзучості.....	176
6.3 Дослідження впливу температурного навантаження на ресурс ялинкового з'єднання хвостовика лопатки з диском газотурбінної установки.....	185
Розділ 7. Особливості застосування мсе при розв'язанні вісесиметричних геометрично нелінійних задач стійкості і формозмінення.....	195
7.1. Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості.....	195
7.2. Особливості визначення геометрично нелінійних деформацій на основі МССЕ.....	200
7.3. Матриця жорсткості в проміжній відліковій конфігурації і рівняння рівноваги в актуальній конфігурації скінченного елемента з чисельним інтегруванням.....	205
7.4. Розрахункові співвідношення універсального скінченного елемента в актуальній конфігурації.....	207
7.5. Алгоритм розв'язання задач нелінійного деформування стійкості та закритичної поведінки вісесиметричних тіл....	209
7.6. Алгоритм розв'язання контактної задачі зі змінними граничними умовами.....	213
7.7. Особливості розв'язання задачі нестационарної теплопровідності при формозміненні.....	217
Розділ 8. Аналіз достовірності результатів чисельного моделювання процесів формозмінення тіл обертання на основі МССЕ...	220
8.1. Достовірність визначення критичних навантажень тонкостінних оболонок обертання	220

8.2. Визначення параметрів напружено-деформованого стану в процесі витяжки циліндричного стакану	223
8.3. Достовірність моделювання формозмінення масивних тіл обертання	231
8.4. Алгоритм урахування контактної тертя в задачах формозмінення.....	239
Розділ 9. Чисельні результати розв’язання геометрично нелінійних задач.....	245
9.1. Визначення критичних навантажень для глибоководних апаратів.....	245
9.2. Вплив параметрів підкріплюючого шару і пружного затиснення на стійкість і закритичну поведінку сферичної панелі.....	256
9.3. Дослідження процесів обробки металів тисненням.....	265
9.3.1 Аналіз напружено-деформованого стану і зусиль витяжки при змінні геометричних параметрів інструменту.....	265
9.3.2. Моделювання осадки заготовки з урахуванням впливу температури інструменту.....	269
Розділ 10. Моделювання процесів розвитку магістральних тріщин при термосиловому навантаженні з урахуванням формозмінення.....	273
10.1. Алгоритм визначення траєкторії магістральної тріщини на основі модифікованого методу реакцій.....	274
10.2. Достовірність результатів визначення траєкторії магістральних тріщин.....	281
10.3. Обґрунтування ефективності використання модифікованого методу реакцій у нелінійних задачах механіки руйнування.....	285

10.4. Достовірність результатів визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) при термосиловому навантаженні.....	289
10.5. Визначення характеру руйнування і несучої здатності з'єднувального вузла занурюваного контейнеру.....	294
10.6. Визначення ресурсу корпусу стопорного клапана з урахуванням геометричної нелінійності при термосиловому навантаженні.....	298
10.7. Дослідження впливу геометричної нелінійності на деформування та величини J -інтеграла компактного зразку.....	302
Висновки.....	307
Список літератури	310
Додатки.....	339

ВСТУП

Вдосконалення машин, обладнання, конструкцій і споруд, які отримали широке розповсюдження в різних галузях сучасної техніки, неможливе без достовірного прогнозування їх поведінки під дією зовнішніх навантажень. Визначення параметрів напружено-деформованого стану об'єктів з урахуванням особливостей конфігурації, реальних властивостей матеріалу, характеру діючих навантажень і моделювання складних процесів деформування і руйнування займає провідне положення в інженерній практиці.

Серед просторових конструкцій машинобудування і будівництва чільне місце займають тіла обертання або призматичні тіла, які можна розглядати в межах вісесиметричної або плоскої постановок. За геометричними параметрами вісесиметричні (плоскодеформовані) об'єкти традиційно поділяються на масивні (рис.1(а,б)), тонкостінні (рис.1(в,г,д))

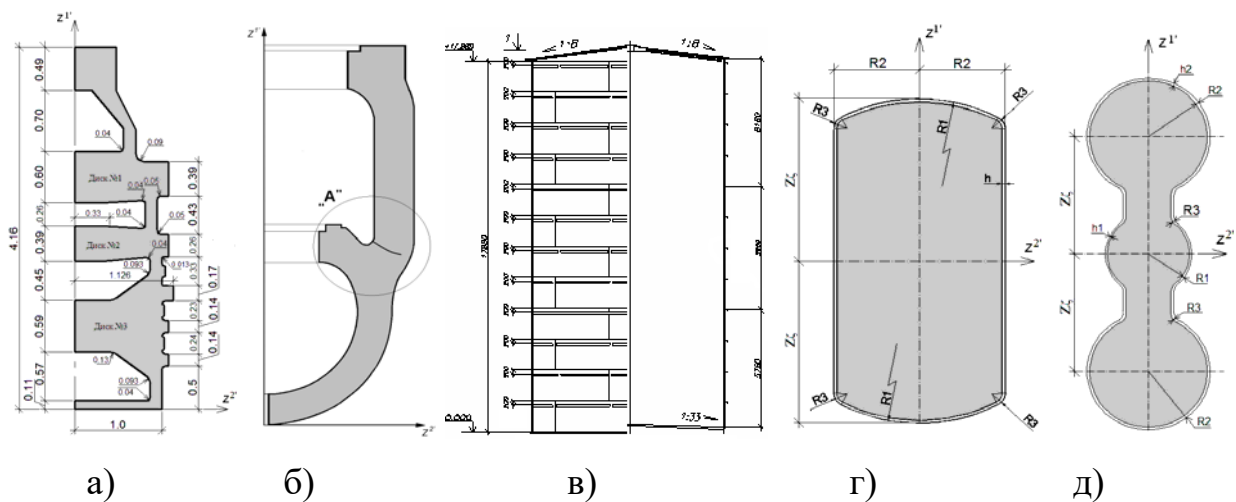


Рис.1

та комбіновані тіла складної структури, які є поєднанням масивних і тонкостінних елементів з суттєво відмінними механічними характеристиками (рис.2,а,б) і взаємодіючих тіл (рис.2,в).

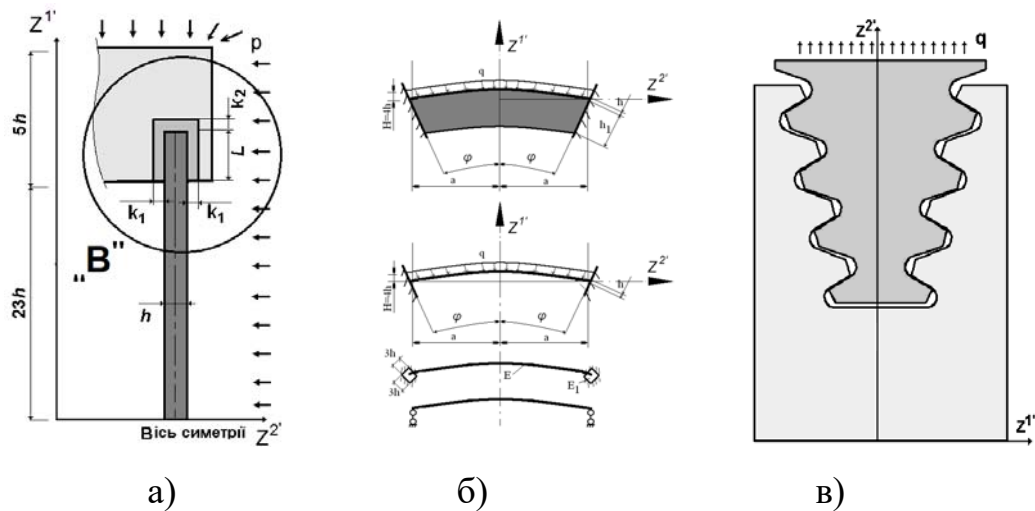


Рис.2.

До них відносяться об'єкти енергетичного машинобудування такі, як зварні ротори парових турбін (рис.1.(а)), корпуси розподільчої апаратури (рис.1.(б)), резервуари для зберігання великих обсягів різноманітної рідини (рис.1.(в)), дозправочні балони (рис.1.(г)), рятувальні апарати (рис.1,д), занурювані контейнери (рис.2.(а)), несучі елементи конструкцій сферичних кришок і люків різноманітного призначення (рис.2.(б)) вузли диско-лопаточного апарату ГТУ (рис.2.(в)) і багато інших з різних галузей сучасної техніки. Їх розрахунки можуть обмежуватись лінійнопружною постановкою при силовому(рис.1.(а), рис.2.(а)) або термосиловому (рис.1,б)) навантаженні. зростання вимог до сучасного рівня проектування таких відповідальних об'єктів потребує додаткової інформації про рівень розвитку незворотніх деформацій при малих (рис.1.(а)), (рис.2.(в)) і великих((рис.1.(г,д)) переміщеннях. Причому постановка задачі може ускладнюватися необхідністю дослідження впливу урахування геометричної нелінійності на величину критичних навантажень(рис.1.(г,д), і аналізу процесів втрати стійкості і закритичної поведінки досліджуваних конструкцій (рис.2.(б)).

Окремий клас становлять задачі пов'язані з математичним моделюванням процесів формозмінення заготовок в операціях обробки металів тисненням, таких як витяжка (рис.3) і осадка (рис.4), які супроводжуються розвитком великих деформацій пластичності.

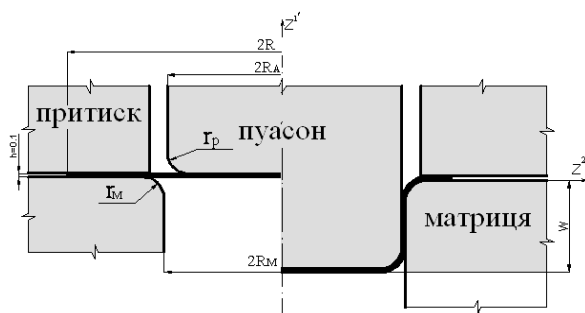


Рис 3



Рис.4.

Умови роботи багатьох відповідальних елементів конструкцій допускають наявність в них початкових тріщин, що виникають у процесі виготовлення, обробки, транспортування, монтажу і експлуатації. В останньому випадку причиною появи початкової тріщини, як правило, є накопичення пошкодженостей, пов'язане з циклічним або довготривалим статичним навантаженням. Урахування зміни початкової форми об'єктів на перебіг їх руйнування потребує коректного визначення параметрів тріщиностійкості матеріалу при дослідженні експериментальних зразків (рис.5.).

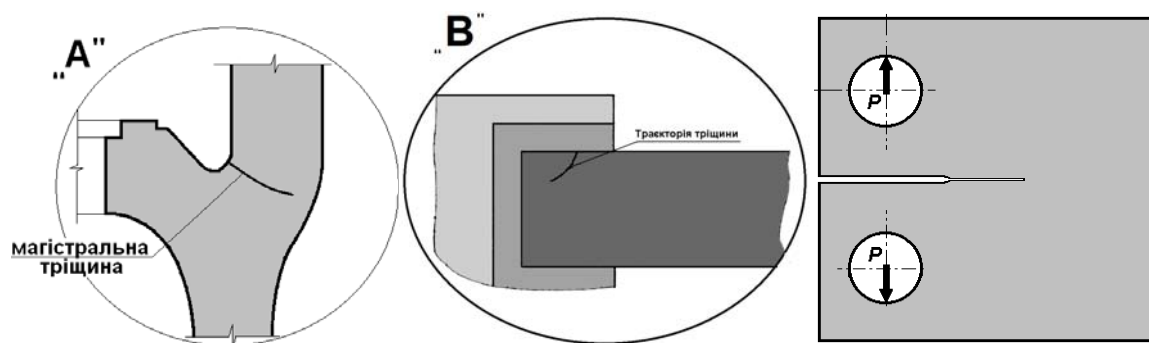


Рис.5.

Досить важливою проблемою є визначення розрахункового ресурсу елементів конструкцій при континуальному руйнуванні, пов'язаному з накопиченням пошкодженості в матеріалі при повзучості (рис.1.(в)) і дискретному руйнуванні, пов'язаному з розвитком магістральних тріщин (рис.1.(б), рис.2.(а)) під дією циклічного або критичного навантаження. Також слід відзначити, що умови контакту окремих деталей, які становлять, наприклад, ялинкове з'єднання

(рис.1.(в)), можуть змінюватися в процесі деформування. Ще суттєвіше змінюються граничні умови між заготовкою та інструментом в операціях обробки металів тисненням. При термосиловому навантаженні конструктивних елементів (рис.1.(б,в)) і заготовок в операціях обробки металів тисненням (рис.4) виникає необхідність визначення нерівномірних нестационарних температурних полів і пов'язаних з ними температурних деформацій.

Актуальність теми. Аналіз розглянутих вище реальних об'єктів дає змогу окреслити коло задач механіки деформівного твердого тіла і теплопровідності, розв'язок яких потрібен для подальшого удосконалення конструктивних рішень і технологічних процесів. Переважну більшість з розглянутих прикладів становлять об'єкти, дослідження яких потребує розв'язання фізично нелінійних задач з різним рівнем розвитку незворотних деформацій пластичності та повзучості. Значну кількість складають також оболонкові і комбіновані конструкції, розрахунок яких необхідно виконувати в геометрично нелінійній постановці при великих переміщеннях і малих незворотних деформаціях включно з задачами дослідження втрати стійкості і закритичної поведінки. Визначення НДС заготовок при математичному моделюванні процесів обробки металів тисненням необхідно також виконувати в геометрично нелінійній постановці при великих деформаціях пластичності і повзучості. Суттєвою проблемою, особливо для елементів енергетичних установок, є питання підвищення ресурсу їх експлуатації, що призводить до необхідності розв'язання задач континуального і дискретного руйнування. Вирішення цієї проблеми в рамках задач континуального руйнування ускладнюється необхідністю враховувати фактори, які хоч і незначною мірою впливають на параметри НДС проте істотно позначаються на величині розрахункового ресурсу. До цих факторів відносяться залежність констант матеріалу від температури і вплив геометричної нелінійності. В задачах дискретного руйнування обчислення ресурсу взагалі неможливе без математичного моделювання процесу розвитку початкової тріщини до критичної довжини, що потребує визначення її дійсної траєкторії в умовах нестационарних термосилових навантажень. Проектування вузлів з'єднання окремих

конструктивних елементів передбачає розв'язання контактних задач при декількох зонах взаємодії і розвитку незворотних деформацій. Визначення НДС заготовок в процесах обробки металів тисненням передбачає розв'язок контактних задач з перемінними граничними умовами і урахуванням тертя, фізичної і геометричної нелінійності, залежності характеристик матеріалу від перемінних в часі нерівномірних температурних полів, обчислення яких потребує розв'язання задач нестационарної теплопровідності.

Розв'язання кожної з поставлених задач можливий лише на основі чисельних методів, серед яких провідне місце займає метод скінченних елементів (МСЕ), що засвідчено його широким застосуванням в конструкторській практиці. Тим не менше в рамках окресленого кола задач є ряд проблем, ефективність розв'язання яких потребує подальшого розвитку існуючих підходів. Перш за все це стосується питання розробки скінченно елементної бази, орієнтованої на виділений клас об'єктів, яка давала б змогу побудови їх дискретних моделей, оптимальних за кількістю невідомих і обумовленістю загальної матриці розрахункових рівнянь. Серед підходів до вирішення цієї проблеми чільне місце займає моментна схема скінченних елементів (МССЕ). Розв'язання нелінійних задач стійкості, закритичної поведінки, суттєвого формозмінення, механіки тріщин в рамках МСЕ реалізується на основі використання крокових алгоритмів, як і при розв'язанні задач механіки руйнування, пов'язаних з визначенням траєкторії розвитку початкової тріщини, контактної взаємодії і нестационарної теплопровідності. Оскільки для ряду об'єктів ці задачі можуть накладатися одна на одну і потребувати одночасного розгляду виникає необхідність уніфікації та узгодження крокових алгоритмів їх розв'язання. Слід зазначити, що в межах методу скінченних елементів цим проблемам не приділено достатньої уваги.

Таким чином, створення на основі МССЕ ефективного чисельного підходу до комплексного розв'язання лінійних, фізично і геометрично нелінійних задач деформування, стійкості, континуального і дискретного руйнування, контактної взаємодії та нестационарної теплопровідності тонкостінних, масивних і

комбінованих тіл обертання складної структури є актуальною проблемою будівельної механіки і становить практичний інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) і Науково-дослідного інституту будівельної механіки КНУБА (НДІБМ КНУБА).

Дослідження проведені в межах наступних науково-дослідних робіт, що виконувались за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України:

2ДБ-2010 «Розробка теоретичних основ і методики чисельного моделювання напружено-деформованого стану і визначення ресурсу відповідальних об'єктів машинобудування з урахуванням геометрично-нелінійного деформування» (2010-2012 рр., № держ. реєстрації 0110U002280);

1ДБ-2013 «Створення теорії і методик дослідження тріщиностійкості просторових тіл методом скінченних елементів з урахуванням геометрично нелінійного деформування» (2013-2015 рр., № держ. реєстрації 0113U002288);

5ДБ-2015 «Створення теорії і методів дослідження невстановлених температурних полів та пружнопластичного деформування просторових тіл» (2015-2017 рр., № держ. реєстрації 0115U000714);

1ДБ-2016 «Дослідження формозмінення і стійкості масивних, тонкостінних та комбінованих вісесиметричних конструкцій при термосиловому навантаженні» (2016-2018 рр., № держ. реєстрації 0116U000839);

1ДБ-2019 «Створення комп'ютерних технологій дослідження несучої здатності просторових тіл складної форми з тріщинами на основі енергетичних критеріїв руйнування» (2019-2021 рр., № держ. реєстрації 0119U004841).

Автор брав участь у виконанні перелічених науково-дослідних робіт як виконавець і відповідальний виконавець.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є створення на основі розвиненої бібліотеки скінченних елементів і уніфікованих крокових алгоритмів

ефективного чисельного підходу до комплексного розв'язання лінійних, фізично і геометрично нелінійних задач деформування, стійкості, континуального і дискретного руйнування, контактної взаємодії та нестационарної теплопровідності тонкостінних, масивних і комбінованих тіл обертання складної структури і визначення на цій основі ресурсу, тріщиностійкості і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень.

Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:

побудова на основі МССЕ розв'язувальних співвідношень просторових, оболонкових, універсальних скінченних елементів загального і модифікованого варіантів для визначення напружено деформованого стану, нестационарних температурних полів, моделювання контактної взаємодії тіл обертання і створення розвиненої бібліотеки скінченних елементів;

уніфікація крокових алгоритмів інтегрування по параметрам навантаження, переміщення, часу, прирощення довжини магістральної тріщини для розв'язання лінійних і нелінійних задач деформування, стійкості, закритичної поведінки, суттєвого формозмінення, механіки руйнування і нестационарної теплопровідності;

створення на основі фундаментальних положень нелінійної теорії пружності, нових розрахункових співвідношеннях МССЕ і прийомах покращення обумовленості систем нелінійних рівнянь методики чисельного дослідження еволюції НДС заготовок в процесах обробки металів тисненням при великих незворотних деформаціях;

розробка ефективних алгоритмів розв'язання контактних задач взаємодії окремих деформівних тіл між собою, з жорсткими перепонами при змінних граничних умовах і з урахуванням тертя на поверхнях контакту;

отримання основного і модифікованого варіантів розрахункових скінченноелементних співвідношень задачі нестационарної теплопровідності і розробка алгоритмів їх розв'язання з урахуванням формозмінення;

розробка алгоритмів чисельного моделювання розповсюдження початкових тріщин, отримання їх траєкторій на основі розвитку модифікованого методу реакцій з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності, обчислення параметрів механіки руйнування по довжині магістральної тріщини і визначення її критичної довжини та розрахункового ресурсу;

реалізація розробленого чисельного підходу у вигляді розвиненого програмного забезпечення з використанням концепції багатофрагментної побудови нерегулярних сіткових моделей для оптимізації процесу дискретизації реальних об'єктів складної форми і структури;

аналіз достовірності, збіжності та ефективності розрахункових співвідношень, кроково-ітераційних алгоритмів моделювання еволюційних процесів, методів визначення параметрів руйнування на основі розв'язання значної кількості контрольних прикладів шляхом порівняння базових і модифікованих варіантів з аналітичними, чисельними та експериментальними опублікованими даними;

дослідження особливостей термовязкопружнопластичного деформування, стійкості, континуального та дискретного руйнування і визначення ресурсу, тріщиностійкості і несучої здатності відповідальних конструктивних елементів, вузлів і деталей, пов'язаних з проектуванням об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень.

Об'єктом дослідження є процеси фізично і геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості, континуального та дискретного руйнування, змін в часі нестационарних температурних полів масивних, тонкостінних і комбінованих тіл обертання складної структури під дією силових, кінематичних та температурних чинників.

Предметом дослідження є величини параметрів напружено-деформованого стану, континуального і дискретного руйнування, розрахункового ресурсу, зусиль протяжки та осадки, критичні значення навантажень при втраті стійкості та розмірів магістральних тріщин.

Методи дослідження. Дискретизація масивних і тонкостінних тіл обертання виконується методом скінчених елементів на основі вихідних співвідношень вісесиметричної задачі теорії пружності і статичних гіпотез тонких оболонок. Для отримання розрахункових співвідношень використовуються основні положення моментної схеми скінчених елементів. При виводі формул для обчислення коефіцієнтів матриць жорсткості та вузлових реакцій інтегрування по площі елементів проводиться як чисельно так і в замкненому варіантах. Побудова дискретних моделей комбінованих тіл обертання складної структури реалізується шляхом розробки універсальних СЕ, розрахункові співвідношення яких базуються на статичних гіпотезах оболонок середньої товщини. Моделювання взаємодії систем деформівних тіл реалізується на основі розробки спеціальних СЕ, які забезпечують умови не проникнення та відсутності розтягуючих напружень, нормальних до поверхні контакту. Для розв'язання фізично нелінійних задач термопружнопластичності в якості вихідних прийняті співвідношення теорії пластичного течіння з ізотропним спрочненням при умові течіння Мізеса, а опис деформування при наявності повзучості здійснений із використанням рівнянь теорії течіння в формі Качанова-Работнова, які містять феноменологічний скалярний параметр пошкоженості. При розв'язанні геометрично нелінійних задач прийняті основні положення нелінійної теорії пружності, які задовольняють вимогам індиферентності, енергетичної сумісності та об'єктивності похідних. Вивід формул для обчислення вузлових реакцій виконується в актуальній конфігурації, а коефіцієнтів матриці жорсткості – в проміжній відрахунковій з урахуванням нелінійної залежності між переміщеннями і деформаціями. В якості вихідних співвідношень для визначення змінних у часі температурних полів прийняті рівняння задачі нестационарної теплопровідності. Моделювання еволюційних процесів фізично і геометрично нелінійного деформування, континуального і дискретного руйнування та теплопереносу виконується на основі крокових алгоритмів в поєднанні з ітераційною процедурою Ньютона-Канторовича і екстраполяцією невідомих. При великих незворотних деформаціях і відносно незначних пружних передбачається

можливість покращення обумовленості матриці системи нелінійних рівнянь шляхом її регуляризації. Для розв'язання контактних задач з перемінним граничними умовами використовується підхід із залученням допоміжної системи координат, яка відтворює довільну конфігурацію границі. Визначення траєкторії розвитку початкової тріщини здійснюється кроковим алгоритмом, який ґрунтується на диференційних залежностях росту тріщини, в поєднанні з модифікованим варіантом методу реакцій, узагальненим для обчислення параметрів нелінійної механіки руйнування при наявності фізичної та геометричної нелінійності. Остаточна конфігурація магістральної тріщини отримується шляхом використання процедури згладжування ламаної траєкторії, на основі якої підраховується її критична довжина і розрахунковий ресурс при циклічному навантаженні. Достовірність отримуваних результатів і ефективність розроблених підходів ґрунтуються на порівнянні з опублікованими даними експериментальних, аналітичних і чисельних досліджень інших авторів шляхом розгляду контрольних прикладів, які охоплюють основні особливості поставлених задач.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у створенні узагальненої концепції ефективного чисельного підходу до математичного моделювання еволюційних процесів фізично і геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки, континуального і дискретного руйнування, контактної взаємодії, нестационарного теплопереносу та їх можливих різноманітних комбінацій для тонкостінних, масивних і комбінованих тіл обертаня складної структури. При цьому:

- вперше на основі розвитку основних положень МССЕ з єдиних позицій теорії пружності отримані розрахункові співвідношення об'єктно орієнтованих і спеціальних контактних СЕ для апроксимації масивних, тонкостінних і комбінованих тіл обертаня складної структури та систем взаємодіючих деталей стиковочних вузлів збірних конструкцій;

- проведена уніфікація крокових алгоритмів інтегрування диференційних рівнянь різної фізичної природи і передбачена можливість зміни конкретних

значень параметра інтегрування таких як інтенсивність силового навантаження, величина вимушених переміщень, прирощення довжини магістральної тріщини або відрізок часу експлуатації на протязі окремих інтервалів при моделюванні загального еволюційного процесу для мінімізації обсягу обчислювальних витрат;

- створено ефективний підхід до розв'язання геометрично нелінійних задач стійкості, закритичної поведінки і формозмінення на основі побудови нових розрахункових співвідношень та прийомів покращення збіжності алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь при великих незворотніх деформаціях;

- розроблено і реалізовано алгоритми розв'язання контактних задач при взаємодії окремих тіл обертання, при перемінних граничних умовах та з урахуванням тертя на поверхнях контакту;

- створена методика розв'язання задач тріщиностійкості тіл обертання з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності шляхом узагальнення модифікованого методу реакцій а також моделювання процесів розвитку початкових тріщин для визначення траєкторій магістральних тріщин, їх критичної довжини і розрахункового ресурсу при термосиловому навантаженні

- отримано нові розв'язки задач фізично і геометрично нелінійного деформування, контактної взаємодії, стійкості, закритичної поведінки, формозмінення при великих незворотніх деформаціях, континуального і дискретного руйнування та їх комбінацій для реальних вісесиметричних конструкцій при термосиловому нестационарному навантаженні.

Достовірність результатів обґрунтовується коректністю математичних перетворень, використаних в ході отриманні розв'язувальних співвідношень МССЕ, малими похибками отриманих результатів розв'язання тестових задач із експериментальними даними або розрахунковими результатами інших авторів, результати досліджень збіжності скінченнолементних розв'язків при послідовному збільшенні числа ступеня дискретизації розрахункових моделей за просторовими і часовою координатами.

Практичне значення одержаних результатів полягає в створенні чисельної методики і програмних засобів для розв'язання важливої науково-

технічної проблеми математичного моделювання процесів термов'язкопружнопластичного деформування з урахуванням геометричної нелінійності, втрати стійкості, континуального та дискретного руйнування і визначення на цій основі розрахункового ресурсу тонкостінних, масивних і комбінованих відповідальних конструкцій складної структури, що знаходяться під дією термосилового навантаження. Розроблені програмні засоби використано в НДІБМ КНУБА при виконанні науково-дослідних робіт, фінансування яких здійснювалось з державного бюджету на основі результатів конкурсу наукових проектів, на кафедрі будівельної механіки КНУБА при виконанні магістерських робіт. Результати дисертаційної роботи можуть застосовуватись у різних галузях техніки для визначення несучої здатності деталей та конструкцій, що являють собою вісесиметричні тіла складної структури.

Особистий внесок здобувача. Основні результати та положення, які становлять суть (зміст) дисертації, отримані автором самостійно. В індивідуальних публікаціях і роботах, підготовлених у співавторстві, викладені наступні наукові результати, що належать автору: особливості використання моментної схеми скінчених елементів при лінійних [1, 15] і нелінійних [1, 16] розрахунках оболонок і пластин; розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів [1, 12]; ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень [1, 7]; методика та алгоритм розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної [1, 3, 17], нестаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ [1, 2, 13, 22]; вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл [1, 10, 11, 20]; алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини [1, 8]; напружено-деформований стан і формозмінення в тілах обертання складної структури [1, 5, 6, 18, 19]; математичне моделювання процесів розвитку магістральних тріщин в тілах обертання складної структури з урахуванням формо змінення [1, 4, 9, 14, 21]. Проведене чисельне обґрунтування

достовірності отримуваних результатів шляхом дослідження їх збіжності та порівнянням з результатами, отриманими іншими авторами та із застосуванням інших СЕ баз [1-22] та отримані розв'язки практичних задач про визначення ресурсу, тріщиностійкості та несучої здатності відповідальних елементів конструкцій [1, 4-6, 9, 18-22].

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи та отримані в ході її виконання результати доповідались та обговорювались на:

Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (м.Дніпродзержинськ, 16-29квітня 2013 р.);

«Recent Studies of Applied Sciences» International scientific-practical conference. Section: TECHNICAL SCIENCE (Kyiv, Ukraine 15-17 April 2015);

International scientific-practical conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2017” (Kyiv, 28.11-01.12.2017);

International scientific-practical conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2018” (Kyiv, 28-30.11.2018);

Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (м.Київ, 18-20 жовтня 2018 р.);

Наукових та науково-практичних конференціях Київського національного університету будівництва і архітектури (м.Київ, 2011-2017 рр.).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на міжкафедральному семінарі КНУБА (м.Київ, 2019 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 31 науковій праці, в тому числі в одній монографії, в 21 статтях у фахових наукових журналах і збірниках наукових праць і 9 публікаціях матеріалів міжнародних і вітчизняних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, десяти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг дисертації становить 339 сторінок, у тому числі 164 рисунків, 18 таблиць, список

використаних джерел із 301 найменування на 28 сторінках, додаток на трьох сторінках.

Подяки. Автор вважає за необхідне висловити глибоку подяку науковому консультанту – завідувачу кафедри будівельної механіки КНУБА, директору НДІБМ КНУБА, доктору технічних наук, професору Баженову Віктору Андрійовичу, а також завідувача кафедрою динаміки і міцності машин та опору матеріалів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», доктору технічних наук, професору Пискунову Сергію Олеговичу докторам технічних наук, професорам Гуляру Олександрю Івановичу, Сахарову Олександрю Сергійовичу за змістовні і корисні зауваження, внесені при виконанні роботи.

РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕННЯ ФІЗИЧНО І ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ І РУЙНУВАННЯ

Основи теорії і класичні методи розв'язання задач пружності та термопружності викладені в роботах А.Я. Александрова, М.І. Безухова, В.І. Блоха, М.М. Бородачова, П.П. Ворошка, О.М. Гузя, С.П. Демидова, О.А. Іллюшина, А.Д. Коваленка, В.Д. Купрадзе, Л.С. Лейбедзона, О.В. Ликова, А.І. Лур'є, В.В. Мельникова, В. Новацького, П.Ф. Папковича, Б.Є. Победри, Я.С. Підстригача, Ю.К. Рубцова, І.Н. Снеддона, Ю.І. Соловйова, С.П. Тимошенка, Н.Г. Хомасуридзе, М.О. Шульги [4, 24, 28, 33, 43, 62, 77, 92, 93, 106, 113, 120, 122, 142, 167, 172, 180, 181, 195, 209, 216, 219, 228, 244] та інших авторів. В цих роботах розглянуті питання загальної теорії пружності та динамічної теорії пружності. Основними методами розв'язання задач лінійної і нелінійної теорії пружності є прямий метод, зворотній метод та напівзворотній метод Сен-Венана, які дозволяють отримати розв'язки задач теорії пружності для тіл простої форми в замкненому вигляді.

Значні рівні зовнішніх навантажень спричиняють виникнення в матеріалі деформацій пластичності. В перших роботах по теорії пластичності Б. Сен-Венаном, А. Лявом, Г. Генкі і Л. Прандтлем викладені основні рівняння теорій пластичності та розглянуто їх застосування до розв'язання найпростіших задач. В подальшому теорія й методи розв'язання задач пластичності розроблялися багатьма вітчизняними й закордонними вченими, зокрема такими як М.І. Безухов, Г.І. Биковцев, І.А. Біргер, М.І. Бобир, К. Васидзу, Д.А. Гохфельд, В.С. Грешнов, Д.Д. Івлєв, О.О. Іллюшин, О.Ю. Ішлинський, В.Г. Зубчанинов, Л.М. Качанов, В.Д. Ключников, М.М. Малінін, Р. Мізес, М.С. Можаровський, В.В. Москвитин, А. Надаї, Г.С. Писаренко, Б.Є. Победря, К.М. Русинко, В.В. Соколовський, В.Г. Савченко, М.Л. Уилкінс, Р. Хілл, Ю.М. Шевченко [1-3, 24, 27, 29, 36, 40, 55, 57, 86, 88, 92, 93, 97, 103, 105, 108, 135, 146, 147, 149, 150, 158, 162, 176, 180, 198, 210, 223, 227, 240, 241] та ін. В перелічених роботах

визначені умови виникнення деформацій пластичності і закони для опису напружено-деформованого стану в умовах пружно-пластичного деформування для різних умов навантаження.

Найбільш проста модель, що враховує пластичне деформування матеріалу, ґрунтується на деформаційній теорії пластичності. Ця модель передбачає тотожну залежність між деформаціями і напруженнями в пружно-пластичному тілі. Деформаційна теорія знайшла широке застосування в практичних розрахунках, але експериментальні дослідження показали, що рівняння деформаційної теорії пластичності справедливі для простих процесів навантаження або близьких до них. При складних процесах навантаження застосування деформаційної теорії може привести до суттєвих похибок. Деформаційна теорія пластичності не враховує вплив історії навантаження, оскільки залежності між деформаціями і напруженнями встановлюються для скінчених прирощень цих величин.

В багатьох випадках, найбільш виправданим є застосування теорії пластичного течіння, в якій встановлюється зв'язок між нескінченно малими прирощеннями пластичних деформацій і напруженнями, що дозволяє використовувати цю теорію для опису пластичного деформування при складному навантаженні.

Температурні напруження, які виникають при наявності нерівномірного нагріву також можуть перевищувати межу текучості і призводити до появи суттєвих пластичних деформацій. У роботах І.А. Біргера, Д.А. Гохфельда, В.Г. Зубчанинова, О.О. Іллюшина, М.С. Можаровського, Г.С. Писаренка, В.Г. Савченка, Ю.М. Шевченка й інших авторів, набула розвитку теорія пластичності при неізотермічних процесах простого й складного навантаження. У роботах [27, 55, 83, 88, 92, 151, 172, 176, 201, 236-239, 240, 241] наведені розв'язувальні співвідношення й розроблені методи розв'язання задач термопластичності для опису процесів деформування по прямолінійних траєкторіях або траєкторіям малої кривизни. У роботах [43, 86, 88, 241] побудовані рівняння стану для опису процесів деформування по різних складних

траєкторіях. Відмітимо, що для задач термопластичності умови простого навантаження, як правило не виконуються або виконуються наближено для окремого класу задач і, відповідно, виправданим є застосування теорії пластичного течіння [234].

Огляди з питань розв'язання задач пластичності і термопластичності наведені в роботах [143, 145, 201, 237]. Як свідчать зроблені в цих роботах висновки, на сьогоднішній день методи розв'язання задач пластичності та термопластичності є достатньо розвиненими. Аналітичні результати отримані для найпростіших тіл [36, 86, 88, 93, 97, 135, 150, 176, 198, 240]. Отримана певна кількість розв'язків задач для вісесиметричних та кубоподібних тіл, тіл обертання, оболонок та ін. Розгляд більш складних об'єктів вимагає застосування чисельних методів.

Основні положення теорії та методів розв'язання задач термов'язкопружнопластичності викладені в роботах І. А. Біргера, Д. Друкера, О.О. Іл'юшина, Ю.І. Кадашевича, Л.М. Качанова, Ю.Г. Коротких, М.М. Малініна, Р. Мізеса, Г.С. Писаренка, Ю.М. Работнова, В.М. Соколовського, Р. Хілла, Ю.М. Шевченка, К.Ф. Одквіста [27, 28, 31, 50-52, 80, 92, 98, 102-104, 111, 135-139, 145, 176, 187, 188, 210, 236-242, 283]. Огляди з питань розв'язання вказаних задач наведені в роботах В.А. Мерзлякова, В.Г. Савченка, Ю.М. Шевченка [143, 145, 201, 237, 239].

В більшості публікацій розглядаються задачі в двовимірній постановці. Наприклад в роботі [143] викладені основні результати дослідження по розробці теорії та методів розрахунку термов'язкопружного напружено-деформованого стану гнучких шаруватих оболонок обертання змінної у двох напрямках товщини при неосесиметричних неізотермічних процесах деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторіях малої кривизни з урахуванням історії їх протікання, а в роботі [144] розглядався пружно-пластичний напружено-деформований стан (НДС) нескінченно довгої кругової циліндричної оболонки, який був визначений за допомогою чисельного інтегрування вздовж направляючої, і порівнювався з розв'язком, який отриманий з використанням

тригонометричних рядів Фур'є. В якості прикладу, в роботі [154] було показано розв'язок вісесиметричної задачі пружно-пластичного деформування розрахунку напружень в роторі середнього тиску турбіни. Монографія [202] також містить приклади досліджень пружно-пластичного деформування зазначених об'єктів.

Опис робіт, присвячених геометрично нелінійному термов'язкопружнопластичному деформуванню оболонок, міститься в монографії і оглядових статтях [20, 134, 143, 145]. Наприклад в роботах [143, 144] задача термопластичності формується за допомогою геометрично нелінійної теорії оболонок, що базується на гіпотезах Кіргофа-Лява. В роботах [46, 47] наведено приклад розрахунку геометрично нелінійного пружнопластичного та термов'язкопружнопластичного стану двошарової гофрованої оболонки середньої товщини. В [95, 96] розглянута проблема комплексного моделювання зміни властивостей матеріалу в залежності від часу, температури та рівня незворотних деформацій для чисельного дослідження формозмін просторових оболонок в умовах повзучості. Об'єктивність величин, що використовуються для формулювання законів стану матеріалу, обґрунтована за допомогою змінної відлікової конфігурації. В роботі [233] досліджено пружно-пластичний стан конічних оболонок, послаблених еліптичним отвором, при врахуванні скінчених прогинів: дано постановку задачі та методику їх чисельного розв'язання з врахуванням фізичної та геометричної нелінійності.

Значні успіхи в області теоретичних і експериментальних досліджень різних процесів, які супроводжуються великими пружно-пластичними деформаціями, викладені в працях Б.О.Горлача, В.І.Кондоурова, В.І.Левитаса, О.О.Поздеева, Д.Д.Работягова, Н.Н.Lee, F.Sidoroff [53, 110, 112, 182, 189, 275, 293].

В якості прикладів безпосереднього застосування методик розглянуто різні технологічні процеси, пов'язані з пластичним формозмінням металів, такі як холодне [116, 232] і гаряче [138, 192, 194] осадка циліндричних і кільцевих заготовок, пресування [224, 229], пряме видавлювання [182], електровисадка [182, 221], витяжка [163] і т. п.

Систематичне викладення основних засад теорії повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалів і методів розв'язання задач проведено в роботах О.О.Іл'юшина, Л.М.Качанова, Ю.М.Работнова, К.Ф.Одqvist та ін. [92, 102-104, 188, 283], де сформульовані основні феноменологічні теорії повзучості, наведені дані про їх експериментальне підтвердження, а також здійснено розв'язання простіших задач. При розв'язанні задач для опису процесу деформування матеріалу в умовах повзучості переважно використовується теорія течіння наприклад [82, 83, 136, 194, 196]. В [136, 188] відзначається, що теорія течіння добре описує процеси деформування при повільно змінюваних навантаженнях. Крім того, застосування теорії течіння є виправданим для матеріалів, деформування яких супроводжується незворотними структурними перетвореннями [211]. Також відомі результати, отримані на основі теорії зміцнення [84, 136, 168], теорії старіння [83, 188, 295], енергетичної теорії повзучості [272].

Подальший розвиток теорії і методів розв'язання задач повзучості проведено в роботах вітчизняних вчених В.П.Голуба, Г.С.Писаренка і М.С.Можаровського, М.І.Бобиря, К.М.Русінко, Ю.М.Шевченка і О.З.Галішина, Г.І.Львова і О.К.Морачковського та інших українських дослідників [3, 29, 50-52, 121, 122, 151–153, 157, 176, 198, 236-242], а також в роботах О.А.Гохфельда, М.М.Малініна, О.В.Сосніна, С.А.Шестерикова, Дж.Бойла і Дж.Спенса, Ф.Макклінток, С.Тайри, А.Яkowluk та інших авторів. [31, 109, 119, 126, 136, 185, 214]. Грунтовні огляди з проблем теорії повзучості наведені в [3, 239].

Вище перелічені феноменологічні теорії повзучості встановлюють функціональні залежності між напруженнями, деформаціями, швидкостями деформацій повзучості і часом. В той же час результатами експериментальних досліджень підтверджено одночасність протікання процесів накопичення деформацій повзучості і пошкодженості в матеріалі [25, 50-52, 109]. В зв'язку з цим Ю.М.Работновим [188] відзначається, що визначення довговічності елементів конструкцій в умовах складного неоднорідного напруженого стану необхідно проводити на основі загальної теорії повзучості, що враховує процес

тріщиноутворення, пов'язаний із накопиченням в матеріалі розсіяних пошкоджень. Аналіз літературних джерел свідчить, що урахування цих структурних змінень в матеріалі може бути виконане за допомогою статистичного або феноменологічного підходів.

В першому випадку оцінка порушень суцільності проводиться на основі розгляду фізичної природи повзучості і вимірювання відповідних мікроскопічних параметрів (величин, що пов'язані із розмірами мікроскопічних дефектів) або фізико-механічних властивостей матеріалу [41], таких як межа текучості, модуль пружності, коефіцієнт Пуасона, а також щільність, електричний опір та ін. Для здійснення кількісної оцінки порушень суцільності ці величини співвідносять із відповідними значеннями для непошкодженого матеріалу. Деякі з цих підходів було використано для розробки експериментальних методів визначення пошкодженості матеріалу [243]. Але до теперішнього часу не складена однотайна думка про найбільш об'єктивний засіб оцінки пошкодженості матеріалу.

В межах феноменологічного підходу до опису процесу руйнування при повзучості пошкодження матеріалу визначається як будь-яке мікроструктурне перетворення, що призводить до будь-якого змінення його властивостей [159]. В зв'язку з цим широке розповсюдження отримали методи, що передбачають використання в якості міри пошкодженості уведеного в скалярній, векторній або тензорній формі феноменологічного параметру пошкодженості. У випадку дослідження процесу повзучості для опису зміни в часі параметра пошкодженості використовується кінетичне рівняння, що пов'язує змінення пошкодженості з величиною та тривалістю навантаження, величиною накопичення деформації повзучості, і параметрами напружено-деформованого стану [32]. Цей підхід, що ґрунтується на використанні моделі безперервно-пошкодженого середовища, є переважним. Методологія розв'язання задач повзучості з використанням феноменологічного параметру пошкодженості успішно використовується для визначення довговічності елементів конструкцій

та встановлює взаємозв'язок між процесом прихованого накопичення розсіяних пошкоджень і макроруйнуванням [50].

Вперше точне математичне трактування одночасного протікання процесів повзучості і накопичення пошкоджень матеріалу на основі феноменологічного підходу було подане в роботах Ю.М.Работнова і Л.М.Качанова [104, 188]. Подальший розвиток теорії континуального руйнування проведений в роботах [31, 41, 50–52, 84, 92, 102, 109, 119, 152, 242 та ін.]. Форма подання параметра пошкоженості в рівняннях повзучості визначається необхідністю опису анізотропних властивостей матеріалу і відповідного спрямованого характеру накопичення пошкоджень.

Використання параметра пошкоженості матеріалу при описі процесу деформування в умовах повзучості здійснено в роботах вітчизняних [50–52, 151, 152, 242] та багатьох зарубіжних вчених [31, 84, 92, 119, 136, 159, 164, 187, 188, 250, 251, 269, 272, 279, 283, 285, 291, 295]. В більшості з перелічених робіт розглянуті одновимірні, плоскі та вісесиметричні тестові задачі, при цьому в [50, 51, 52, 84] відзначено збіг результатів розрахунку із використанням параметра пошкоженості з експериментальними даними при визначенні напружено-деформованого стану і часу до руйнування.

Необхідність і доцільність використання феноменологічного параметра пошкоженості при розв'язанні задач про прогнозування довговічності елементів конструкцій в умовах тривалого навантаження при високих температурах відзначається в [84, 188]. Це дає принципову можливість аналітичної оцінки моменту зародження макротріщини [50]. Теорія континуального руйнування, як єдиний підхід до моделювання процесів руйнування різної фізичної природи, є зручним інструментом для розв'язання інженерних задач, який відрізняється простотою і потребує мінімальної кількості експериментальних даних [32].

Таким чином, при розв'язанні задач повзучості доцільним є використання рівнянь теорії структурних параметрів Ю.М.Работнова, що містять параметр пошкоженості матеріалу. Це дозволяє проводити опис процесів накопичення деформацій повзучості і пошкоженості матеріалу, які одночасно перебігають у

матеріалі із плином часу. Огляди з питань розв'язання задач повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу наведені в роботах [35, 94, 118, 119, 263]. Важливим практичним результатом розв'язання задач повзучості і континуального руйнування є визначення розрахункового ресурсу об'єктів, який обмежується моментом досягнення параметром пошкодженості критичного значення. Приклади розрахунку даних задач для оболонок викладені в роботах [143, 144, 153], для масивних тіл [50, 51].

Розв'язок задач повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу в геометрично нелінійній постановці для вісесиметричного термов'язкопружнопластичного стану гнучких оболонок проведений в роботах О.З. Галішина [47, 48 та ін.]. При цьому використані вихідні співвідношення, що враховують деформації поперечного зсуву, та описують деформацію елемента тіла по траєкторіях малої кривизни. При визначенні еквівалентного напруження, що входить до кінетичних рівнянь пошкодженості і повзучості, ураховано вплив виду напруженого стану. В якості прикладу розглянуто термов'язкопружнопластичне деформування та визначено час до руйнування гнучкої гофрованої оболонки.

Розв'язання нестационарних задач теплопровідності являє собою достатньо складну задачу, що обумовлено саме зміненням розподілення температур в часі і необхідністю використання крокових алгоритмів. Теоретичні основи задач теплопровідності викладено розглянуто в класичних монографіях Коваленко А.Д., Седова Л.І. [106, 204, 205]. Окремі питання розв'язку двовимірних задач теплопровідності викладені в роботах [37, 117, 124, 204, 205, 277]. Так в роботі [124] запропоновано розв'язок двовимірної нестационарної задачі теплопровідності на основі МСЕ, в роботі [277] використовується скінченно-різницевий підхід, в роботі [37] на основі інтегральних рівнянь, так в роботі [106] чисельно реалізовано метод лінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

Нерівномірний нагрів об'єктів приводить до нерівномірного теплового розширення (температурних деформацій) його окремих частин і змін фізико-механічних властивостей матеріалу. Це викликає виникнення додаткових

складових напружень, визначення яких потребує розв'язання задач термопружності. В відомих роботах розглянуто низку класичних модельних задач термопружності, зокрема, отримані розв'язки для тіл обертання – товстостінної труби [172], кільця [120], диска [106, 195], сферичного тіла [124] – під впливом нерівномірно розподіленого температурного навантаження. Розв'язання більш складних з точки зору конфігурації об'єктів і розподілення зовнішніх навантажень задач вимагає застосування чисельних методів.

Розв'язання задач із визначення напружено-деформованого стану тіл, що знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі температурних полів, вимагає визначення розподілення температур в їх об'ємі, що в свою чергу потребує розв'язання задач теплопровідності. Для розв'язання диференційних рівнянь, що описують процеси теплопровідності застосовують методи розділення змінних, інтегральні перетворення, чисельні методи та ін., які викладені в роботах А.Х. Димніча, Г. Карслоу, А.Д. Коваленка, О.В. Ликова, М.А. Михєєва, Г.Ф. Мучника [79, 101, 106, 123, 148, 160] та ін., що присвячені теорії теплопровідності.

Визначення напружено-деформованого стану (НДС) тіл обертання в процесах тривалого навантаження і нелінійного деформування на основі МСЕ потребує побудови оптимальних дискретних моделей із мінімальною кількістю невідомих і мінімізації кількості обчислень при розв'язання систем рівнянь МСЕ. Питанням створення засобів скінчено-елементного моделювання напружено-деформованого стану тіл обертання на основі МСЕ як в двовимірній так і в просторовій постановках присвячені роботи, виконані під керівництвом О.С.Сахарова, Г.І.Львова, П.П.Гонтаровського [121, 122, 149, 157] та інших вітчизняних учених. Останнім часом широкого застосування набули промислові комерційні програмні комплекси вітчизняного (ЛІРА [115], SCAD [45]) та іноземного (ANSYS, Nastran, ABAQUS) виробництва з розвиненими скінченно елементними бібліотеками. В той же час в них відсутні скінченні елементи для побудови дискретних моделей комбінованих конструкцій з єдиних позицій

просторової задачі теорії пружності при дослідженні формозмінення і процесів втрати стійкості в нестационарному температурному полі.

При моделюванні деформування тонкостінних конструкцій важливою проблемою є дослідження їх стійкості. Питання фізично- і геометрично-нелінійного деформування оболонок досліджено в роботах Ю.М.Шевченка і О.З. Галішина: проведено урахування ортотропії матеріалу, та невісесиметричного напружено-деформованого стану. При цьому не розглянуті питання стійкості та моделювання напруженого стану комбінованих об'єктів [47, 48, 258, 259]. Окремі питання визначення напружено-деформованого стану, стійкості і закритичної поведінки тонкостінних конструкцій в пружній постановці розглянуто в роботах М. П. Семенюка, Я.М.Григоренка [58, 169, 206], також відома низка результатів з дослідження стійкості анізотропних оболонок при пружному деформуванні (наприклад [209, 218]). Значний обсяг експериментальних досліджень з питань стійкості оболонок зібраний і проаналізований в роботах А.П Дзюби [78].

Роботи іноземних авторів, наприклад [260, 296], містять опис і аналіз методик визначення стійкості оболонок з недосконаlostями при пружному деформуванні та відповідні числові результати.

Таким чином, в публікаціях останніх років відображені результати, які стосуються дослідження деформування оболонкових конструкцій при нелінійному деформуванні, або дослідження стійкості в пружних постановках. Відсутні результати, що стосуються дослідження НДС оболонок в нестационарному температурному полі та комбінованих конструкцій.

Опис робіт, присвячених формозміненню оболонок, міститься в монографії і оглядових статтях [20, 134, 143, 145]. Наприклад в роботах [143, 144] задача термопластичності формується за допомогою геометрично нелінійної теорії оболонок, що базується на гіпотезах Кіргофа-Лява. В роботі [46, 47] наведено приклад розрахунку геометрично нелінійного пружнопластичного та термов'язкопружнопластичного стану двошарової гофрованої оболонки середньої товщини. В роботах [95, 96] для чисельного дослідження

формозміннення оболонок проведено комплексне моделювання зміни властивостей матеріалу в залежності від часу, температури та рівня незворотних деформацій в умовах повзучості. Об'єктивність величин, що використовуються для формулювання законів стану матеріалу, обґрунтована за допомогою змінної відлікової конфігурації. В роботі [233] досліджено пружно-пластичний стан конічних оболонок, послаблених еліптичним отвором, при врахуванні скінчених прогинів: дано постановку задачі та методу їх чисельного розв'язання з врахуванням фізичної та геометричної нелінійності.

Моделювання процесів теплопереносу та пружно-пластичного деформування неоднорідних тіл обертання з довільною формою і структурою меридіонального перерізу потребує розв'язання складних еволюційних задач. В зв'язку з цим розробка методик дослідження нестационарних просторових полів температури, деформацій і напружень в неоднорідних тілах обертання з урахуванням залежності теплофізичних і механічних характеристик від температури і нелінійної поведінки матеріалу за межею пружності є актуальною проблемою, що має практичне значення.

Розвиток теоретичних засад механіки руйнування пов'язаний з працями А.Гріффітса, Д.Дагдейла, Дж.Ірвіна, Е.Орована, Дж.Райса, Г.П.Черепанова, [190, 230, 255, 264, 267, 284]. В них були викладені основні гіпотези механіки руйнування, приведені математичні моделі для опису напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини за допомогою параметрів механіки руйнування, сформульовані критерії тріщиностійкості. Перша задача критичного стану тіла з тріщиною була вирішена А.А. Гріффітсом [264] з позиції загального енергетичного балансу. Пізніше Дж.Н. Снеддон [294] визначив розподілення напружень у вершині тріщини в пружному тілі. Покладаючись на його результати Дж.Р. Ірвін [267] в якості критичних величин запропонував використовувати параметри системи рівнянь з розв'язків Дж.Н. Снеддона [294]. Ці параметри отримали назву коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) [154].

Подальший розвиток теорії і методів розв'язання задач механіки руйнування [19] здійснений в роботах таких вітчизняних та іноземних учених як

О.Є. Андрейків [6, 7], С. Атлурі [13], В.В. Божидарник [30], О.М. Гузь [63, 64], Т. Єкоборі [81], Л.М. Качанов [102], Є.М. Морозов [154-157], Дж. Нотт [168], В.В. Панасюк [171], В.З. Партон [174], М.П. Саврук [199, 200], М. Сіраторі [207], В.Т. Трощенко [211, 220], С. Тайра [214], П.В. Ясній [246], Т.Л. Anderson [247] та інших [251, 254-257, 271, 292, 294, 298, 301].

Серед параметрів механіки руйнування, що описують НДС в околі фронту тріщини, найбільшого поширення набули коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) та J -інтеграл Черепанова–Райса. Для їх визначення застосовуються аналітичні, експериментальні та чисельні методи.

Аналітичні розв'язки задач механіки руйнування отримані для вельми обмеженого кола часткових випадків, оскільки для більшості реальних об'єктів дослідники стикаються з значними математичними труднощами. Тому для розгляду конструкцій з складною геометрією і навантаженням загального вигляду найчастіше використовують чисельні методи, серед яких найбільшого розповсюдження набув метод скінчених елементів (МСЕ).

Методики і результати розв'язання задач механіки руйнування на основі МСЕ викладені в роботах [38, 154, 155, 166, 199, 207, 213, 226, 253, 265, 268]. Його застосування дозволяє згущувати сітку в місцях очікуваної концентрації напружень, зокрема в околі вершини тріщини для більш точного визначення НДС, задавати довільні граничні умови на границях тіла, та використовувати в одній дискретній моделі скінченні елементи з різними вихідними співвідношеннями, що значно підвищує ефективність методу. Переваги МСЕ полягають в здатності метода до опису ускладненої геометрії та механічних властивостей тіла, а також в стрічковій структурі отримуваної матриці системи рівнянь, що спрощує процедуру її звернення і дозволяє знизити об'єм необхідної пам'яті та машинного часу. Детальні обзори по цьому питанню знаходяться в монографіях [154, 155].

Аналіз доробку з розв'язання задач механіки руйнування із використанням МСЕ, проведений у монографії [19] свідчить, що найбільша кількість результатів отримана для тріщин нормального відриву, на берегах яких відсутні дотичні

напруження (тип руйнування I) [13, 154, 165, 166, 252, 253, 265, 297]. Деформації нормального відриву є основним фактором, що визначає тріщиностійкість конструкції. В цьому випадку в задачах лінійної механіки руйнування як критерій руйнування застосовується коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) першого роду K_I . Однак, існує широке коло задач, в яких у вершині тріщини одночасно реалізується два типи руйнування – нормальний відрив (тип I) і зсув (тип II). Відповідно, поле напружень поблизу устя тріщини характеризується двома параметрами – КІН першого і другого роду K_I і K_{II} . Ці задачі одержали назву несиметричних (змішаних) задач механіки руйнування. Для визначення тріщиностійкості в цьому випадку різними дослідниками запропоновано кілька критеріїв локального руйнування [230, 266, 268, 286, 288], де як критичні величини виступають різні параметри: КІН, вектор потоку енергії, щільність енергії деформації та ін.

Визначення КІН, що описує асимптотику у вершині тріщини, здійснюється прямими (асимптотичними) [154, 226, 265] і енергетичними [38, 154, 166, 282, 286] методами.

Прямі методи визначення параметрів лінійної механіки руйнування потребують для досягнення високої точності отриманих значень K_I і K_{II} значного згущення сітки скінченних елементів у вершині тріщини, що відноситься як до звичайних, так і до сингулярних скінченних елементів (СЕ). Так в роботах [154, 265] відзначено, що необхідний розмір лінійного СЕ у вершині тріщини або відстань між вузлами сингулярних квадратичних СЕ має становити порядку 1/200-1/250 довжини тріщини. Крім цього, переміщення і напруження, на основі яких обчислюються КІН, вибирають достатньо довільно.

Достатньо ефективним підходом до розв'язання задач механіки руйнування є поєднання енергетичних методів та МСЕ. Проте, методика роздільного визначення K_I і K_{II} для задач з несиметричним полем напруження (змішаного руйнування) на їх основі до даного часу розроблена недостатньо.

При дослідженні задач змішаного руйнування із використанням енергетичних методів окрему проблему становить розділення частин енергії

деформування, що стосуються кожного з типів руйнування, і визначення величин відповідних параметрів механіки руйнування K_k , J_k або G_k . В багатьох випадках обчислення цих величин здійснюється шляхом їх подання через компоненти J -інтеграла J_{xi} [19, 154, 166], методика обчислення якого проаналізована нижче. Усунути ці труднощі дозволяє метод визначення параметрів лінійної механіки руйнування за допомогою інтеграла закриття тріщини, оснований на безпосередньому обчисленні інтенсивності вивільненої енергії пружної деформації, зв'язаної зі конкретним видом руйнування. Але як вказано в роботі [154], в ньому залишаються в силі обмеження, накладені на розміри скінченних елементів у вершині тріщини.

В роботах [261, 262, 290, 300] запропоновано підхід, що ґрунтується на декомпозиції полів параметрів напружено-деформованого стану на складові, що відповідають симетричній (нормальний відрив) та косиметричній (поперечний зсув) складовим. Такий підхід, хоча і дозволяє проводити роздільне визначення параметрів для різних типів руйнування, але теж призводить до додаткових обчислювальних витрат, понижує точність.

Одними із перших робіт по механіці пружно-пластичного руйнування став розрахунок пластичної зони у вершині тріщини при антипоскій деформації, виконаний Дж.Хультом і Ф.А. Мак-Клінтоном. Врахувати пластичну зону в вигляді тонкої лінії перед кінцем тріщини при плоскому напруженому стані дозволяє модель Леонова-Панасюка [115]. Експериментальне і аналітичне вивчення пластичних зон такого типу було проведене в [156, 198] та ін. Для ідеально пластичного тіла в роботі [156] запропонований інтегральний варіаційний принцип теорії тріщин. Запропонований також метод розрахунку на міцність при наявності тріщин, який заснований на понятті межі тріщиностійкості [278]. В цьому методі розрахунок виконується по пружним залежностям, а пластичні ефекти враховуються за допомогою спеціального експерименту. В даний час, якщо не розглядати тонкі пластини, використовують два критерії: перший оснований на використанні незалежного від контура інтеграла Черепанова-Райса, другий, запропонований Уелсом [299],

М.Я.Леоновим і В.В.Панасюком [115], який використовує в якості характеристики руйнування максимальне розкриття тріщини.

В нелінійних задачах серед параметрів механіки руйнування найбільшого використання набув J -інтеграл Черепанова–Райса. Питанню визначення J -інтеграла в нелінійних задачах механіки руйнування присвячена значна кількість публікацій [38, 154, 197, 249, 256, 271, 273, 274, 281, 286, 288, 298, 301]. В роботах [13, 19, 154, 166, 247, 261, 262, 281, 290, 298, 300, 301] представлені огляди методів обчислення J -інтеграла в дискретних моделях МСЕ. Серед них найбільшого застосування здобули метод піддатливості [13], метод еквівалентного об'ємного інтегрування [19, 220, 276, 282], метод віртуального зростання тріщини [254] для обчислення компонент J -інтеграла J_{x_i} (де x_i – система координат, пов'язаних із фронтом тріщини) [166] та величин G_k , пов'язаних із різними типами руйнування [300], дискретно-аналітичний метод похідної від жорсткості (DASD) [261, 262], та безпосереднє обчислення енергетичного інтеграла по контуру або по поверхні [280, 290].

Фундаментальною властивістю J -інтеграла, доведеною для континуальних областей є його інваріантність, тобто незалежність результату його обчислення від контура інтегрування і дорівнювання нулю по замкненому контуру. Ця фундаментальна властивість доведена для континуальних систем при пружному і пружнопластичному деформуванні при простому активному ізотермічному навантаженні, відсутності розвантаження та дії масових і інерційних сил [13].

В той же час, існуючі методи обчислення J -інтеграла в дискретних моделях МСЕ забезпечують виконання умов інваріантності лише для обмеженого кола задач. Це свідчить про те, що в загальному випадку фундаментальна властивість інваріантності J -інтеграла в розроблених методах не виконується. Запропоновані шляхи вирішення цієї проблеми передбачають або обмеження форми і розмірів області інтегрування, або проведенні обчислень J -інтеграла із використанням декількох різних контурів і подальшого усередненні цих результатів для отримання кінцевого значення [7, 273]. Застосування таких підходів початково закладає можливість суттєвих похибок і може взагалі ставити під сумнів

достовірність отримуваних результатів. Тому на сьогоднішній день залишається актуальним питання розробки такого методу обчислення J -інтеграла в дискретних моделях МСЕ, який би забезпечував його інваріантність.

В роботах [16, 19, 71] була запропонована і апробована на задачах пружного та пружнопластичного деформування тіл з тріщинами методика обчислення J -інтеграла методом реакцій, що ґрунтується на поданні J -інтеграла через величини вузлових реакцій і переміщень і забезпечує його інваріантність в дискретних моделях МСЕ. Отримані результати підтвердили ефективність розробленого методу реакцій.

Таким чином, проведений аналіз літературних джерел показав, що питання чисельного моделювання процесів фізично- і геометрично-нелінійного деформування, а також дослідження задач механіки руйнування плоско-деформованих та вісесиметричних масивних та тонкостінних тіл під впливом термосилового навантаження не знайшло відображення в наукових працях, тому дослідження даної проблеми є актуальним.

РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ

Як правило, при апроксимації тіл складної структури, що поєднують в одній розрахунковій моделі масивні і тонкостінні конструктивні елементи, використовуються просторові і оболонкові скінченні елементи (СЕ), розрахункові співвідношення яких базуються на рівняннях теорії пружності і теорії оболонок відповідно.

Використання кількох типів СЕ, що базуються на різних вихідних рівняннях (просторові задачі теорії пружності, теорії пластин та оболонок, теорії стержнів), ускладнює формулювання умов контакту між окремими конструктивними елементами і, призводить до погіршення обумовленості системи алгебраїчних рівнянь МСЕ. З іншого боку використання декількох просторових СЕ по товщині оболонкових і навіть відносно масивних конструкцій супроводжується надмірним збільшенням кількості невідомих без суттєвого уточнення результатів розрахунку. Ефективнішим є підхід, що передбачає апроксимацію оболонкових конструкцій одним просторовим СЕ по товщині при одночасній реалізації статичних гіпотез теорії оболонок шляхом корегування закону Гука в частині дорівнювання нулю напружень обтиснення.

Однак, найбільш послідовним і перспективним напрямком при розробці бібліотеки скінченноелементної бази є її доповнення універсальним СЕ для апроксимації масивних, тонкостінних і комбінованих об'єктів складної структури, який по ефективності не поступає б суттєво просторовим та оболонковим СЕ.

В основу підходу при отриманні співвідношень для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості і вузлових реакцій просторового, оболонкового і універсального СЕ покладені основні положення моментної схеми скінченного елемента (МССЕ), сформульованої в роботах О.С.Сахарова [203]. Висока ефективність МССЕ була достатньо висвітлена зокрема в монографії [202].

2.1. Вихідні співвідношення теорії пружності.

Розглянемо тіло обертання з постійними в окружному напрямку механічними характеристиками в циліндричній системі координат Z^i , яку в подальшому будемо називати базисною, під дією навантаження або зміщень, які також є вісесиметричними. Осі координат спрямовані таким чином, що Z^1 співпадає з віссю обертання тіла, а Z^2 - збігається із радіусом (рис.2.1).

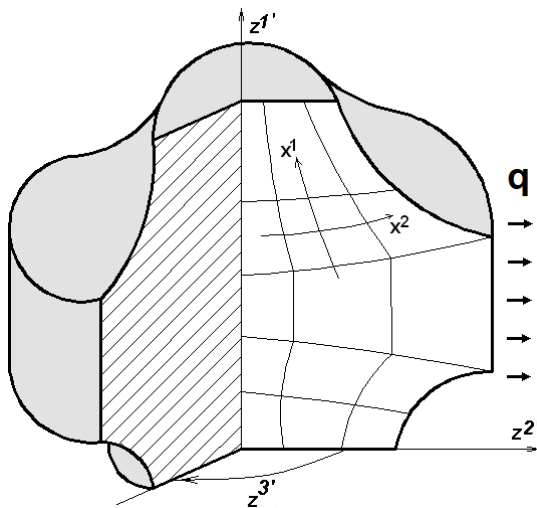


Рис.2.1.

Деформація такого тіла буде симетрична відносно осі Z^1 і для її визначення достатньо розглянути довільний меридіональний перетин. При цьому компоненти тензора напружень і вектора зміщень не залежать від координати Z^3 .

Базисна система є незмінною і використовується для опису граничних умов, завдання вихідних геометричних і механічних характеристик досліджуваних об'єктів.

Однак опис деформованого і напруженого стану тіла складної конфігурації зручніше виконувати в місцевій системі координат, природно зв'язаної з формою об'єкту.

Введемо в розгляд місцеву криволінійну Лагранжеву систему координат x^i , осі x^1 і x^2 які розташовані в площині меридіонального перетину $Z^{3'} = const$, а x^3 збігається по напрямку з $Z^{3'}$. Взаємозв'язок місцевої і базисної системами координат визначається компонентами тензора перетворення $z_{i,j}^{i'}$ [28]:

$$z_{i,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^\alpha = z_{,\alpha}^{3'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = 1. \quad (2.1)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Взаємозв'язок метричних тензорів g_{mn} місцевої і базисної системам координат визначається формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (2.2)$$

Для незамкнених кругових тіл для базисної циліндричної системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2$$

$$g_{\alpha\beta} = z_\alpha^{v'} z_\beta^{v'}, \quad g_{33} = (z^{2'})^2 \quad (2.3)$$

Взаємозв'язок компонент деформацій ε_{ij} і переміщень u_i в місцевій системі координат [147]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (2.4)$$

де Γ_{ij}^k – символи Крістофеля другого роду:

Для отримання загальний вираз для деформацій у місцевій системі координат через переміщення в базисній визначимо переміщення та символи Крістофеля в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s',z_{s',k}^{s'}},$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{,l'}^k z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{,l'}^k z_{,i}^{m'} \frac{\partial z_{,j}^{l'}}{\partial z_{,m'}^{m'}}, \quad (2.5)$$

де $x_{,l'}^k$ – компоненти тензора, оберненого до виразу (2.1).

Після підстановки (2.5) у (2.4), зважаючи, що $z_{,k}^{s'} \cdot x_{,l'}^k = \delta_{l'}^{s'}$, одержимо:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{,i} z_{,j}^{l'} + u_{,j} z_{,i}^{l'} \right) - u_{,l'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (2.6)$$

Для циліндричної базисної системи координат:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}, \quad (2.7)$$

а інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

Тоді з формули (2.6) одержимо:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{,\gamma',\alpha} z_{,\beta}^{\gamma'} + u_{,\delta',\beta} z_{,\alpha}^{\delta'}); \quad \varepsilon_{33} = u_{3',3} + u_{2',z^{2'}}. \quad (2.8)$$

Напруження σ^{ij} пов'язані із компонентами тензора пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука [147]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (2.9)$$

де C^{ijkl} - тензор пружних констант ізотропного тіла:

$$C^{ijkl} = \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}, \quad (2.10)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.11)$$

E - модуль пружності матеріалу (модуль Юнга), ν - коефіцієнт Пуассона.

В термінах фізичних величин компоненти тензору напружень, деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ та пружних констант \tilde{C}^{ijkl} визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} &= \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}, \\ \tilde{C}^{ijkl} &= C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2. Визначальні рівняння пружнопластичності

При наявності незворотних деформацій пластичності прирощення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$, обумовлених переходом від проміжної відлікової конфігурації до актуальної, може бути подане сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, прирощень деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$, тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.13)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими. Повні напруження σ^{ij} визначаються через компоненти тензора пружних констант відповідно до узагальненого закону Гука (2.9)-(2.12):

Матеріал пластично нестисливий і зміна його об'єму лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{ii}^p = 0, \quad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e. \quad (2.14)$$

Область пружних деформацій обмежена поверхнею течії, рівняння якої в просторі напружень для ізотропного зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса має вигляд:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2(\mathcal{G}_p) = 0, \quad (2.15)$$

де $\tau_s(\mathcal{G}_p)$ – межа течії при чистому зсуві, яка є функцією параметра зміцнення

$$\text{Одквіста де } \mathcal{G}_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_p^{ij}.$$

При наявності деформацій пластичності зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичної течії для ізотропного зміцнюваного матеріалу [93, 103, 149]. У відповідності до асоційованого закону пластичної течії, пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні течії:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = d\lambda_p s_{ij}, \quad (2.16)$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – компоненти девіатора напружень, $\sigma_0 = \sigma^{ij} g_{ij} / 3$.

Виконуючи диференціювання виразу (2.15) поданого із урахуванням (2.10), встановлюємо взаємозв'язок між прирощеннями напружень і прирощеннями пружних деформацій в актуальній конфігурації:

$$d\sigma^{ij} = \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e. \quad (2.17)$$

Для визначення зв'язку між прирощеннями напружень і деформацій при наявності пластичності запишемо рівняння:

$$d f_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \mathcal{G}_p} d \mathcal{G}_p = 0. \quad (2.18)$$

Для прийнятої поверхні течії (2.15) маємо:

$$d f_p = s_{ij} ds^{ij} - 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} = 0. \quad (2.19)$$

Приймаючи до уваги, що $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$, а прирощення компонент тензора напружень:

$$d\sigma^{ij} = C^{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p), \quad (2.20)$$

перепишемо рівняння (2.22) у вигляді:

$$S_{ij} [C^{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)] = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} \frac{\sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}}{\sqrt{3}}. \quad (2.21)$$

Виразивши в (2.21) прирощення пластичних деформацій через компоненти девіатора напружень у відповідності з (2.17):

$$S_{ij}C^{ijkl}d\varepsilon_{kl} = \left(S_{ij}C^{ijkl}S_{kl} + \frac{4}{\sqrt{3}}\tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right) d\lambda_p, \quad (2.22)$$

і врахувавши, що для ізотропного матеріалу $S_{ij}C^{ijkl} = 2GS^{kl}$, де G – модуль зсуву, знайдемо невизначений множник $d\lambda_p$:

$$d\lambda_p = \frac{S_{ij}C^{ijkl}d\varepsilon_{kl}}{\gamma_p}, \quad (2.23)$$

де

$$\gamma_p = 4\tau_s^2 \left(G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right) \quad (2.24)$$

Виключивши прирощення пластичних деформацій в виразі (2.22), напишемо зв'язок між прирощенням напружень і деформацій у вигляді:

$$d\sigma^{ij} = C_e^{ijkl}d\varepsilon_{kl}, \quad (2.25)$$

де C_e^{ijkl} – тензор миттєвих жорсткостей пружно-пластичного матеріалу:

$$C_e^{ijkl} = C^{ijkl} - \frac{4G^2 S^{ij} S^{kl}}{\gamma_p}. \quad (2.26)$$

Наведені співвідношення дозволяють установити взаємозв'язок напружень і деформацій при пружнопластичному деформуванні.

2.3. Основні положення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ)

Для чисельного дослідження деформування вісесиметричних та плоскодеформованих тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутник довільної форми (рис. 2.2,а).

Для отримання розв'язувальних співвідношень СЕ - визначення деформацій та напружень у межах СЕ - використовується місцева криволінійна система координат x^i , так що осі x^1 і x^2 проходять через середини сторін СЕ. В місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною (рис.2.2,б).

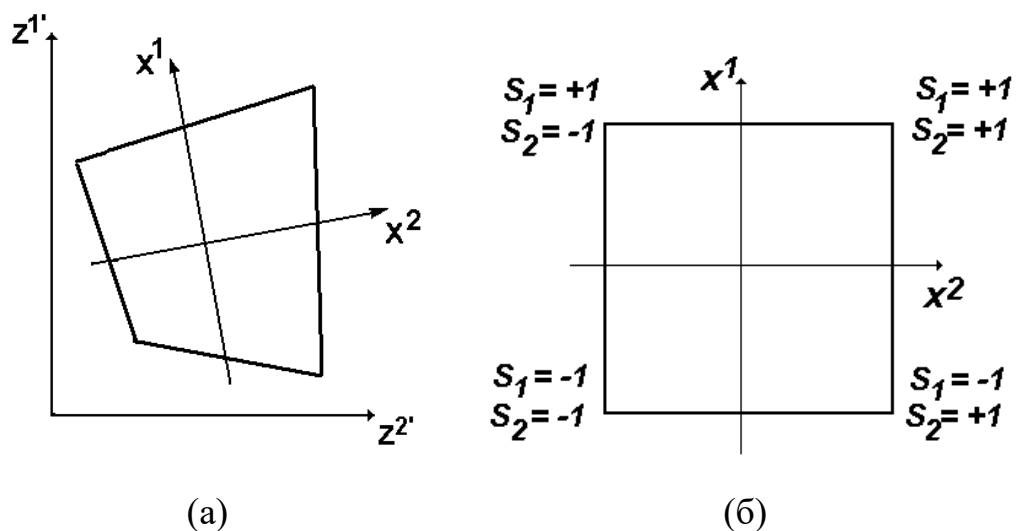


Рис. 2.2.

Апроксимуємо функції переміщень в межах елемента за допомогою поліномів Лагранжа:

$$u^{\alpha'} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n u_{(pq)}^{\alpha'} \phi_{(pq)}, \quad (2.28)$$

де

$$\phi_{(pq)} = R_{1(p)}^{(m)} R_{2(q)}^{(n)}, \quad (2.29)$$

$$R_{1(p)}^{(m)} = \frac{\prod_{\ell=1}^m (x^1 - x_{(\ell)}^1)}{(x^1 - x_{(p)}^1) \prod_{r=1}^m (x_{(p)}^1 - x_{(r)}^1 - \delta_{(p)}^{(r)})} R_{2(q)}^{(n)}. \quad (2.30)$$

Наближені значення компонент тензора деформацій ε^{ij} в системі координат X^α представимо відрізком ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \sum_{s=0}^{M_{\alpha\beta}} \sum_{t=0}^{N_{\alpha\beta}} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(st)}, \\ \varepsilon_{33} &= \sum_{s=0}^{M_{33}} \sum_{t=0}^{N_{33}} \varepsilon_{33}^{(st)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

де

$$\phi^{(st)} = \frac{(x^1)^s}{S!} \cdot \frac{(x^2)^t}{t!} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(st)} = \frac{\partial^{(s+t)} \varepsilon_{\alpha\beta}}{(\partial x^1)^s (\partial x^2)^t} \Big|_{x^\gamma=0},$$

$$\varepsilon_{33}^{(st)} = \frac{\partial^{(s+t)} \varepsilon_{33}}{(\partial x^1)^s (\partial x^2)^t} \Big|_{x^\gamma=0}. \quad (2.33)$$

Згідно положень моментної схеми скінчених елементів [203] величини $M_{\alpha\beta}$, M_{33} , $N_{\alpha\beta}$ і N_{33} знаходяться в суворій відповідності з індексами m , n і α , β :

$$M_{11} = M_{12} = M_{21} = m - 1,$$

$$M_{22} = M_{33} = m,$$

$$N_{12} = N_{21} = N_{22} = n - 1,$$

$$N_{11}=N_{33}=n. \quad (2.34)$$

Обмежимося білінійним розподіленням переміщень в межах елемента. В цьому випадку $m=n=1$, $M_{\alpha\beta}$, M_{33} , $N_{\alpha\beta}$ і N_{33} приймають наступні значення:

$$\begin{aligned} M_{11}=M_{12}=M_{21}=0, \\ M_{22}=M_{33}=1, \\ N_{12}=N_{21}=N_{22}=0, \\ N_{11}=N_{33}=2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Розподіл переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u^{\alpha'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (2.36)$$

де $u^{\alpha'}_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати вузлів відносно центра поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [73, 202] компоненти тензора деформацій скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad \varepsilon_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} x^\beta, \quad (2.37)$$

де

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (2.38)$$

Переміщення та їх похідні в центрах елементів дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{u}^{\alpha'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u^{\alpha'}_{(S_1 S_2)}; \\
 \overset{\circ}{u}_{\alpha}^{\beta'} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u^{\beta'}_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}; \\
 \overset{\circ}{u}_{12}^{\beta'} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u^{\beta'}_{(S_1 S_2)} S_1 S_2;
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Запишемо коефіцієнти розкладу деформації (2.39) через переміщення в базисній системі координат,

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(z'_{,i} u'_{,j} + z'_{,j} u'_{,i} \right) \Big|_{x^{\alpha}=0}, \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \left(z'^2 u'_{,2} \right) \Big|_{x^{\alpha}=0}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\alpha}=0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \left(z'_{,\alpha} u'_{,\gamma', (\alpha)} + z'_{,\gamma', (\alpha)} u'_{,\alpha} \right) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\alpha}=0} = \\
 &= \left(z'_{,\alpha} u'_{,\gamma', (\alpha)} + z'_{,\gamma', (\alpha)} u'_{,\alpha} \right) \Big|_{x^{\alpha}=0}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\alpha}=0} = \frac{\partial \left(z'^2 u'_{,2} \right)}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\alpha}=0} = \left(z'_{,\alpha} u'_{,2} + z'^2 u'_{,2, \alpha} \right) \Big|_{x^{\alpha}=0}. \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u'_{(S_1 S_2)} \left(S_{\alpha} z'_{,\beta'} + S_{\beta'} z'_{,\alpha} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \left[\overset{\circ}{z}^2 u_{2'(S_1, S_2)} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \left[u_{(S_1 S_2)}^{\nu'} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}^{\nu'}_{,\alpha} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}^{\nu'}_{,12} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3', 3(S_1, S_2)} S_{\alpha} + \frac{\overset{\circ}{z}^2_{,\alpha}}{2} u_{2'(S_1, S_2)} + \overset{\circ}{z}^2 u_{2'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \right], \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Використання цих виразів дозволяє отримати значення коефіцієнтів розкладу деформацій в ряд Маклорена через вузлові переміщення.

2.4. Скінченний елемент загального типу з чисельним інтегруванням

Скінченний елемент загального типу передбачає відсутність жодних обмежень на характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі його поперечного перерізу (СЕ із змінними фізичними і геометричними параметрами). Ці величини обчислюються у визначеній кількості точок інтегрування (рис 2.3), координати яких обчислюються у місцевій криволінійній системі координат, через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= \overset{\circ}{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{11} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij12} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} + \\
&+ \overset{\circ}{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{22} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} x^1 \right) + \overset{\circ}{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} x^2 \right) \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Застосовуючи позначення

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl},$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{ij} &= \overset{\circ}{C}^{ij11} \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}^{ij} &= \overset{\circ}{C}^{ij22} \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1},\end{aligned}\quad (2.43)$$

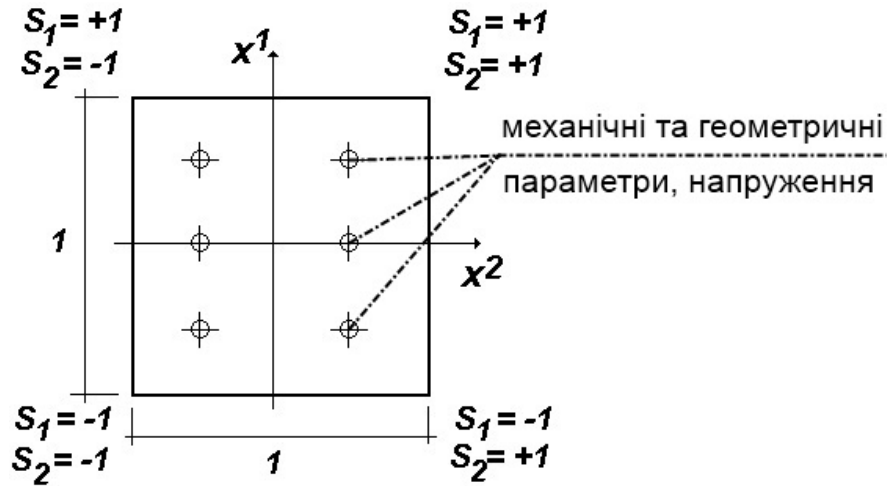


Рис 2.3.

Запишемо вираз для компонент тензора напружень з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\sigma^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}^{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{ij} x^1. \quad (2.44)$$

Відкидаючи з рівняння (2.44) члени вигляду $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як такі, що не дають внеску в енергію деформування SE , подамо компоненти тензора напружень відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \\ \sigma^{12} &= \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \\ \sigma^{33} &= \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Опис процесу деформування вісесиметричних тіл здійснюється із використанням варіаційного принципу Лагранжа. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (2.46)$$

Вираз для варіації енергії деформації СЕ в місцевій системі координат через компоненти тензорів напружень і деформацій може бути поданий у по компонентному або у матричному вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (2.47)$$

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2, \quad (2.48)$$

де вектори напружень і деформацій мають вигляд

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{33}\}, \quad \{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{33}\}. \quad (2.49)$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\}, \quad (2.50)$$

де

$$\{u\}^T = \left[\{u\}_{(-1;-1)}^{1'} \{u\}_{(-1;-1)}^{2'} \{u\}_{(1;-1)}^{1'} \{u\}_{(1;-1)}^{2'} \{u\}_{(-1;1)}^{1'} \{u\}_{(-1;1)}^{2'} \{u\}_{(1;1)}^{1'} \{u\}_{(1;1)}^{2'} \right] \quad (2.51)$$

Для зручності представлення розділимо матрицю $[B]$ на блоки:

$$[B] = \left[[B]^{(-1;-1)} [B]^{(+1;-1)} [B]^{(-1;+1)} [B]^{(+1;+1)} \right] \quad (2.52)$$

Елементи підматриць $[B]^{(s_1, s_2)}$ обчислюються за формулою:

$$[B]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z \, {}_1^r S_1 + (z \, {}_{,12}^r S_1 + 2z \, {}_1^r S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} z \, {}_1^{2'} S_1 + (z \, {}_{,12}^{2'} S_1 + 2z \, {}_1^{2'} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (z \, {}_1^r S_2 + z \, {}_{,2}^r S_1) & \frac{1}{4} (z \, {}_1^{2'} S_2 + z \, {}_{,2}^{2'} S_1) \\ \frac{1}{2} z \, {}_1^r S_1 + (z \, {}_{,12}^r S_1 + 2z \, {}_1^r S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} z \, {}_1^{2'} S_1 + (z \, {}_{,12}^{2'} S_1 + 2z \, {}_1^{2'} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} z \, {}_2^r + \frac{1}{2} \left(\frac{z \, {}_{, \alpha}^{2'}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + z \, {}_2^{2'} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Підставляючи (2.51) в (2.48), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення $\{u\}$ та вузлові реакції $\{r_\sigma\}$:

$$\delta W = \delta \{u\}^T \{r_\sigma\}, \quad (2.53)$$

де

$$\{r_\sigma\} = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (2.54)$$

В результаті проведення чисельного інтегрування, отримаємо вираз для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального типу із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \quad (2.55)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

Для виведення матриці жорсткості скінченного елемента загального типу представимо закон Гука (2.10) у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (2.56)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Варіацію енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \delta \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (2.58)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \delta \{u\}^T [k] \{u\}, \quad (2.59)$$

де $[k]$ - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} [B]^T [D][B] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (2.60)$$

В результаті проведення чисельного інтегрування отримаємо:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T [D][B] \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \quad (2.61)$$

Відповідно до статичних гіпотез теорії оболонок напруження обтиснення по товщині оболонки має дорівнювати нулю:

$$\sigma^{11} = 0 \quad (2.62)$$

Виходячи з цього визначаються компоненти тензора пружних констант $C^{11\alpha\beta}$ і C^{1133} на основі їх корекції:

$$\sigma_{11} = C^{1111} \varepsilon_{11} + C^{1112} \varepsilon_{12} + C^{1122} \varepsilon_{22} + C^{1133} \varepsilon_{33} = 0, \quad (2.63)$$

звідки визначимо ε_{11} :

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{12} \frac{C^{1112}}{C^{1111}} - \varepsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \varepsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}}. \quad (2.64)$$

Виразимо деяку компоненту тензора напружень, наприклад σ^{22} через деформації з урахуванням виразу (2.64):

$$\begin{aligned} \sigma^{22} = & C^{2211} \left(-\varepsilon_{12} \frac{C^{1112}}{C^{1111}} - \varepsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \varepsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}} \right) + \\ & + C^{2212} \varepsilon_{12} + C^{2222} \varepsilon_{22} + C^{2233} \varepsilon_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Зведемо подібні:

$$\begin{aligned} \sigma^{22} = & \left(C^{2212} - \frac{C^{2211} C^{1112}}{C^{1111}} \right) \varepsilon_{12} + \left(C^{2222} - \frac{C^{2211} C^{1122}}{C^{1111}} \right) \varepsilon_{22} \\ & + \left(C^{2233} - \frac{C^{2211} C^{1133}}{C^{1111}} \right) \varepsilon_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Таким чином використовуючи умову вигляду (2.64) для обчислення напружень можна записати вираз, що містить скореговані пружні константи матеріалу D_{ijkl} :

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.67)$$

де

$$\begin{aligned} D^{ijkl} &= C^{ijkl} - \bar{C}^{ijkl}, \\ \bar{C}^{ijkl} &= \frac{C^{ij11} C^{11kl}}{C^{1111}}. \end{aligned}$$

Розроблений згідно основних положень МССЕ СЕ загального типу дозволяє з єдиних позицій просторової задачі теорії пружності розглядати як масивні так і тонкостінні елементи конструкцій і їх комбінації. Перехід від просторового до оболонкового варіанту СЕ забезпечується виключно корекцією закону Гука.

2.5. Модифікований скінченний елемент з інтегруванням у замкненому вигляді.

Отримані співвідношення (2.57) і (2.63) не накладають жодних обмежень на розподіл механічних і геометричних параметрів в площині скінченного елемента по будь-якій з осей x^i , проте приводять до необхідності виконання значного обсягу обчислень, що пов'язані з операціями чисельного інтегрування.

Усунути указаний недолік дозволяє перехід до інтегрування в замкненому вигляді, але це потребує введення обґрунтованих гіпотез відносно усереднення механічних і геометричних параметрів.

Будемо вважати, що в усьому поперечному перерізі СЕ компоненти тензора пружних сталей C та визначник g матриці, складеної з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у його центрі (рис.2.4):

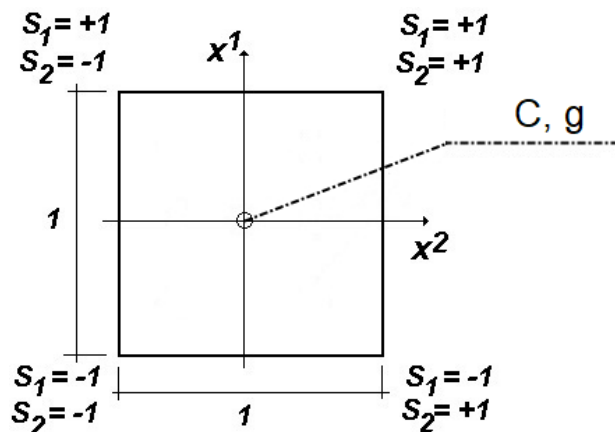


Рис. 2.4.

В той же час компоненти метричного тензора g_{ij} мають залишатися змінними, оскільки їх усереднення суттєво погіршує загальну збіжність сіткових моделей, особливо при наявності косокутних скінченних елементів.

Урахування змінності компонент метричного тензору g_{ij} забезпечується поданням компоненти тензора фізичних деформацій скінченного елемента, відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [73, 202], відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} x^\beta, \quad (2.70)$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0} \quad (\beta \neq i). \quad (2.71)$$

Коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha}, & \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, & \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha\alpha} / \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right) \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / \overset{\circ}{g}_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \end{aligned} \quad (2.72)$$

де

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}|_{x^\gamma=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \Big|_{x^\gamma=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} = z_{,\alpha} z_{,\beta(\alpha)}, \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \varepsilon_{33}|_{x^\gamma=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^\gamma} \Big|_{x^\gamma=0}, \\
\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0}, \\
\overset{\circ}{h}_{33,\alpha} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{33} = g_{33}|_{x^\beta=0}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Зв'язок між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій визначається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}, \tag{2.74}$$

де

$$\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}. \tag{2.75}$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{11,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij12} \tilde{\varepsilon}_{12} + \\
&+ \tilde{C}^{ij22} \left(\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{22,1} x^1 \right) + \tilde{C}^{ij33} \left(\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\varepsilon}_{33,1} x^1 + \tilde{\varepsilon}_{33,2} x^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Застосовуючи позначення

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij22} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1},\end{aligned}\quad (2.77)$$

отримаємо запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} x^1. \quad (2.78)$$

Відкидаючи з виразу (2.78) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{i\alpha}$ як такі, що не дають внеску в енергію деформування елемента, подамо фізичні компоненти тензора напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \quad (2.79)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладення напружень.

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання через компоненти тензора напружень в місцевій криволінійній системі координат:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = g_{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha}, \\ \tilde{\sigma}^{33} &= g_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}, \quad \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33} = g_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \quad , \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad , \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \quad , \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha\alpha} / g_{\alpha\alpha})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right) \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{g_{33}} \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{g_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) \quad , \quad (2.81)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} \Big|_{x^\gamma=0} \quad , \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \Big|_{x^\gamma=0} \quad , \quad \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} = \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{z}_{,\beta(\alpha)}^{\nu'} \quad , \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \varepsilon_{33} \Big|_{x^\gamma=0} \quad , \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^\gamma} \Big|_{x^\gamma=0} \quad , \\
\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \quad , \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} \quad , \\
\overset{\circ}{h}_{33,\alpha} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}} \quad , \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} \quad , \quad \overset{\circ}{g}_{33} = g_{33} \Big|_{x^\beta=0} \quad . \quad (2.82)
\end{aligned}$$

Запишемо коефіцієнти розкладу деформації (2.81) через переміщення в базисній системі координат:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(z_{,i}^{v'} u_{,j}^{v'} + z_{,j}^{v'} u_{,i}^{v'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \left(z^{2'} u_{2'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0} \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left(z^{2'} u_{2'} \right)}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \left(z_{,\alpha}^{2'} u_{2'} + z^{2'} u_{2',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}. \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення для значення похідних від переміщень $u_{,i}^{v'}$ і компонент тензора перетворень $z_{,i}^{v'}$ в центрі СЕ:

$$u_{,i}^{v'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{,i}^{v'}, \quad z_{,i}^{v'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{v'}. \tag{2.84}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{v'} \overset{\circ}{u}_{,\beta}^{v'} + \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{v'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{v'} \right), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{z}^{2'} \overset{\circ}{u}_{2'}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{v'} \overset{\circ}{u}_{,12}^{v'} + \overset{\circ}{z}_{,12}^{v'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{v'}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha(3-\alpha)}. \tag{2.85}
\end{aligned}$$

Виразимо вектор деформацій і їх похідних в центрі СЕ через вектор вузлових переміщень у матричній формі:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = [B] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} = [B_1] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} = [B_2] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \tag{2.86}$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u^{1'}_{(s_1, s_2)} \\ u^{2'}_{(s_1, s_2)} \end{array} \right\}. \quad (2.87)$$

Для зручності представлення розділимо матриці $[B]$, $[B_1]$, $[B_2]$ на блоки:

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{B} \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B} \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(+1;+1)} \right] \\ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;+1)} \right] \\ \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;+1)} \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

де

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z^{1'} S_1 & \frac{1}{2} z^{2'} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(z^{1'} S_2 + z^{1'} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(z^{2'} S_2 + z^{2'} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} z^{1'} S_2 & \frac{1}{2} z^{2'} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} z^{2'} \end{bmatrix}, \\ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(z^{1'} S_2 + 2 z^{1'} S_1 S_2 \right) - z^{1'} S_2 h_{22,1} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(z^{2'} S_2 + 2 z^{2'} S_1 S_2 \right) - z^{2'} S_2 h_{22,1} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 z^{2'} S_1 + z^{2'} + z^{2'} h_{33,1} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z}_{,12}{}^{1'} S_1 + 2 \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{1'} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{1'} \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z}_{,12}{}^{2'} S_1 + 2 \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{2'} \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} S_2 + \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

де $\overset{\circ}{h}$, $\overset{\circ}{z}_{,\beta}{}^{\alpha'}$ визначаються згідно формул (2.82), $\overset{\circ}{z}_{,\beta}{}^{\alpha'} = \frac{\partial \overset{\circ}{z}{}^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}$.

Отримані співвідношення між деформаціями і переміщеннями дозволяють ефективно описувати процес деформування вісесиметричних і плоскодеформованих тіл при використанні косокутних елементів, для яких характерним є змінення геометричних характеристик в поперечному перерізі СЕ [5].

Запишемо вираз для варіації енергії деформації одного СЕ у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2. \quad (2.90)$$

Подаючи в останньому виразі фізичні компоненти тензора напружень і тензора деформацій відрізками рядів Маклорена через їхні значення у центрі елемента отримаємо:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{12} + \right. \\ \left. + \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{33,\beta} x^{\beta} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2. \quad (2.91)$$

Виконуючи інтегрування в поперечному перерізі отримаємо:

$$\begin{aligned}
\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 &= 1, & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 &= 0, \\
\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 &= \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. & & (2.92)
\end{aligned}$$

Виконуючи інтегрування виразу (2.91) з урахуванням (2.92) для варіації енергії деформації одного СЕ, отримаємо:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}{}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (2.93)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень і деформацій в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \right. \\
\left. + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}{}^{33} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (2.94)
\end{aligned}$$

або у матричній формі :

$$\delta W = \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (2.95)$$

де

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\}, \\
\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right\}, \\
\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\}, \\
\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,2} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\}, \\
\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Подаючи деформації через переміщення, отримаємо вираз для варіації енергії деформації в матричній формі:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \left(\delta \{u\}^T \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}} \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\} + \\
&+ \frac{1}{12} \left(\delta \{u\}^T \left(\left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \right]^T + \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \delta \{u\}^T \left\{ \overset{\circ}{r} \right\},
\end{aligned} \tag{2.97}$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{r} \right\} = \left[\left[\overset{\circ}{\mathbf{B}} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\} + \frac{1}{2} \left(\left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,1} \right\} + \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,2} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} \tag{2.98}$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням напружень.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо зв'язок між деформаціями і переміщеннями по закону Гука:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (2.99)$$

де

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3333} \end{bmatrix},$$

$$\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \begin{bmatrix} C^{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)} & C^{(3-\alpha)(3-\alpha)33} \\ C^{3333} & C^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Тоді для виразу варіації енергії деформації можна записати:

$$\delta W = \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g}, \quad (2.101)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \left(\delta \{ u \}^T \right) [K] \{ u \}, \quad (2.102)$$

де $[K]$ – матриця жорсткості модифікованого вісесиметричного та плоского СЕ з чисельним інтегруванням:

$$[K] = \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} \right) \sqrt{g} \right] \right\} \quad (2.103)$$

Отримані на основі МССЕ вирази матриці жорсткості (2.102) і вектора вузлових реакцій (2.97) модифікованого скінченного елемента із змінними компонентами метричного тензора дозволяють суттєво зменшити загальний обсяг обчислень порівняно з елементами загального типу при однакових сіткових моделях. Перехід до оболонкового варіанту СЕ реалізується так само як і для елемента загального типу.

2.6. Універсальний скінченний елемент для дискретизації масивних тонкостінних і комбінованих тіл обертання складної структури

Об'єктно орієнтовані просторові і оболонкові скінченні елементи загального і модифікованого типів складають розвинуту бібліотеку СЕ, яка дозволяє створювати оптимальні дискретні моделі при визначенні НДС просторових, тонкостінних і комбінованих тіл обертання складної структури. В останній час набула широкого розповсюдження тенденція до використання єдиного універсального СЕ, особливо, при розрахунках об'єктів сучасного машинобудування. Це значною мірою пояснюється тим, що при використанні об'єктно орієнтованих елементів необхідно заздалегідь визначати фрагменти розрахункової схеми конструкції, які слід розглядати з позицій просторової задачі теорії пружності або з позиції теорії оболонок. Оскільки для структурно неоднорідних конструкцій, як правило, найбільший інтерес становлять саме вузли поєднання елементів різної геометричної конфігурації, використання універсальних СЕ стає значно перспективнішим. В цьому випадку збіжність

загальних і локальних результатів визначення НДС залежить тільки від параметрів сіткової моделі.

На відміну від оболонкового універсальний СЕ повинен як і просторовий забезпечувати визначення всіх компонентів тензора напружень σ^{ij} а при використанні одного елемента по товщині деталі результати повинні відповідати теорії оболонок.

Для фізичних компонент тензора напружень при їх поданні відрізками ряду Маклорена отримаємо:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \quad (2.104)$$

де $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладення напружень.

Компоненти $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(\alpha\alpha)}$ характеризують зміну напружень обтиску. Оскільки передбачається, що розглянутий універсальний кінцевий елемент може використовуватися, як для розв'язку просторової вісесиметричної задачі, так і для розрахунків пластин і оболонок, то прийнемо наступну гіпотезу:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(\alpha\alpha)} = 0 \quad (2.105)$$

Це припущення узгоджується з гіпотезами теорії оболонок середньої товщини.

З умови (2.105) одержуємо закон Гука, що пов'язує фізичні компоненти тензора напружень і тензора деформацій та їх похідні в центрі елемента:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\gamma\mu} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\gamma\mu}, \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{C}^{33\gamma\mu} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\gamma\mu}$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha\alpha)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)33} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(33),(3-\alpha)},$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha}^{3333} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}, \quad (2.106)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{B}}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} - \frac{(\overset{\circ}{\tilde{C}}^{\alpha(\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)})^2}{\overset{\circ}{\tilde{C}}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha}^{3333} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{3333} - \frac{(\overset{\circ}{\tilde{C}}^{33(\alpha)\alpha})^2}{\overset{\circ}{\tilde{C}}^{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)33} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{\alpha(\alpha)33} - \frac{\overset{\circ}{\tilde{C}}^{\alpha(\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{\tilde{C}}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{\tilde{C}}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\tilde{C}}^{33(\alpha)\alpha} \overset{\circ}{\tilde{C}}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(\alpha)\alpha}}{\overset{\circ}{\tilde{C}}^{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Коефіцієнти розкладу напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання деформацій законом Гука, який представимо у матричній формі:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{\tilde{D}} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{\tilde{D}}_{\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (2.108)$$

де

$$\left[\overset{\circ}{\tilde{D}} \right] = \begin{bmatrix} \overline{C}^{1111} & \overline{C}^{1112} & \overline{C}^{1122} & \overline{C}^{1133} \\ \overline{C}^{1211} & \overline{C}^{1212} & \overline{C}^{1222} & \overline{C}^{1233} \\ \overline{C}^{2211} & \overline{C}^{2212} & \overline{C}^{2222} & \overline{C}^{2233} \\ \overline{C}^{3311} & \overline{C}^{3312} & \overline{C}^{3322} & \overline{C}^{3333} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)} \overline{C}^{(3-\alpha)(3-\alpha)33} \\ \overline{C}^{3333} \quad \overline{C}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

Формула для визначення вектора вузлових реакцій універсального СЕ структурно повністю співпадає з формулою (2.98)

$$\begin{Bmatrix} \overset{\circ}{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{\sigma} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \end{Bmatrix} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (2.110)$$

але напруження обчислюються згідно формул (2.108)

Аналогічно здійснюється і обчислення матриці жорсткості, формула якої структурно тотожня до (2.103):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{K} \end{bmatrix} = & \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right\} \quad (2.111) \end{aligned}$$

де матриці $\begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix}$ обчислюються згідно формул (2.109).

Компоненти матриці пружних сталей, що використані у (2.108), і компонент матриць $\begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_\alpha \end{bmatrix}$ (2.111) обчислюються із використанням компонент метричного тензора.

Безпосереднє використання наведених вище співвідношень універсального СЕ забезпечує можливість розрахунку масивних, тонкостінних і комбінованих об'єктів складної структури з єдиних позицій просторової задачі за винятком

пружнопластичного деформування оболонок і пластин при їх апроксимації одним скінченним елементом по товщині. Це обумовлено тим, що розподілення напружень $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{22}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}$ вздовж осі x^1 при наявності деформацій пластичності відрізняється від лінійного і не може обчислюватись на основі закону Гука (рис.2.5).

Вирішити цю проблему дозволяє процедура обчислення вказаних напружень в деякій кількості точок вздовж осі x^1 відповідно до прийнятого закону пластичності і подальшим обчисленням нульових і лінійних членів розкладу напружень в ряд Маклорена шляхом інтегрування за формулами:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{22} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{22} dx^1, & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{33} dx^1, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{22} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{22} x^1 dx^1, & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{33} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{33} x^1 dx^1 \end{aligned} \quad (2.111)$$

що реалізується чисельно будь-яким методом.

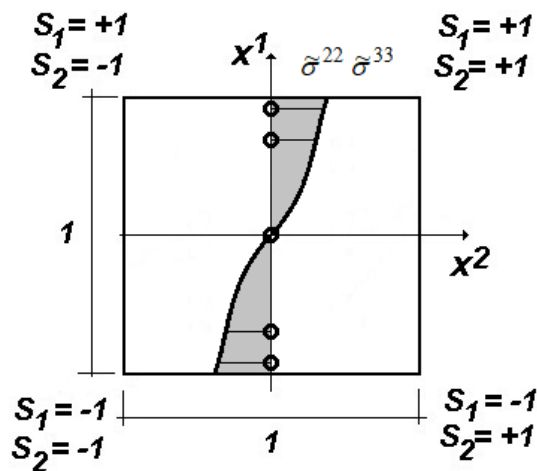


Рис.2.5.

Дослідження збіжності МСЕ при розв'язанні задачі пружно-пластичного деформування здійснено на прикладі круглої вільно опертої пластини під дією рівномірного навантаження. Радіус пластини $a=80$ см., товщина $h=1$ см (рис.2.6,а), коефіцієнт Пуассона $\nu=0,25$, відношення межі плинності при чистому зсуві до модуля пружності складає $\tau_s/E=1/2000$. Зображені на рисунку криві (рис.2.6,б) відображають точність обчислення максимального навантаження в залежності від числа скінченних елементів в радіальному напрямку. За товщиною пластини прийнятий один скінченний елемент.

Для апробації розробленого скінченного елемента для випадку моделювання зон пластичності у тонкостінних конструкціях при використанні одного СЕ по товщині, виконаний розрахунок шарнірно опертої балки, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис.1,6, а), при наступних механічних характеристиках: $E=2.0$; $\nu=0.3$. В напрямку висоти поперечного перерізу (товщини балки) в скінченному елементі приймалося п'ять Гауссових точок інтегрування.

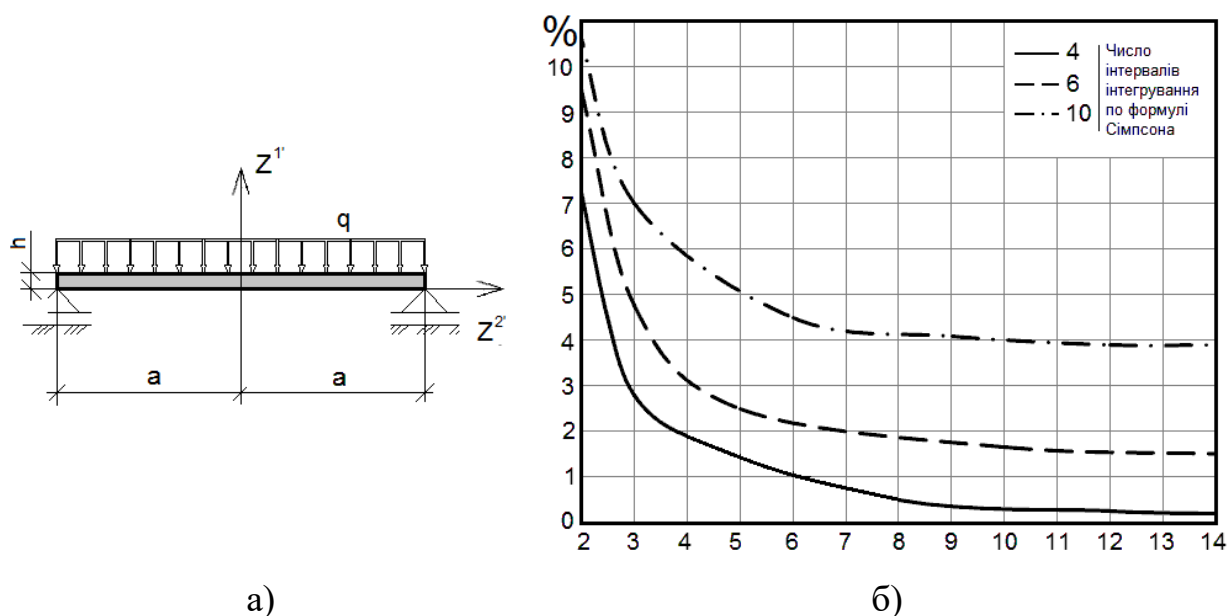


Рис. 2.6

Аналітичний розв'язок задачі наведений в роботі [210], де для визначення координат меж зон пластичності отриманий їх зв'язок із інтенсивністю зовнішнього розподіленого навантаження q :

$$Z^2 - 3h^2 = 2h^2 \frac{q}{q_0} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \quad (2.112)$$

тут h і a – геометричні розміри балки: половина висоти поперечного перерізу і половина довжини балки; $q_0 = \frac{4}{3} \times \frac{M}{a^2}$ – мінімальне значення зовнішнього розподіленого навантаження, при якому виникають деформації пластичності; M – величина згинаючого моменту.

На рис.2.7 зображені зони пластичності, що відповідають прийнятним значенням навантаження q , отримані в гауссових точках інтегрування при апроксимації балки одним СЕ по товщині.

На рис.2.8 зображена отримана за допомогою рівності (2.112) крива, що ілюструє розповсюдження зони пластичності уздовж вісі балки при фіксованому значеннях ординати $Z = 0.4531$ (координата Гаусової точки) при збільшенні інтенсивності навантаження q . Суцільна лінія відповідає [210], ромбиками нанесені результати розв'язку на основі МССЕ [17].

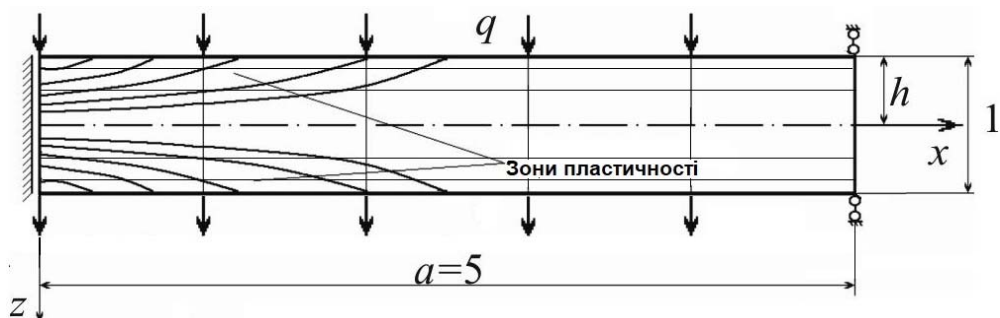


Рис.2.7.

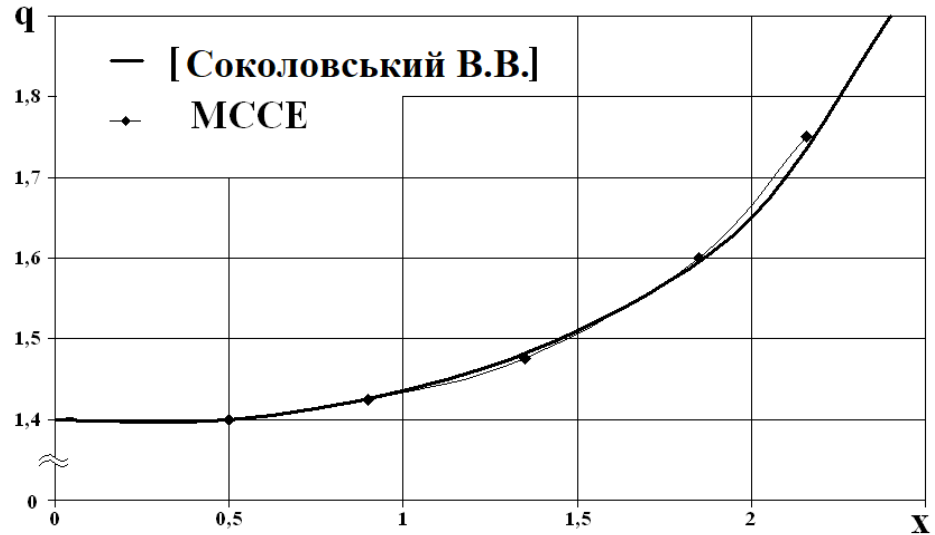


Рис.2.8.

На рис.2.9 зображені графіки згинаючих напружень σ залежно від X по перетину $Z=0.4531$ при різних значеннях навантаження q . Максимальне значення $\sigma = 95 \text{ кг/см}^2$, при якому не виникають деформації пластичності, відповідає $q_0 = 1.267$. Спостерігається задовільна узгодженість розв'язку за запропонованою методикою МССЕ та аналітичних результатів.

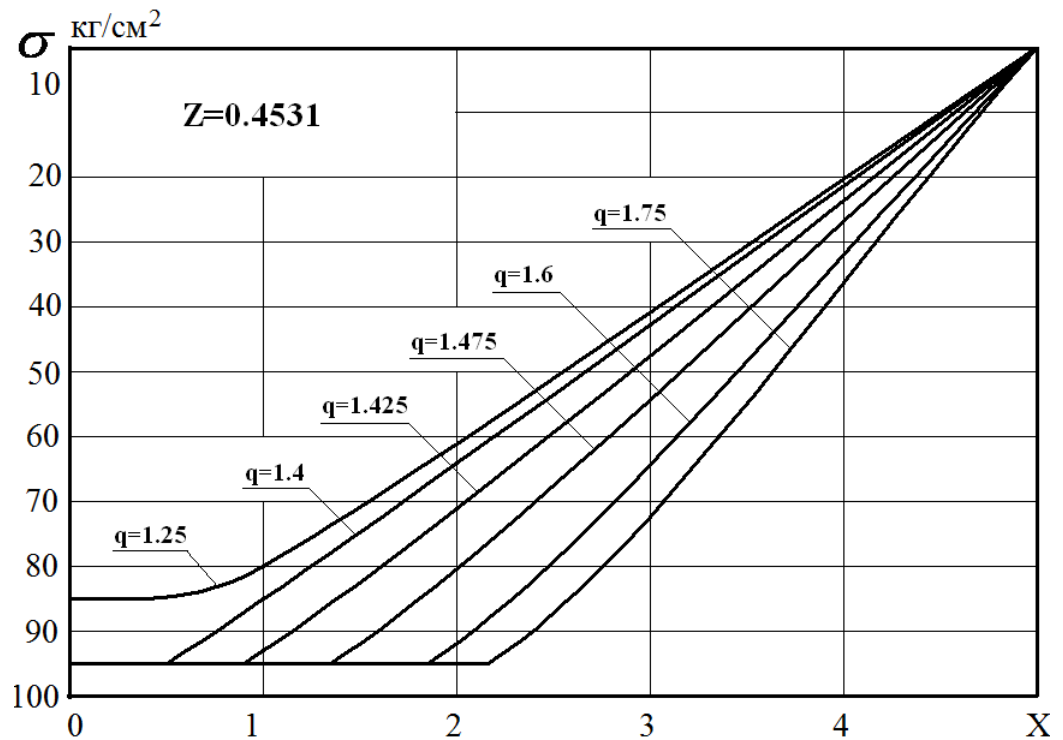


Рис.2.9.

Таким чином, наведені результати тестових прикладів розв'язання задач пружнопластичного деформування тонкостінних об'єктів обґрунтовують їх достовірність і, крім того, дозволяють зробити висновок, що використання чисельного інтегрування виключно коефіцієнтів розкладу напружень, дозволяє суттєво скоротити його обсяг порівняно з традиційними підходами.

2.7. Розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь

У загальному випадку при розв'язанні нелінійних задач використано кроковий алгоритм за параметрами навантаження і часу в поєднанні з ітераційною процедурою Ньютона-Кантаровича:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \left[K^* \right]^{-1} \left(\{Q\}^m - \{R\}_n^m \right), \quad (2.113)$$

де $\{u\}_n^m$ переміщення на ітерації n кроку m , $\{u\}_{n-1}^m$ переміщення на попередній ітерації цього ж кроку, $\{\Delta u\}_n^m$ прирощення переміщень; $\left[K^* \right]$ – лінералізована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена на кроці m з урахуванням корекції тензора пружних констант згідно формули (2.29); $\{Q\}^m$, $\{R\}_n^m$ – вектори вузлових зусиль і реакцій.

Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються на кожній ітерації n з урахуванням фізичної нелінійності.

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$\left\| \{Q\}^m - \{R\}_n^m \right\| \leq \zeta \left\| \{Q\}^m \right\| \quad (2.114)$$

де ζ – параметр точності розв’язання системи нелінійних рівнянь; $\left\| \{ Q \}^m \right\|$ - сума квадратів вузлових зусиль СЕМ; $\left\| \{ R \}_n^m \right\|$ - сума квадратів реакцій СЕМ.

Одним зі способів зменшення обчислюваних витрат при розв’язанні задач пружно-пластичності, що пов’язані з необхідністю обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості на кожному кроці розв’язання задачі, широко використовується спрощена схема вищенаведеного алгоритму, в якій використовується матриця жорсткості $[K]$, компоненти якої обчислені на першому кроці розв’язання задачі з використанням тензора пружних сталих C^{ijkl} і не містять корекції тензора пружних сталих. Тоді формулу (2.113) можна записати у вигляді:

$$\{ u \}_n^m = \{ u \}_{n-1}^m + \{ \Delta u \}_n^m = \{ u \}_{n-1}^m + [K]^{-1} \left(\{ Q \}^m - \{ R \}_n^m \right), \quad (2.115)$$

При розв’язанні системи нелінійних рівнянь компоненти тензора напружень $\left(\tilde{\sigma}^{ij} \right)_n^m$, що входять до використовуваного в (2.113) вектора вузлових реакцій, на початку кожної ітерації n кроку m обчислюються із урахуванням $\left(\Delta \tilde{\sigma}^{ij} \right)_n^m$ прирощень напружень, обчислених згідно зі законом Гука за величиною прирощення повних деформацій:

$$\left(\sigma^{ij} \right)_n^m = \left(\sigma^{ij} \right)_{n-1}^m + \left(\Delta \sigma^{ij} \right)_n^m, \quad (2.116)$$

При наявності фізично нелінійних деформацій дійсні значення напружень $\left(\overline{\sigma}_{ij} \right)_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових

реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються із використанням скорегованих компоненти девіатора напружень $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$, що враховують наявність фізично-нелінійних деформацій, за формулою:

$$\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma_{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m, \quad (2.117)$$

Для випадку пружнопластичного деформування обчислення $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості $\tau_s(\mathcal{G}, T)$ [223]:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s(\mathcal{G}, T)}{\tau} \quad (2.118)$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}}/2$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

На рис. 2.10 показані напруження в стані n . Пластичне течіння описується шляхом зберігання девіатора напружень на межі текучості. Графічне відтворення межі текучості, відповідно до умови текучості Мізеса, у просторі головних напружень $\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \overline{\sigma_3}$, є поверхнею у вигляді прямого кругового циліндру, слід якого на девіаторній площині ($S_1+S_2+S_3=0$, де S_1, S_2, S_3 – девіатори головних напружень) є коло радіусом τ_s .

Після збільшення деформацій напруження змінюються і переходять у стан $(n+1)$, який знаходиться за колом текучості. У відповідності з прийнятою умовою текучості, не реалізується. Замість цього в матеріалі відбувається пластичне течіння, а напруження перебувають на межі пружності, тобто на колі текучості.

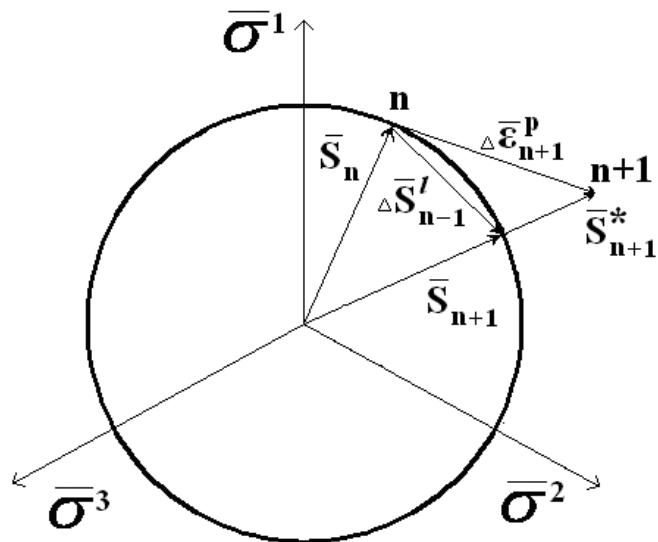


Рис.2.10.

Пластична частина деформацій перпендикулярна до кривої текучості і необхідно обмежити саме ті напруження, які пов'язані з цією частиною деформацій. Тому напружений стан замість стану $(n+1)$ відповідатиме точці, яка знаходиться на перпендикулярі до кола, проведеному з точки, що відповідає стану $(n+1)$.

Корекція напружень проводиться на кожній ітерації тільки в тих випадках, коли виконується умова

$$\tau > \tau_s \quad (2.119)$$

Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень і накопичених деформацій пластичності $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m$:

$$(\varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) (\overline{s}_{ij})_m / G_1. \quad (2.120)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\nu)$.

В даному розділі наведені варіанти розрахункових дискретних співвідношень і алгоритмів розв'язку систем нелінійних рівнянь МСЕ, які потребують ретельного дослідження їх ефективності шляхом порівняння отримуваних результатів, як із даними отриманими іншими авторами, так і між собою. Це забезпечує при розгляді конкретних об'єктів оптимізацію їх дискретних моделей і в цілому комп'ютерного процесу чисельних розрахунків, а також становить суттєве підґрунтя для розвитку методики на нові більш складні класи задач.

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ДОСТОВІРНОСТІ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Для обґрунтування ефективності отриманих в попередній розділі на основі МССЕ розрахункових співвідношень МСЕ розглянуто низку контрольних і приладних задач при використанні всіх трьох типів СЕ, як основних так і модифікованих варіантів.

На першому етапі для обґрунтування достовірності чисельних результатів проведено їх співставлення з відомими аналітичними або чисельними розв'язками пластин і оболонок. Особлива увага приділена достовірності результатів обчислення НДС тонкостінних, комбінованих і масивних тіл з концентраторами напружень. Проведено дослідження ефективності алгоритмів розв'язання нелінійних систем, наведених в попередній розділі, при розвитку деформацій пластичності.

На другому етапі для ілюстрації можливостей розробленого підходу виконані розрахунки пружного і пружнопластичного деформування відповідальних об'єктів машинобудівної і будівельної промисловості, таких як зварний ротор парової турбіни великої потужності і резервуар для зберігання рідини значного обсягу.

3.1. Достовірність і ефективність МССЕ при розрахунку тонкостінних тіл обертання

Результати дослідження збіжності розв'язків, отриманих із використанням МССЕ при розрахунках тонких круглих пластин представлені на рис. 2.1,а і 2.1,б. Залежно від граничних умов, навантаження й конфігурації розглянуто шість розрахункових схем, які показані на врізці рис.3.1,а [179]: вільно оперта (1) і

жорстко затиснена (2) кругла суцільна пластина під дією рівномірного навантаження; вільно оперта (3) і жорстко затиснена (4) кругла суцільна пластина під дією зосередженої сили; кільцева пластина під дією рівномірно-розподіленого навантаження сталої (5) та ступінчасто-змінної (6) товщини.

Для перших чотирьох розрахункових схем прийняті наступні вихідні дані: товщина $h = 1$ см і радіус $a = 80$ см, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,25$. Схема №5 - пластина товщиною $h = 1$ см, зовнішнім радіусом $a = 60$ см і внутрішнім радіусом отвору $b = 20$ см, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. У розрахунковій схемі №6 зовнішній радіус пластини $a=60$ см, внутрішнім радіусом отвору $b=20$ см, товщина зменшується за лінійним законом уздовж радіуса до центру пластини від $h = 1$ см до $h=1/3$ см, коефіцієнт Пуассона $\nu=1/3$. Зосереджена сила прийнята рівною $P = 2\pi$ кг; рівномірне навантаження інтенсивністю $q = 1$ кг/см³.

На рис. 3.1,а зображені графіки похибок максимального переміщення в центрі пластини ($Z^2=0$) у відсотках (відкладені уздовж осі ординат) отримані МСЕ при різній кількості СЕ у радіальному напрямку з урахуванням осі симетрії й рівномірного розбиття на СЕ (відкладені уздовж вісі абсцисс) По товщині пластини прийнято один елемент. Відсоток похибки визначений відносно до аналітичного розв'язку для тонких круглих пластин [217]. Цифри, якими позначені криві, відповідають номеру розрахункової схеми.

На рис. 3.1,б представлені епюри колових напружень на нижній поверхні жорстко затисненої пластини під дією рівномірного навантаження (розрахункова схема №2) і зосередженої сили (розрахункова схема №4). Суцільна лінія відображає аналітичний розв'язок [217], пунктирна й штрихпунктирна - розв'язки, отримані за МССЕ відповідно при використанні 5 і 15 скінченних елементів. Значення напружень, визначені МСЕ, позначені на епюрах ромбиками й кружками.

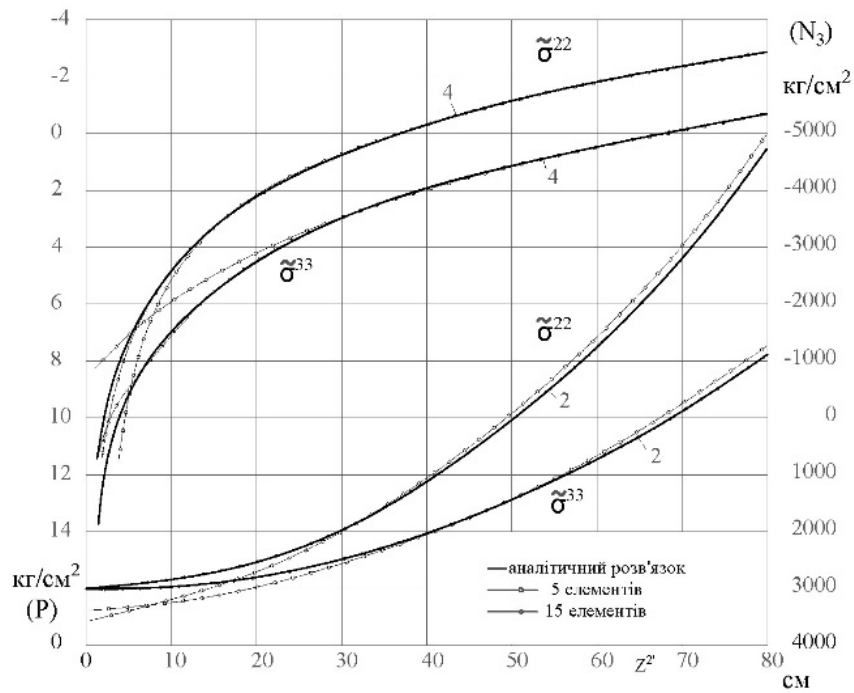
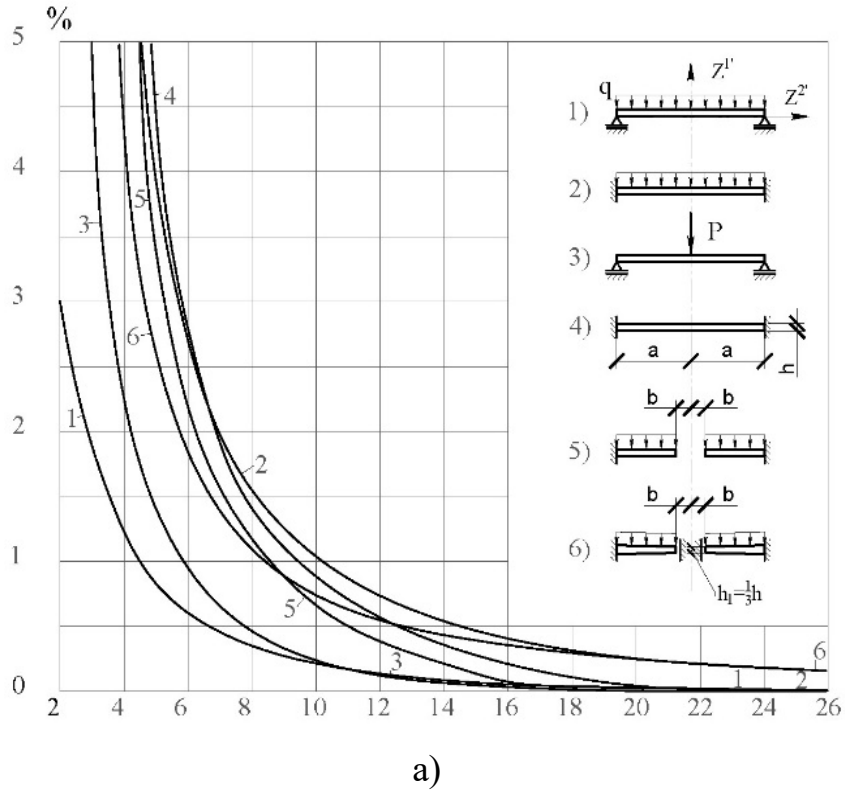


Рис.3.1.

Результати дослідження збіжності МССЕ при розрахунках оболонок обертання представлені на рис. 3.2-3.4. Розглянуто три типи оболонок: сферичний купол, жорстко затиснений по контуру, під дією рівномірного нормального

навантаження (рис. 3.2), розсічений уздовж утворюючої нескінченний циліндр, один край у якого затиснений, а до іншого прикладене рівномірно розподілене навантаження (рис. 3.3) та торосферичний посуд, що складається з елементів сфери, тора й циліндра і знаходиться під дією внутрішнього тиску (рис. 3.4). По товщині оболонок прийнято один скінченний елемент. Вісь X^1 місцевої системи координат збігається за напрямком з нормаллю до серединної поверхні, X^2 - дотична до неї.

Радіус серединної поверхні сферичного купола (рис. 3.2,а) $R=228$ см, товщина $h=7,6$ см, кут розхилу $\varphi=35^\circ$, $\nu=1/6$. Інтенсивність рівномірного нормального навантаження $q=0,07$ кг/см³. Результати розрахунку сферичного купола, отримані МСЕ, дорівнюють розв'язку, який наведений в роботі [217]. На рис.3.2,а зображена крива, що характеризує збіжність напружень нормального зсуву в центрі оболонки залежно від числа елементів при рівномірній розбивці меридіана. Епюри мембранних кільцевих зусиль N_3 і меридіальних згинальних моментів M_2 представлені на рис. 3.2,б.

Суцільні лінії відповідають розв'язку, наведеному в роботі [217], пунктирна й штрихпунктирна - розв'язку, отриманому за МССЕ при 11 і 21 скінченних елементах. Щоб визначити значення згинального моменту якнайближче до затисненого краю купола, в опори застосовувався приграничний елемент із кутовим розміром $0,1^\circ$. На іншій дузі меридіана зберігалася рівномірна розбивка. Значення напружень, визначені МСЕ, позначені на епюрах ромбиками й кружками.

Радіус серединної поверхні нескінченного розсіченого циліндра (рис. 3.3) $R=20$ см, товщина $h = 1$ см, $\nu = 0$. Інтенсивність розподіленої уздовж утворюючої навантаження $P = 1$ кг/см.

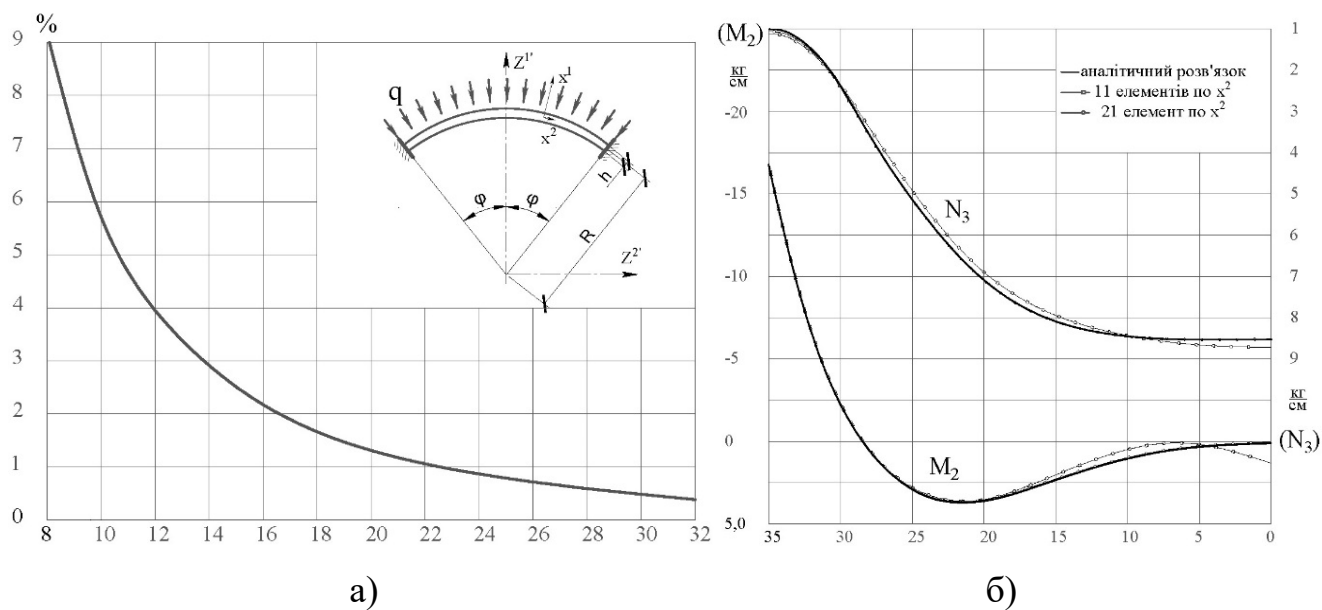


Рис. 3.2

На рис. 3.3 зображені графіки збіжності переміщення u^1 , у точці A ($Z^1=R$, $Z^2=0$) і максимального згинаючого меридіонального моменту в точці B ($Z^1=0$, $Z^2=R$). Результати збіглися з аналітичним розв'язком.

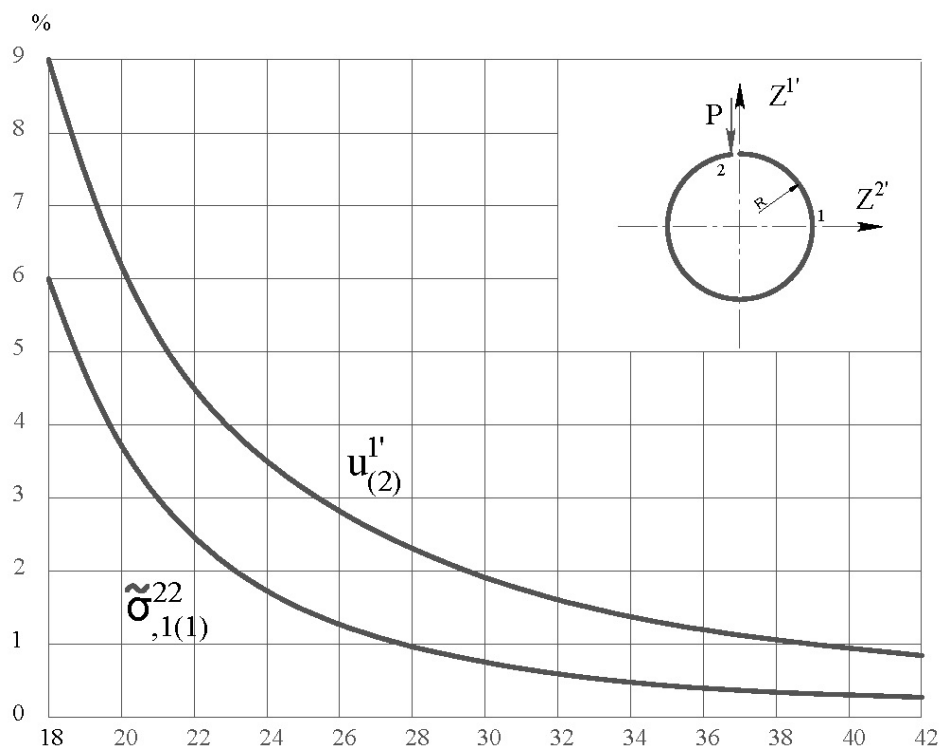


Рис.3.3

Для порівняння не тільки з теоретичними, а й із експериментальними результатами розглянемо торосферичний посуд. Розрахункова схема представлена на рис. 3.4. Товщина стінки сосуда $h=1/4$ дюйма (0.00635 м), коефіцієнт Пуассона $\nu=0.31$, інтенсивність внутрішнього тиску складає 100 фунтів на один квадратний дюйм (689.476 кН/м²). Результати розрахунків за МССЕ збігаються з розв'язком, отриманим у роботі [7] МСЕ на базі теорії тонких оболонок і даними експерименту.

На рис. 3.4 наведені епюри напружень σ^{22} на зовнішній і внутрішній поверхні торосферичної посудини. Суцільною лінією представлені результати роботи [140], пунктирною й штрихпунктирною - результати, отримані на базі МССЕ при 21 і 42 СЕ. Відношення числа елементів на сферичній, тороїдальній і циліндричній ділянках оболонки становить 4:1:3. Дані експерименту на рисунку позначені кружками.

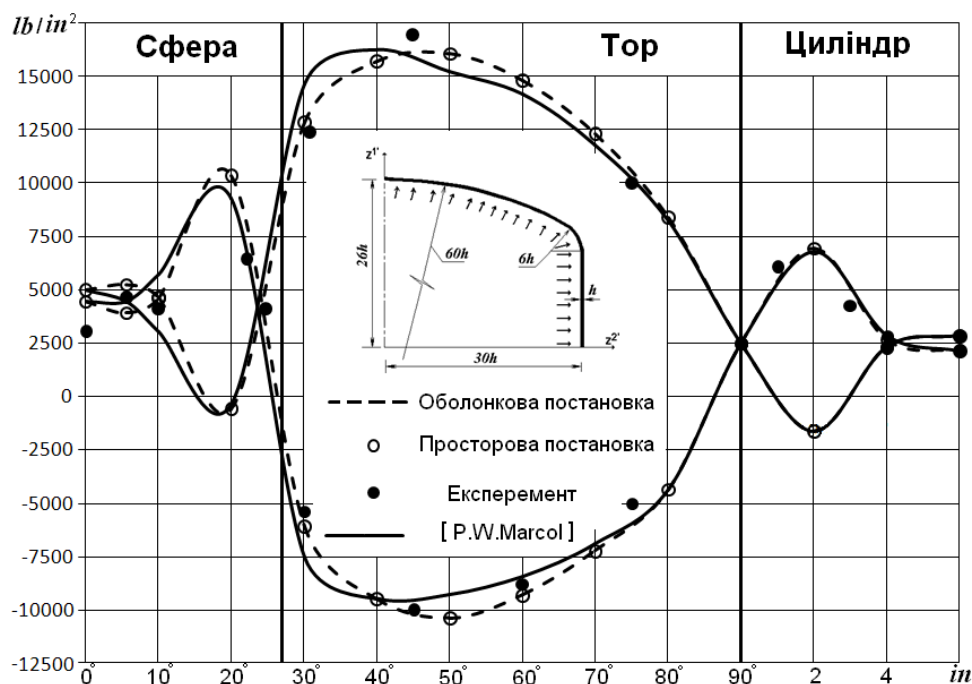


Рис.3.4

Дослідження збіжності показали, що застосування більше шести елементів на тороїдальній ділянці практично не змінює картину напруженого стану. Епюри меридіональних напружень, отримані різними схемами СЕ й дані експерименту

близькі між собою, однак, напруження, визначені МСЕ, основанийому на застосуванні моментної схеми, якісно й кількісно ближче до експериментальних результатів. Очевидно, це неправильно пояснити більш досконалою структурою рівнянь МССЕ, що дозволяє вирішувати задачі деформування нетонких пластин і оболонок.

Зі збільшенням відносної товщини пластин рівняння класичної теорії приводять до спотворення реальної картини напружено-деформованого стану конструкції. Тому для розрахунків нетонких пластин знаходять широке застосування різні уточнені теорії, що враховують обтиск й поперечний зсув. Рівняння МССЕ у випадку апроксимації пластини одним елементом по товщині за своїм характером близькі до рівнянь уточнених теорій. У табл. 3.1 наведені значення безрозмірних прогинів, у центрі вільно обпертої рівномірно навантаженої круглої пластини, визначені за допомогою МССЕ й на основі застосування різних уточнених теорій [45] для відносних товщин $h/a=1/5$ і $h/a=1/3$

Таблиця 3.1.

	[5, 289]	[123]	[183, 184]	[161]	МССЕ
$h/a=1/5$	1,0345	1,0362	1,0368	1,0361	1,0346
$h/a=1/3$	1,0958	1,1005	1,1030	1,1004	1,0952

В основному, усі уточнені теорії й МССЕ дають близькі результати. У даній задачі найбільш повний збіг відзначається між МССЕ й теоріями [5, 289]. На основі проведеного порівняння можна зробити висновок про те, що МССЕ при використанні одного елемента по товщині дозволяє отримати результати, що наближаються до розв'язків, визначених по теорії нетонких оболонок.

З метою визначення меж застосовності подібної апроксимації були вирішені задачі згину вільно обпертої й жорстко затисненої круглих пластин під дією рівномірного поперечного навантаження при збільшенні відносної товщини до $h/a=1/3$. Відмінність розв'язку, отриманого з використанням одного СЕ по товщині від розв'язку, отриманого для пластини як для масивного тіла (10 СЕ по

товщині) склало 4,1% у випадку жорсткого затиснення й 3,5% - для вільного обпирання.

Для дослідження характеру збіжності, а також достовірності отримуваних результатів та ефективності методики із використанням двовимірних СЕ при розрахунку об'єктів, один із розмірів яких набагато менше інших, що є характерним для тонкостінних об'єктів, розглянуто тестові приклади про згин шарнірно опертої круглої пластини (рис. 3.5,а) та балки (рис. 3.6,а), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням.

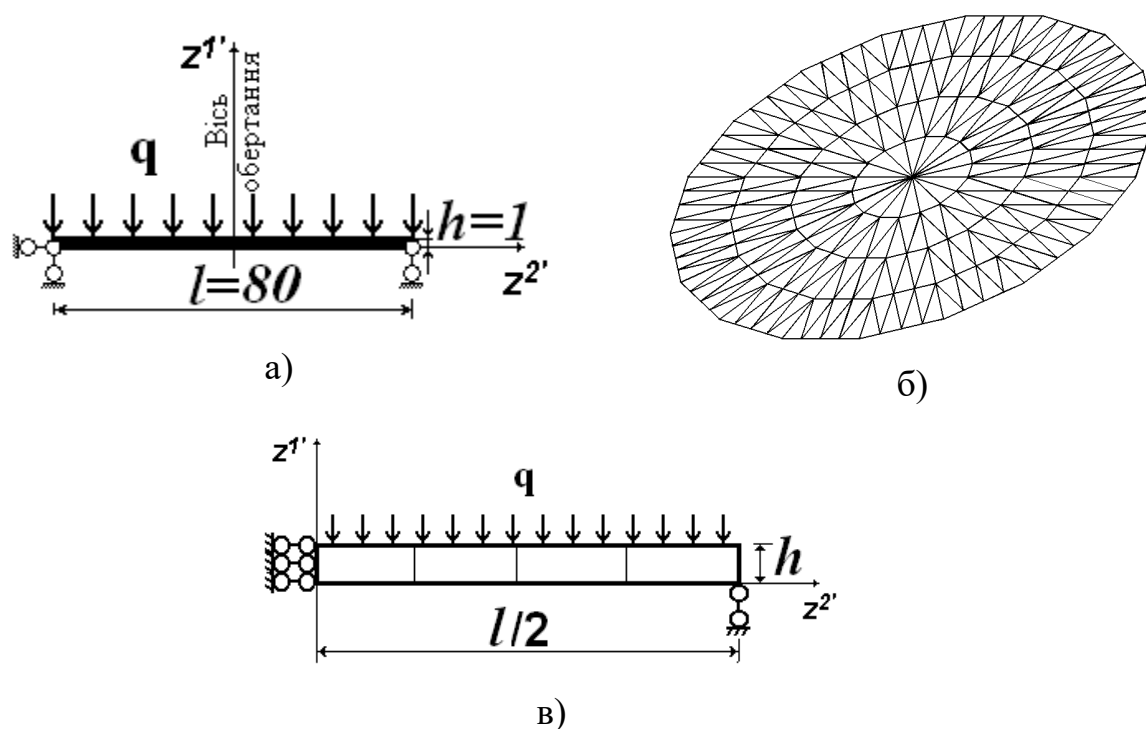


Рис. 3.5.

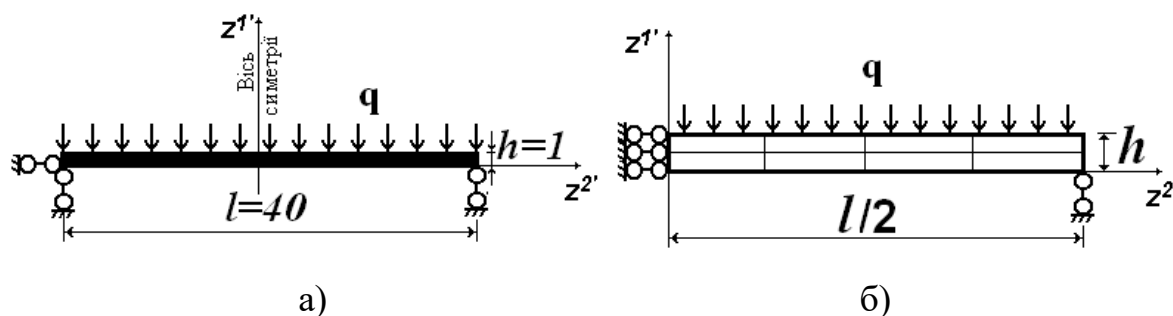


Рис. 3.6.

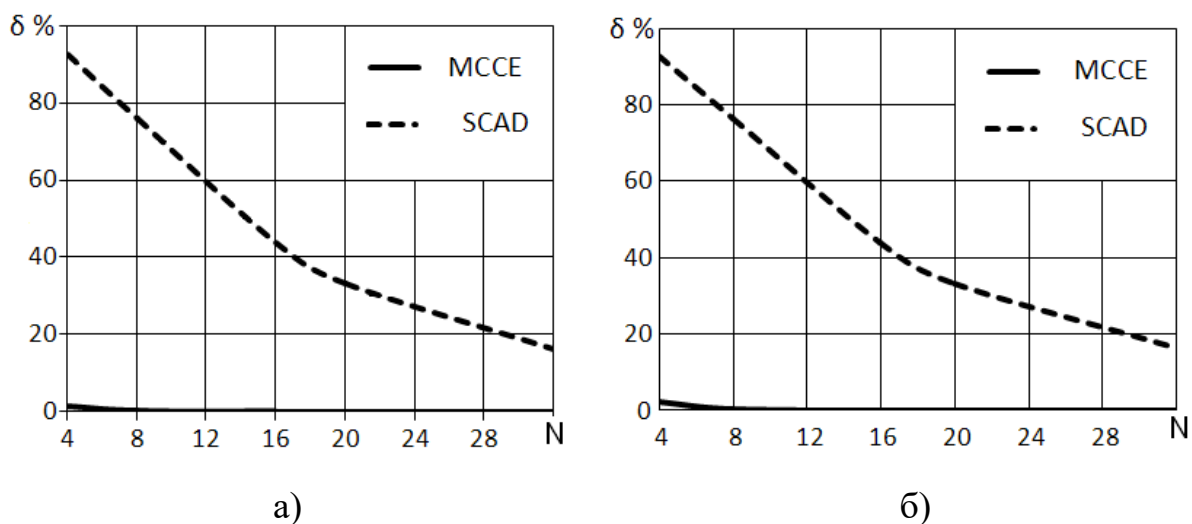


Рис. 3.7.

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $l=0.8$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок. Отримані результати показали, що наведені двовимірні СЕ (рис. 3.5,в) для тонкостінних об'єктів не поступаються по ефективності з оболонковими СЕ програмного комплексу SCAD (рис. 3.5,б) та суттєво перевищують по збіжності при розгляді даної пластини двовимірні (рис. 3.6,а). Порівняння із скінченно елементною базою програмного комплексу SCAD показали переваги розроблених СЕ, які дозволяють ефективно розв'язувати задачі для тонкостінних об'єктів не поступаючись по ефективності оболонковим СЕ та суттєво перевищуючи по збіжності двовимірні СЕ при розгляді тонкостінних об'єктів, а також при наявності концентраторів напружень в масивних тілах.

Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ із використанням скінченноелементної бази, що ґрунтується на використанні МССЕ та програмного комплексу SCAD, в залежності від кількості N СЕ в дискретній моделі на половині балки наведене на (рис. 3.6,б), також використовувалися дискретні моделі $1 \times N$, де $N=8, 16, 20, 32$ кількість СЕ по довжині балки. Геометричні і механічні параметри балки є наступними: $l=0.4$ м, $h=0.01$ м модуль пружності

$E=10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$. Швидкість збіжності результатів показана на рис. 3.7, а для напруження та рис. 3.7, б для прогинів.

Як видно, використання МССЕ має кращу збіжність результатів порівняно з програмним комплексом SCAD, що дозволяє зробити висновок про ефективність використання МССЕ, при розрахунку тонкостінних об'єктів з використанням двовимірних СЕ.

3.2. Достовірність і ефективність МССЕ при розрахунку масивних і комбінованих тіл.

При розрахунку масивних тіл особливий інтерес становить розподіл напружень поблизу контуру тіла, оскільки у більшості випадків саме тут розташовані зони максимальних напружень. Збільшенню точності визначення контурних напружень значною мірою допомагає застосування нерівномірної апроксимуючої сітки з приграничним шаром, розміри елементів якого в напрямку, нормальному до поверхні тіла відносно малі. Ефективність використання приграничних елементів вже відзначалися в попередньому параграфі при розгляді пластин під дією зосередженої сили і з жорстко затисненим краєм.

Розглянемо можливості застосування нерівномірної сітки в задачі пружної рівноваги циліндра нескінченної довжини під дією внутрішнього тиску (задача Ляме). Розрахункова схема циліндра представлена на рис. 3.8, зовнішній радіус прийнятий $R = 1$ см, внутрішній - 0,5 см, інтенсивність нормального тиску $q = 1$ кг/см³.

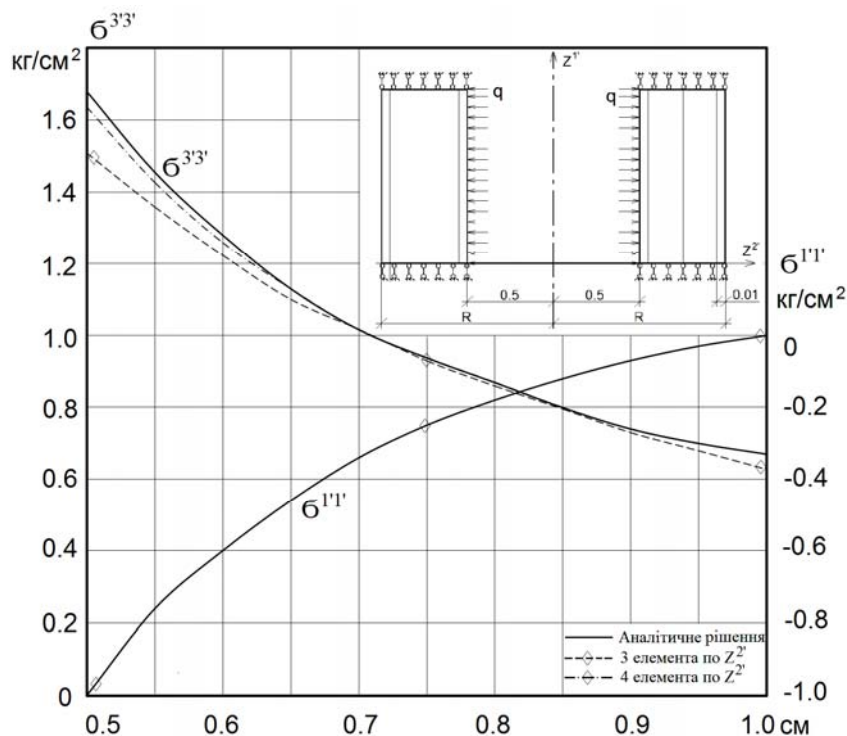


Рис. 3.8.

Оскільки уздовж твірної реалізується плоский деформований стан, то досить розглянути відрізок циліндра довільної довжини, укладеної між осями симетрії, нормальними до осі обертання. На розрахунковій схемі показані два варіанти нанесення апроксимуючої сітки при 3-х і 4-х елементах в радіальному напрямку. Товщина приграничного шару прийнята $R/100$ або $0,01$ см. Напрями осей місцевої X^i і базисної систем координат збігаються.

Результати розрахунку представлені на рис. 3.8 у вигляді епюр радіальних σ^{22} і кільцевих σ^{33} напружень. Суцільною лінією позначено аналітичний розв'язок [120]; пунктирною - розв'язок при 3-х скінченних елементах, штрихпунктирною - при 4-х. Кругами та ромбиками на графіках відзначені значення напружень, отримані в центрах СЕ.

чСлід відзначити досить високу швидкість збіжності: так три скінченних елементи добре передають якісну картину розподілу кільцевих напружень по товщині циліндра, а максимальна похибка порівняно з аналітичним розв'язком не перевищує 9%, при цьому помилка обчислення радіальних напружень близька до

нуля. Похибка визначення кільцевих напружень при використанні чотирьох СЕ 2,5%, п'яти - не нижче 0,8%, шести - близько 0,2%.

При одному і тому ж числі СЕ (наприклад чотирьох) рівномірна сітка призводить до дещо гіршої збіжності: похибка обчислення окружних напружень на границі становить 3,7%, що приблизно в 1,5 рази перевершує похибку, отримувану в результаті застосування приграничного шару. До того ж швидкість збіжності рівномірної сітки відносно повільна: точність порядку 2,5% досягається при 9-10 скінченних елементах.

Наведене порівняння підтверджує доцільність використання приграничного шару в задачах, пов'язаних з визначенням напружено-деформованого стану конструкцій, причому, можна припустити, що ефективність застосування нерівномірної сітки буде зростати в міру ускладнення дійсного поля напружень.

Зіставлення МССЕ з іншими схемами скінченних елементів свідчить про приблизно однакову ефективність різних СЕ, що застосовувалися до вирішення цієї задачі, і, зокрема, трикутного СЕ з лінійними законом розподілу переміщень. Мабуть, це можна пояснити відносною простотою об'єкта. Дещо інша справа, коли необхідно дослідити розподіл напружень в області криволінійного контуру. Як приклад розглянемо задачу про розтягуванні площини, ослабленою круговим отвором (задача Кірша). Біля краю отвора похибка визначення напружень в результаті використання трикутних елементів з лінійним законом розподілу переміщень знаходиться в межах 12-15% при 72 вузлах розрахункової сітки [85]. Застосування МССЕ забезпечує точність такого ж порядку при апроксимуючій сітці з числом вузлів в межах 24. До того ж, як показали дослідження збіжності, виявилось недоцільним використовувати більше 6 СЕ уздовж криволінійного контуру на кут розчину 90° .

Великий інтерес становить вивчення збіжності МССЕ для об'єктів зі змінним радіусом криволінійного контуру. З цією метою розглянемо задачу про визначення коефіцієнта концентрації осьових напружень $\sigma^{1'1'}$ в глибинній виточці на поверхні циліндричного стрижня, торцеві поверхні якого навантажені рівномірними розтягуючими зусиллями. Радіус стрижня в зоні виточки $R = 1$ см,

радіус на торцях дорівнює 2 см, загальна довжина циліндра 6 см. Інтенсивність рівномірної торцевої навантаження $q=1$ кг/см², коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. Виточка в меридіональному перерізі являє собою гіперболу, рівняння якої в базисній системі координат Z^1 має вигляд:

$$Z^1 = \frac{0.4Rs}{\sqrt{0.84}}, \quad Z^2 = R\sqrt{1+s^2}, \quad -\sqrt{3} \leq s \leq \sqrt{3} \quad (3.1)$$

Апроксимуюча сітка, один з варіантів якої представлений на рис. 3.9,а, нанесена таким чином, щоб з найбільшою точністю можна було отримати значення осьових напружень на поверхні виточки в точці з координатами $Z^1=0$, $Z^2=R$ (в критичній точці). Для цього площу меридіонального перерізу розділена на дві частини еліпсом, перехідним через точку перетину твірної і межі виточки. На прилеглий до осі частини стрижня вершини скінченних елементів визначені координатами перетину сімейства еліпсів і софокусних з ними гіпербол.

На торцевій частині скінченні елементи виділені прямими, паралельними осі обертання, з подальшою розбивкою цих ліній на ділянки рівної довжини. На основі досліджень, проведених в задачі Кірша, вдалося визначити, що оптимальна товщина прикордонного шару у криволінійної кордону становить орієнтовно 1/10 радіуса отвору. Це число знаходиться в межах інтервалу (1/8-1/15), встановленого на основі даних, наведених у роботі [89] про величини відносини товщини прикордонного шару до радіусу кривизни, використовуваних різними авторами. Тому розміри сторін елемента, розташованого критичної точки, прийняті по осі Z^2 і на кордоні виточки рівними $R/50$ або 0,02 см, що становить приблизно 1/10 мінімального радіуса кривизни. Гіперболи проведені через проміжки на осі Z^2 , довжина яких визначена як величина членів арифметичної прогресії з нульовим членом $a_0 = R/50$ і сумою членів $\sum_{m=1}^n = R$ залежно від числа членів n в радіальному напрямку. Софокусні їм еліпси побудовані аналогічно.

Результати розрахунку представлені на рис. 3.9,б у вигляді графіків, що характеризують збіжність коефіцієнта концентрації в критичній точці залежно від числа SE в радіальному осьовому напрямку. Номер кривої на малюнку відповідає кількості скінченних елементів вздовж осі Z^2 ; по осі абсцис відкладено кількість елементів, що припадають на виточку. Згущення сітки на торцевій частині циліндра в напрямку осі обертання незначно впливає на збіжність і тому не проводилося. Таким чином зазначене на графіку число елементів дорівнює загальному числу SE уздовж осі Z^1 мінус два.

$$K = \frac{\sigma^{11'}}{4q} \quad (3.2)$$

Відсоток похибки визначався шляхом порівняння з розв'язком задачі про розтягування однопорожнинного гіперболоїда обертання (задача Нейбера). Аналітичне значення коефіцієнта концентрації можна підрахувати за формулою [120]:

$$K = \frac{1}{2\mu_0} \frac{1 + \mu_0}{1 + 2\nu\mu_0 + \mu_0^2} [2 + \mu_0^2 - (1 - 2\nu)\mu_0]. \quad (3.3)$$

Величина параметра μ_0 характеризує вид гіпербол і у даному прикладі дорівнює 0,4.

Чисельні експерименти показали, що прийняті розміри радіуса і довжини стрижня при заданій формі і глибині виточки дозволяють звести до мінімуму вплив відмінності між граничними умовами в даному прикладі і аналітичному розв'язку на результати розрахунку.

Аналізуючи побудовані криві, можна відзначити досить швидко збіжність при згущенні апроксимуючої сітки в радіальному напрямку. Так 5 SE вздовж осі забезпечують точність в межах 2% залежно від числа SE на границі виточки. Криві, відповідні більшому числу розбивки по товщині стрижня, близькі одна до

одної і, починаючи з 9 СЕ, практично збігаються, а точність, яка досягається, становить 2%.

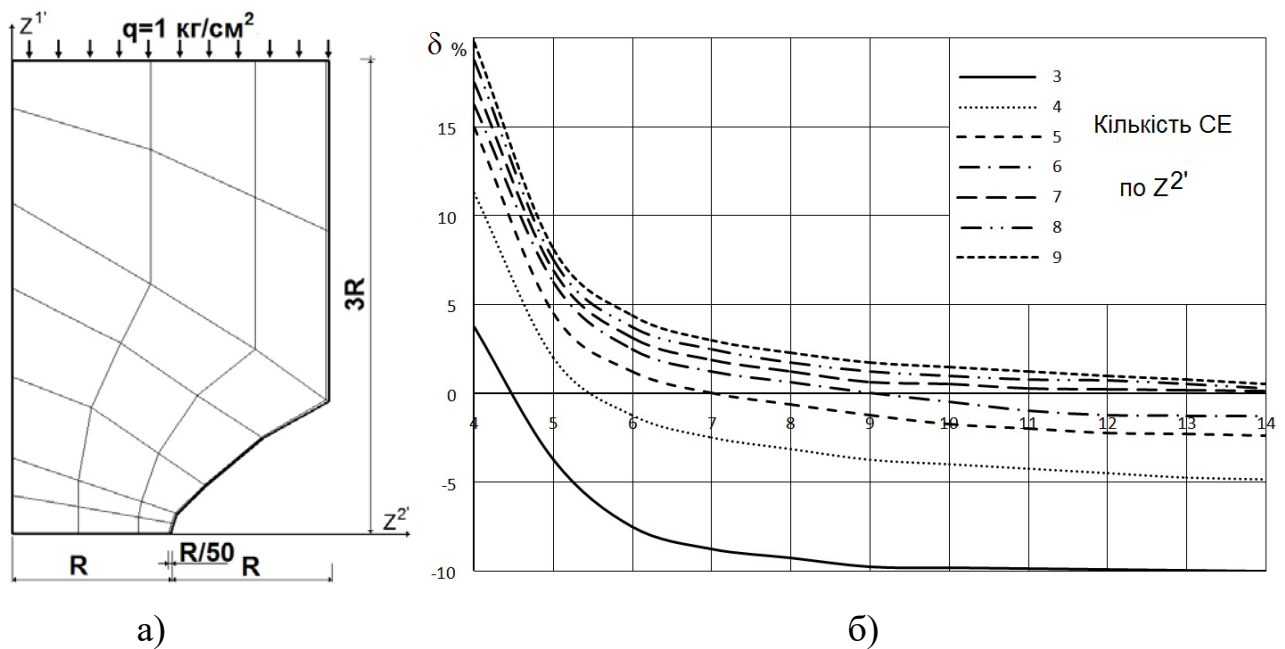


Рис. 3.9.

Наведені приклади переконливо свідчать про застосовність МССЕ до розрахунку масивних тіл обертання з досить складною картиною розподілу напружень, включаючи визначення коефіцієнтів концентрації кінцевої величини.

Однак, у великій кількості конструкцій форма або граничні умови можуть призвести до виникнення напружень, що дорівнюють нескінченності. Досить часто виникає ситуація, коли величину, напружень або деформацій необхідно визначити на достатньому віддаленні від точки концентрації. У цьому випадку вимагає відповіді питання про правильність розв'язку, отриманого на такій віддаленій ділянці, при розрахунку всієї конструкції з позицій МССЕ.

Для вивчення цієї проблеми розглянемо задачу про пружну рівновагу короткого циліндра, закріпленого від зсувів на бічній поверхні, під дією поперечного навантаження. Радіус циліндра $a=1 \text{ см}$, довжина прийнята рівною радіусу, інтенсивність розподілу навантаження на торцях $q=1 \text{ кг/см}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,25$ (рис. 3.10).

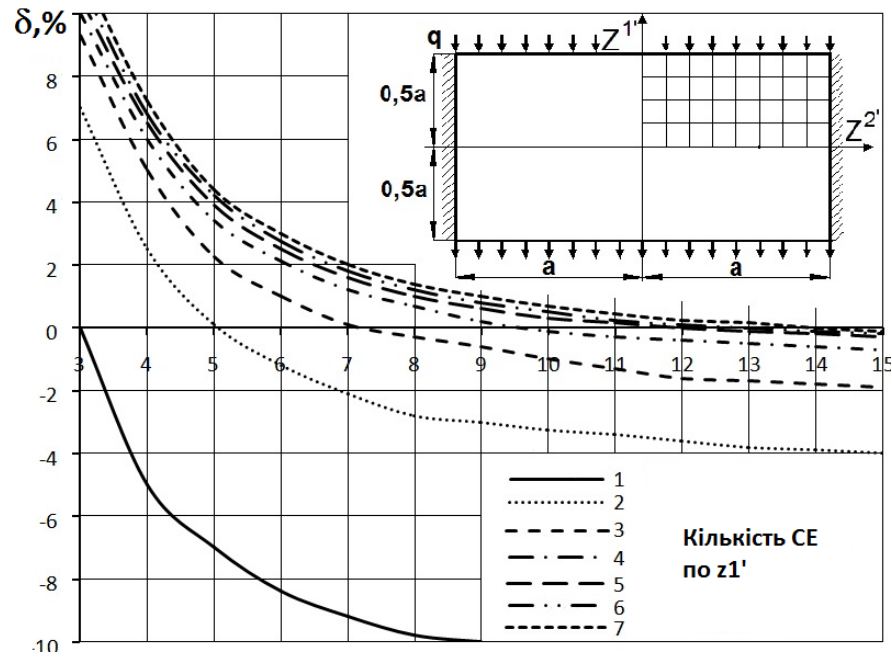


Рис. 3.10.

Для обчислення напружень на поверхні циліндра з максимальною точністю, зовнішній контур тіла оточений приграничним шаром товщиною $a/50=0,02$ см (рис. 3.11). Усередині приграничного шару використовувалося рівномірне розбиття на скінченні елементи. Число СЕ по осі Z^1 прийнято постійним і рівним шести, включаючи приграничний елемент.

На рис. 3.11 представлені епюри радіальних $\sigma^{2'2'}$ і кільцевих $\sigma^{3'3'}$ напружень на поверхні циліндра $Z^2=0,5$ см. Суцільною лінією позначені результати роботи [60], пунктирною – розв'язок, отриманий МССЕ при 7 елементах вздовж осі Z^2 штрихпунктирною - при 19 СЕ, включаючи приграничний елемент. Напружено-деформований стан, визначений різними методами, добре узгоджується, на більшій частині циліндра.

Наведені дані дозволяють зробити висновок про можливість використання МССЕ до розрахунку конструкцій з особливістю поля напружень, яка прямує до нескінченності.

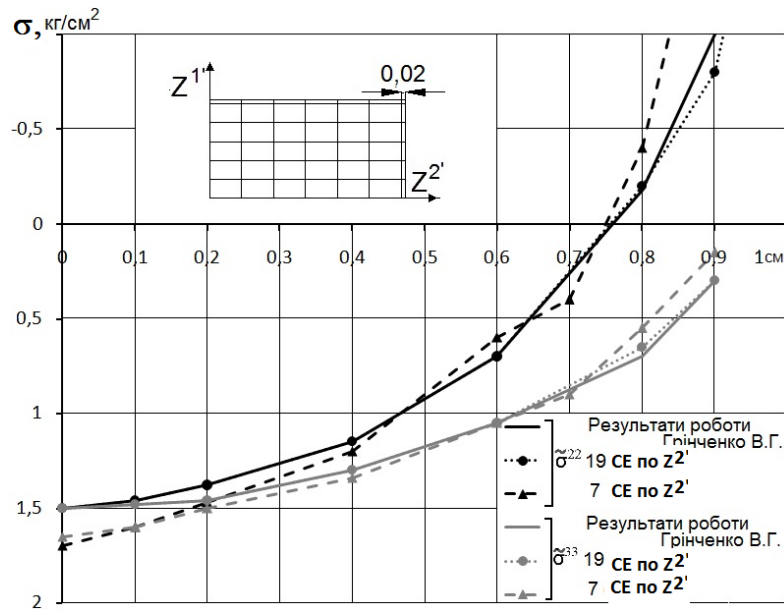


Рис. 3.11.

Епюри напружень, побудовані на основі МССЕ, носять характер ламаних ліній, точки перегину яких вагаються щодо кривих роботи [60], причому амплітуда відхилень збільшується із зростанням координати Z^2 . Згущення сітки в радіальному напрямку надає ламаним більш плавний характер і дозволяє досить точно визначати значення напружень. Так, при 19 елементах максимальна похибка напружень на ділянці від осі обертання до точки $Z^2=0,9$ см не перевищує 5%. Слід зауважити, що точність визначення напружень на площинах $Z^2=\text{const}$ істотно зростає в міру наближення до осі Z^2 і представлені на рис. 3.11 епюри побудовані в найбільш навантаженому перерізі.

Збіжність МССЕ при розрахунку конструкцій з неоднорідного матеріалу визначалася шляхом порівняння з результатом, отриманим на основі інтегрування диференціальних рівнянь теорії пружності за методикою, описаною в роботі [59].

В якості об'єкта розглянуто порожнистий циліндр (рис. 3.12,а), торці якого закріплені від зсувів в радіальному напрямку. Товщина стінок циліндра дорівнює 11 см, внутрішній радіус $R=20$ см, довжина $H=40$ см. Матеріал конструкцій в напрямку осі Z^2 розподілений по двох шарах: зовнішньому товщиною $h=1$ см і внутрішньому товщиною $h=10$ см, відношення модулів пружності зовнішнього і внутрішнього шарів становить 100:1, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$. Навантаження,

розподілені вздовж твірної по синусоїді, прикладені до зовнішньої поверхні циліндра. Умови контакту забезпечуються рівністю переміщень на стику двох шарів.

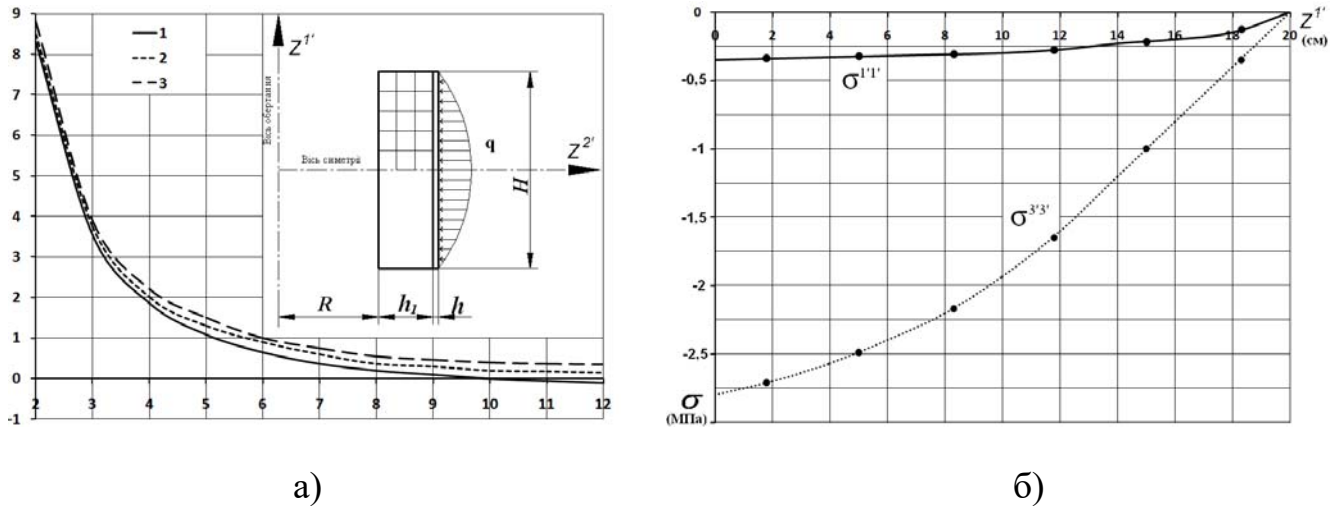


Рис. 3.12

Апроксимуюча сітка, один з варіантів якої зображений на розрахунковій схемі, сформована таким чином, що по товщині зовнішнього шару завжди приймається один елемент. За товщиною внутрішнього шару і в осьовому напрямку використовується рівномірна розбивка на скінченні елементи.

Результати розрахунку представлені на рис. 3.12,а у вигляді кривих, що відображають залежність точності визначення переміщення в точці з координатами $Z^{1'}=0$, $Z^{2'}=R+h_1+h$ від числа елементів вздовж твірної. Номер кривої збігається з кількістю елементів, прийнятих по товщині внутрішнього шару. На рис. 3.12,б зображені епюри кільцевих $\sigma^{3'3'}$ і осьових $\sigma^{1'1'}$ напружень на зовнішній поверхні циліндра. Кружками на графіках позначені величини напружень, отримані МССЕ при 6 елементах вздовж твірної і 1 СЕ по товщині внутрішнього шару.

У розглянутій задачі основний інтерес представляє вивчення збіжності результатів залежно від кількості СЕ по товщині циліндра, оскільки саме в цьому

напрямку відбувається досить стрімка зміна пружних властивостей матеріалу. Можна констатувати високу швидкість збіжності МССЕ при розрахунку конструкцій з неоднорідного матеріалу. Відхилення кривих № 1 і №3 на рис. 3.12,б не перевищує 0,3%. У цих же межах змінюються значення напружень на зовнішній поверхні циліндра.

При розрахунку масивних тіл особливий інтерес становить розподілення напружень поблизу контура тіла, оскільки в більшості випадків зазвичай тут знаходяться зони максимальних напружень. Збільшенню точності визначення контурних напружень в значній мірі допомагає використання нерівномірної апроксимуючої сітки з приграничним шаром, розміри елементів якої в напрямку нормалі до поверхні тіла можуть бути відносно малими по відношенню до їх довжини. Ефективність використання приграничного шару наочно виявлена навіть в такій елементарній задачі, як деформування нескінченного циліндру під дією внутрішнього навантаження (задача Ляме). З'ясувалося, що збіжність розв'язку цієї задачі при використанні приграничного шару товщина якого прийнята 1/100 до зовнішнього радіусу, є кращою порівняно з використанням рівномірної сітки. Так для обчислення кільцевих напружень на внутрішній поверхні циліндра для досягнення похибки в 3.5% при наявності приграничного шару достатньо 4 СЕ, а при рівномірній сітці необхідно 9 СЕ.

Приведене порівняння підтверджують необхідність використання приграничного шару в задачах, пов'язаних з визначенням напружено-деформованого стану конструкції. Таким чином, можна передбачити, що ефективність використання нерівномірної сітки буде збільшуватися по мірі ускладнення дійсного поля напружень, а особливо при наявності концентраторів.

В якості прикладу розглянемо задачу про розтяг площини, яка ослаблена круглим отвором (задача Кірша, рис. 3.13,а).

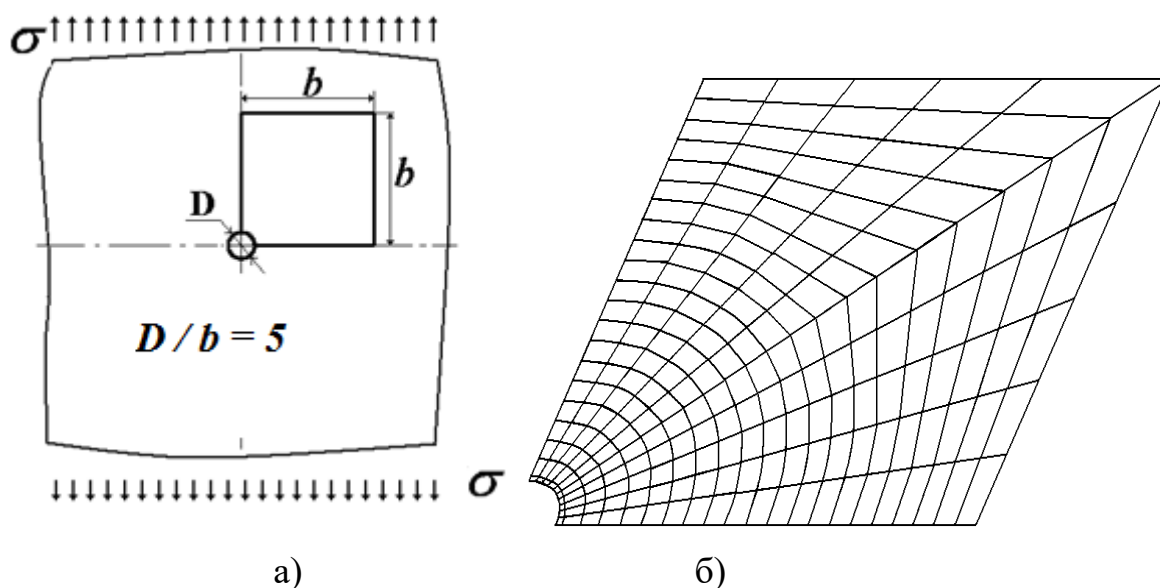


Рис. 3.13.

Похибка визначення напружень біля краю отвору в результаті використання трикутних елементів з лінійним законом розподілення переміщень становить 12-15% при 72 вузлах розрахункової сітки [85]. Використання МССЕ забезпечують точність такого ж порядку при апроксимуючій сітці з кількістю вузлів в межах 28. Також дослідження збіжності показало недоцільним використання більше 6 СЕ вдовж криволінійного контура на секторі 90 градусів. Коефіцієнти концентрації напружень, отримані із використанням МССЕ ($k=2,2$) має похибку по відношенню до теоретичного значення ($k=2$) 10% і є вдвічі меншою, ніж отримана із використанням скінченно елементною базою програмного комплексу SCAD.

Таким чином, розроблені СЕ дозволяють ефективно розв'язувати задачі для тонкостінних об'єктів не поступаючись по ефективності оболонковим СЕ та суттєво перевищуючи по збіжності двовимірні СЕ при розгляді тонкостінних об'єктів, а також при наявності концентраторів напружень в масивних тілах.

3.3. Ефективність алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь при пружнопластичному деформуванні

Для дослідження характеру збіжності і достовірності результатів та порівняння ефективності використання алгоритмів обчислення напружень при наявності деформацій пластичності (п.2.7) розглянемо приклад про пружнопластичне деформування нескінченної товстостінної труби під впливом внутрішнього тиску (рис.3.14), який змінюється від 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН/м}^2$, характеристики матеріалу: $E = 1 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, відношення межі текучості при чистому зсуві τ_s до модуля пружності E становить 1:5 [210]. Розрахунок проведено для фрагмента труби, обмеженого двома перпендикулярними до осі обертання поперечними перерізами, дискретна модель якого побудована із використанням плоских (рис.3.14,а) і вісесиметричних (рис.3.14,б) СЕ.

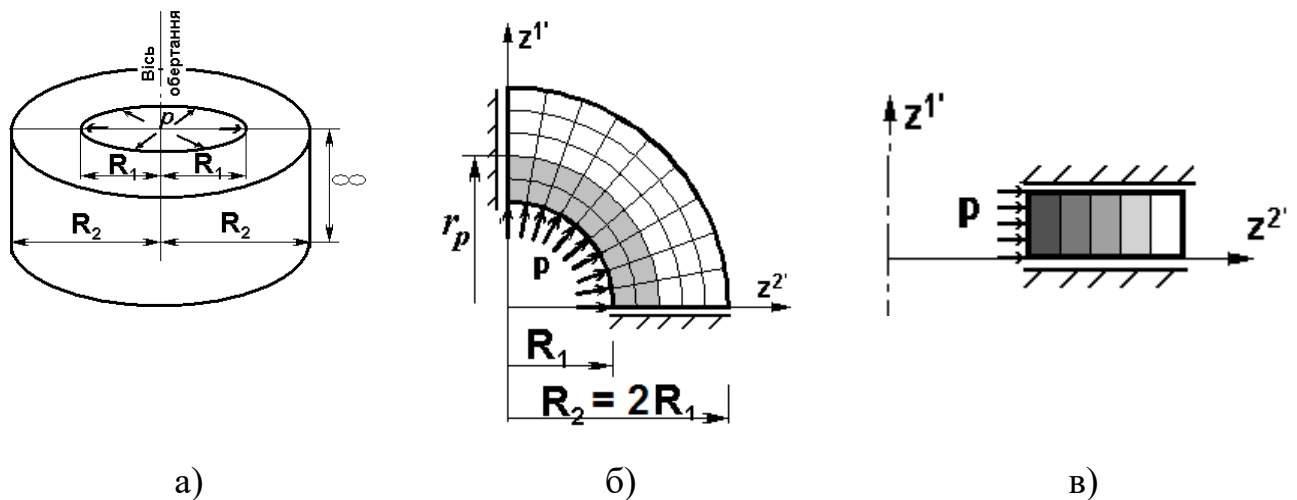


Рис. 3.14.

В таблиці 3.2 наведені результати обчислень величини максимального кільцевого напруження $\sigma_{z_3'z_1'\max}$ при різних значеннях інтенсивності внутрішнього тиску p . Протягом всього процесу деформування спостерігається збіг результатів, отриманих в вісесиметричній і плоскій постановках за розробленими алгоритмами зі розв'язком наведеним в [120].

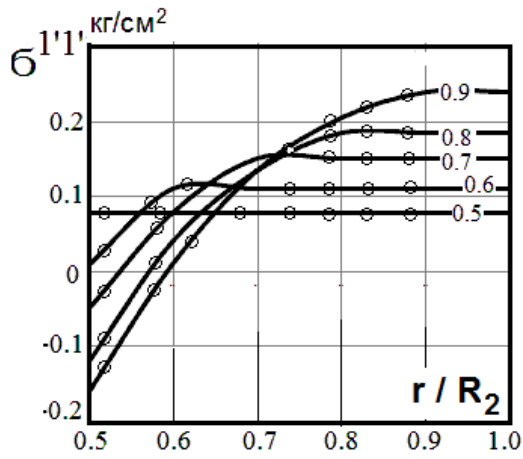
Таблиця 3.2

$p, \text{МН/м}^2$	0,037	0,051	0,059	0,064	0,07
$\sigma_{z'z'_{\max}}, \text{МПа [24]}$	0,0613	0,0648	0,0717	0,0795	0,0873
$\sigma_{z'z'_{\max}}, \text{МПа (МССЕ)}$	0,0609	0,0644	0,0711	0,0789	0,0865
Похибка	0,64%	0,69%	0,83%	0,71%	0,91%

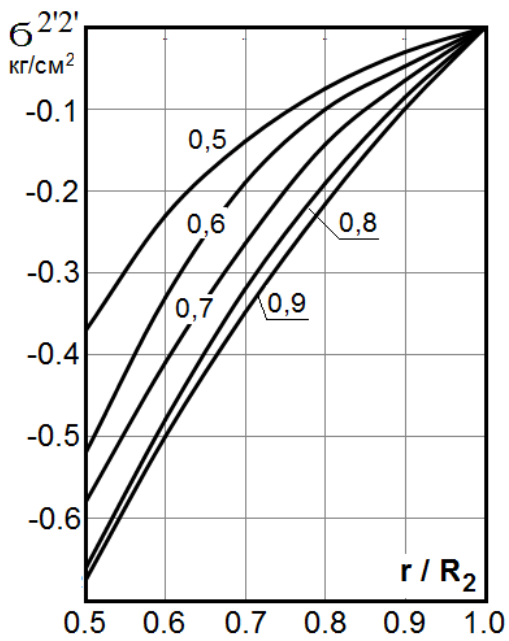
При зростанні навантаження від 0 до $p_1 = 0,037 \text{ МН/м}^2$ на внутрішній поверхні труби виникає зона пластичних деформацій (зона пластичності), радіус якої r_p збільшується із зростанням навантаження. При розв'язанні задачі покрокове змінення навантаження p в інтервалі $p_1 \leq p \leq p_{\max}$ проводилось так, щоб на кожному з кроків за навантаженням прирощення радіуса зони пластичності становило $1/5$ товщини стінки труби ($p_1 = 0,037, p_2 = 0,051, p_3 = 0,059, p_4 = 0,064, p_5 = p_{\max} = 0,07 \text{ МН/м}^2$), рис.3.14,в.

Для дослідження збіжності отримуваних результатів розв'язання задачі здійснювалось при вдвічі менших кроках за навантаженням. На рис. 3.15 і 3.16 наведені розподілення осьових, радіальних і колових напружень для різних розмірів зони пластичності (відносний радіус зони пластичності до R_2 . Позначений числами на графіках). Розбіжність величин цих напружень, а також деформацій пластичності, одержаних у цих двох випадках становила менше 1%. Таким чином, розроблені алгоритми дозволяють отримувати достовірні результати для масивних (товстостінних) об'єктів.

Як показали чисельні дослідження, незважаючи на зменшення обчислюваних витрат для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості, загальна ефективність алгоритму (2.114) виявилась значно гіршою порівняно з алгоритмом (2.112), що показано на графіках рис.3.17,а,б.



а)



б)

Рис.3.15

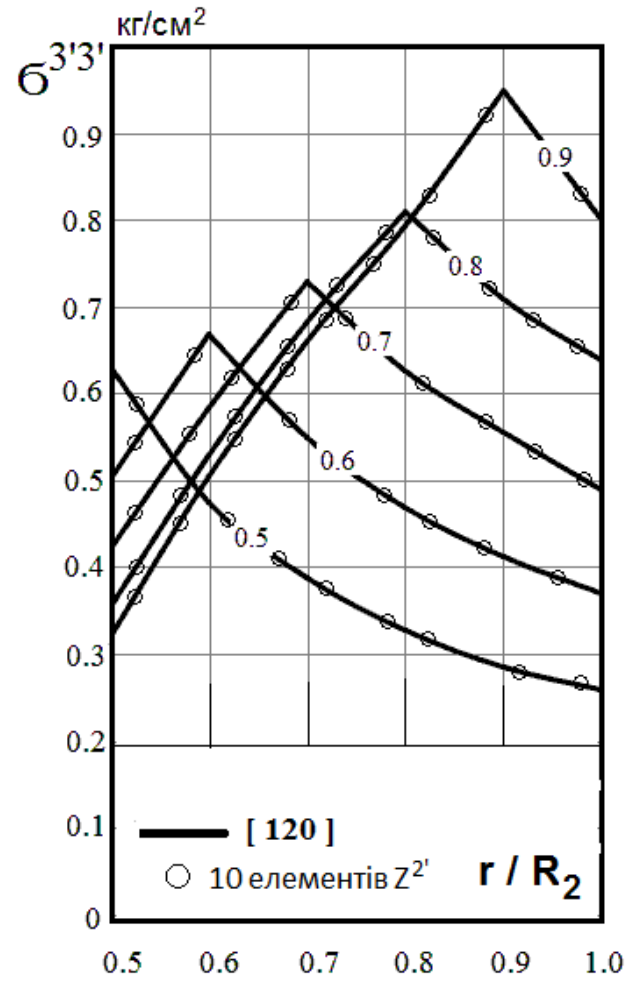


Рис.3.16

Суттєво покращити ефективність алгоритму (2.114) дозволяє виконання процедури екстраполяції переміщень за формулою:

$$\{\Delta u^m\} = \frac{\{\Delta u^{m-1}\} \Delta p^m}{\Delta p^{m-1}} \quad (3.4)$$

де Δp – прирощення зовнішнього навантаження на відповідних кроках розв'язання задачі.

Величини напружень уточнюються на кожній ітерації кроку в залежності від поточного рівня деформацій пластичності і повзучості. В кінці кожного кроку здійснюється обчислення величини повних напружень на кроці m .

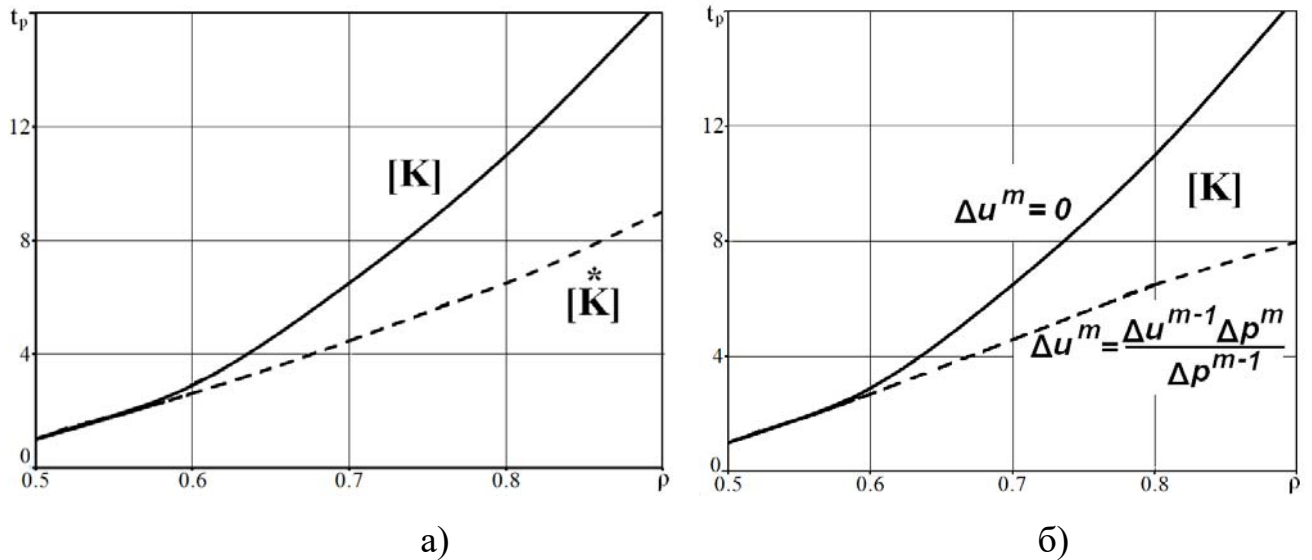


Рис. 3.17.

Ефективність розробленої модифікації алгоритму (2.114) з екстраполяцією переміщень по формулі (3.4) показано на (рис. 3.17,б) у вигляді графіків залежності, часу визначеного за кількістю ітерацій часу t_p , необхідних для розв'язання задачі при різних розмірах зони пластичного деформування, границя якої відповідає координаті $\rho = r_p / R$ (рис. 3.14,в), де R – зовнішній радіус циліндра. Як видно з наведених графіків, екстраполяція переміщень суттєво зменшує обчислювальні витрати (2.114) і його ефективність не поступається алгоритму (2.112).

3.4. Моделювання пружнопластичного деформування зварного ротору парової турбіни

Розвиток сучасного енергетичного машинобудування характеризується значним збільшенням потужностей окремих турбоагрегатів. Особливо зростають вимоги до достовірності одержуваних результатів при проектуванні роторів парових турбін підвищеної потужності, для яких коефіцієнти запасу міцності відносно невеликі.

Метою даного дослідження є визначення напружено-деформованого стану зварного ротору складної форми (рис. 3.18) і вивчення характеру його зміни в процесі навантаження в результаті розвитку пластичного деформування.

При розгляді таких відповідальних об'єктів велике значення має вибір розрахункової схеми. Розрахунок ротора як однієї деталі, що знаходиться в вісесиметричному пружно-пластичному стані, є досить складним.

Трикутні СЕ, з лінійним законом розподілу переміщень, прийняті за основу в багатьох роботах, дозволяють більш гнучко, ніж прямокутні елементи, апроксимувати контур будь-якої форми. Але використання СЕ такого типу призводить до збільшення загального числа невідомих в порівнянні з ММСЕ, що показано відповідними результатами, наведеними в попередньому параграфі. Додаткове підтвердження цьому отримано в результаті розв'язання задачі про обертання симетричного диску зі ступицею [44], де розподіл напружень по поверхні галтелі визначено на підставі використанні 19 трикутних СЕ вздовж границі, в той час як при застосуванні чотирикутних скінчених елементів, в основі співвідношень яких лежить ММСЕ та врахування змінності геометричних параметрів [70, 132] для отримання стійких результатів достатньо лише 5 СЕ. Таким чином, використання таких СЕ є більш ефективним.

Ротор парової турбіни (рис. 3.18), являє собою тіло обертання, що складається з трьох масивних дисків змінної товщини і хвостової частини, з'єднаних між собою товстостінними циліндричними і конічними перемичками. З'єднання дисків і перемичок виконані у вигляді галтелей постійного радіусу. За

формою всі диски відрізняються між собою, що не дозволяє на підставі розрахунку одного з них судити про можливу картину напружено-деформованого стану всієї конструкції. Окремо взяті диски не мають осей симетрії як внаслідок власної конфігурації (диски №№ 1 і 3), так і в результаті примикання перемичок на різних рівнях (диск № 2).

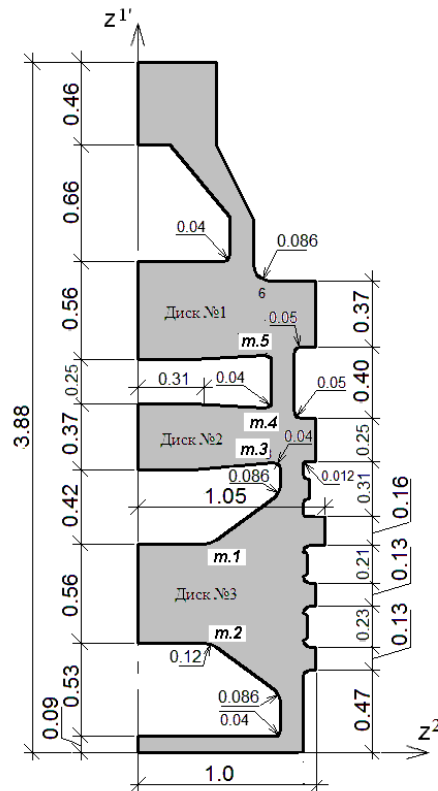


Рис.3.18

Несиметричність розподілу напружень в диску № 3 обумовлена, крім того, відмінністю інтенсивності поверхневого навантаження, прикладеного на його ободах. Всі розміри на рис.3.18 наведені у відносних величинах, які є кратними зовнішньому радіусу диска №3.

Зовнішні впливи, що складаються з масових сил і поверхневих навантажень на ободах дисків, відповідають 3000 об/мин. Модуль пружності матеріалу $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа текучості при чистому зсуві $\tau_s = 400$ МПа [178].

При розрахунку конструкцій методом скінченних елементів велике значення має правильний вибір апроксимуючої сітки, що дозволяє отримати і стійкі результати. Оскільки меридіональний переріз має вигляд багатозв'язаної області складного контуру при побудові скінченоелементної моделі використане подання області у вигляді сукупності фрагментів (рис.3.19,а), в межах кожного з яких скінчноелементна сітка є регулярною (рис.3.19,б).

При побудові СЕ сітки особливу увагу приділено галтельним зонам, тому що саме в цих місцях спостерігається різке збільшення градієнтів напружень. Для забезпечення короткого визначення напружень безпосередньо біля поверхні тіла, уздовж всього контура меридіонального перетину ротора, використаний шар скінченних елементів, товщина якого в прийнята рівною біля 1/10 радіуса галтелі. Уздовж галтелі прийнято 4-6 СЕ на кут 90° . Загальні принципи побудови розрахункової сітки ілюструються на прикладі диска № 3. Розв'язки отримані із використанням СЕ сіток із 1925 (рис.3.19(б)) і 3403 вузлів показали, що розбіжність результатів не перевищує 1-2%, що свідчить про їх високу збіжність і достовірність.

Проведене розв'язання задачі дозволяє виявити зони максимальних напружень, оцінити характер напруженого стану окремих конструктивних елементів та визначити найбільш небезпечні, з точки зору напруженого стану, ділянки конструкції. Отже максимальні значення напружень зафіксовані на поверхні диска № 3 в околі точки 1 (рис. 3.18) і є наступними: компонента, нормальна до контуру $\sigma^1=534$ МПа, колове напруження $\sigma^3=418$ МПа, інтенсивність дотичних напружень $\tau_i = 78$ МПа.

Внаслідок несиметричного прикладання навантаження величина напружень на поверхні диска № 3 в околі точки 2, є дещо меншою. Слід зазначити ще чотири зони підвищених напружень ($\tau_i > 210$ МПа) в області з'єднання дисків № 1 і № 2 з перемичками, розташування яких, також як і двох перших, показано на рис. 3.18 цифрами в порядку зменшення величини τ_i . У всіх розглянутих випадках найбільші значення напружень зафіксовані поблизу в точці переходу від

зовнішньої поверхні диска до поверхні галтелі, що повністю узгоджується з розрахунковими та експериментальними даними, наведеними в роботі [44].

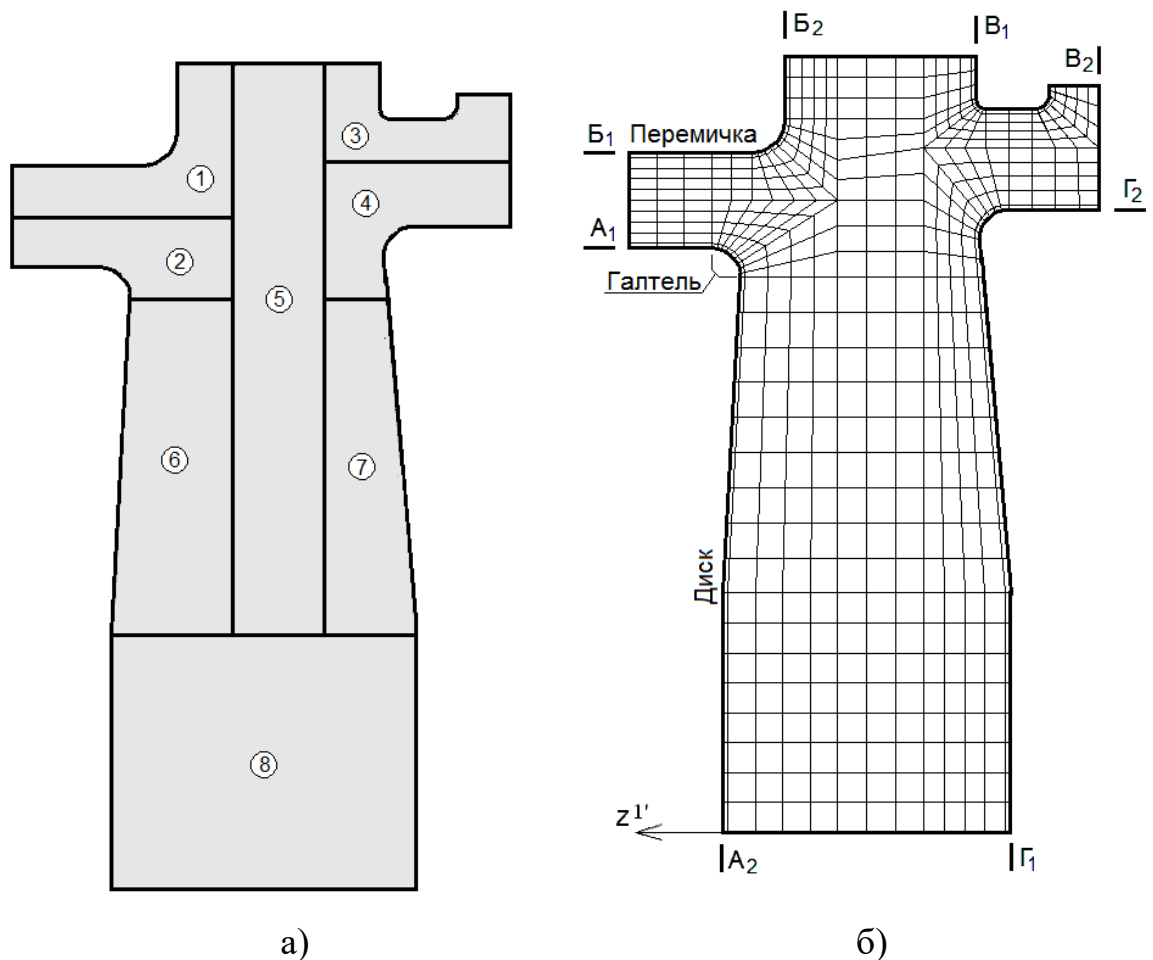


Рис.3.19

Напружений стан в середній частині перемичок характеризується відносно рівномірним розподілом по товщині кільцевих компонент напружень, причому більш завантаженими є точки, розташовані на внутрішній поверхні циліндрів. Осьові напруження змінюються в радіальному напрямку від від'ємних значень до додатніх, що свідчить про наявність моментного стану. Необхідно звернути увагу на незначну абсолютну величину напружень в центральних ділянках перемичок. Наприклад, окружні складові не перевищують 260 МПа, осьові – 100 МПа; інтенсивність дотичних напружень перебуває в межах 175 МПа. Зазначений факт має позитивне значення, тому що в цих місцях розташовані зони зварювальних

швів, в яких механічні характеристики матеріалу важко контролювані. Відносно невеликі напруження спостерігаються також в області хвостовика.

Розглянемо більш докладно результати визначення напруженого стану. Як приклад розглянемо дані для диска № 3. На рис.3.20–3.23 суцільними лініями зображені розподілення нормальних до контуру σ^1 і колових σ^3 напружень та інтенсивності дотичних напружень τ_i . Ділянки контуру, яким відповідають зазначені розподілення, позначені на рис.3.19,б. Позначення на горизонтальній осі графіків відповідають безрозмірним лінійним розмірам, які збігаються із наведеними на рис.3.18, або кутовій координаті вздовж галтелей.

Аналіз цих результатів дозволяє зробити висновок, що на частині диска від осі обертання до галтелі розподілення напруження відносно рівномірні. Перепад напружень в радіальному напрямку на частини контурів А1– А2 і Г1– Г2 від осі обертання до зони округлення становить близько 20 МПа за виключенням області зміни перерізу диску. У цьому місці спостерігається локальне падіння напружень σ^1 на 35–40 МПа, а σ^3 – на 70–75 МПа в порівнянні з їх значеннями біля осі обертання, яке становить 290–350 МПа. В областях галтелей відбувається різке зростання (в 1,5-1,6 рази) нормальних контурних і приблизно в 1,2 рази кільцевих напружень.

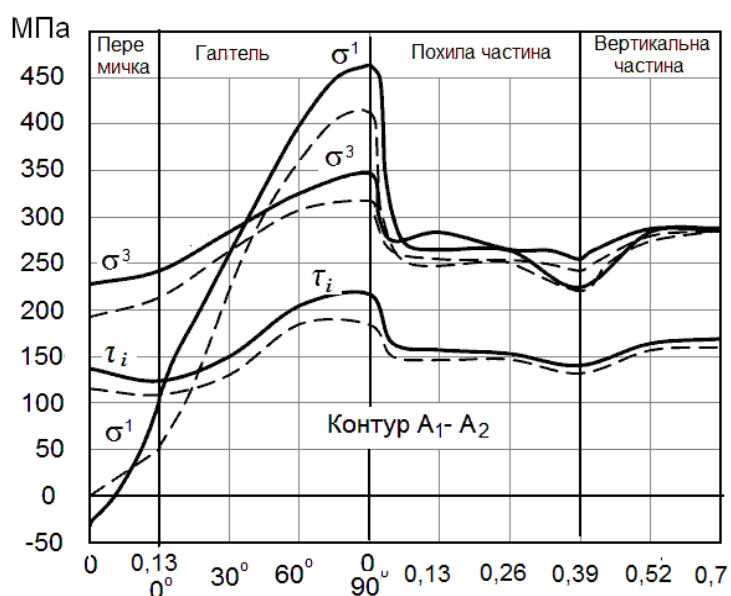


Рис.3.20

При віддаленні від вісі обертання σ^1 зменшуються на краю диску до величини інтенсивності поверхневих навантажень, а компоненти σ^3 складають 190-260 МПа. В осьовому напрямку залежність величин напружень від координати z^1 близька до лінійної на більшій частині площині перерізу диску, за винятком ділянок прилягання перемичок. У цих місцях епюри напружень, побудовані уздовж ліній, що проходять через зони заокруглень паралельно осі обертання ротора, мають більш складний вигляд.

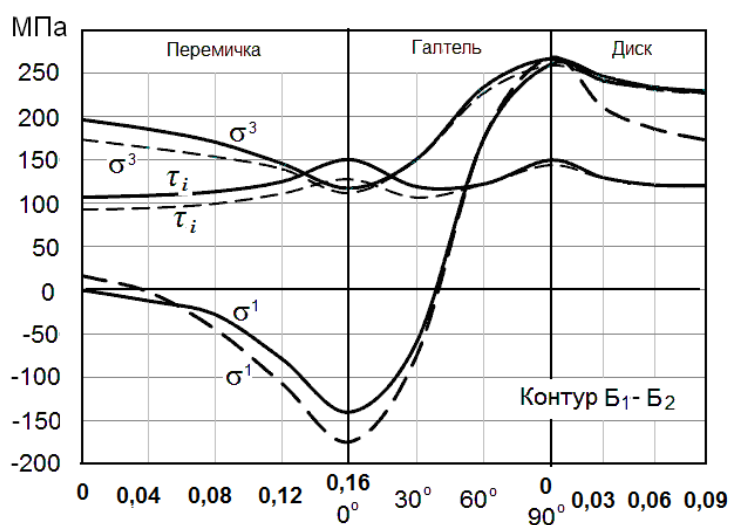


Рис.3.21

Якщо провести таку лінію орієнтовно через точки 3-4 (див. рис. 3.18.) то максимуми напружень будуть спостерігатися на протилежних кінцях прямої. За напрямком до центру диску відбувається досить різке (наприклад, для інтенсивності дотичних напружень порядку 100 МПа) зниження величини напруження. Подібний вигляд мають епюри напружень і в перерізах 1-2 і 5-6 для дисків № 1 і № 3. Таким чином концентрація напружень в районі заокруглення має поверхневий характер і досить швидко згасає.

Ці дані дозволяють намітити найбільш небезпечну ділянку в конструкції ротора. Мабуть, вона буде знаходитись на осі обертання диска №2, так як в цьому місці інтенсивність дотичних напружень по всій товщині диска становить 170–200

МПа. Для порівняння слід зазначити, що величина напружень в центрі перерізу 1-2 (диск №3), що проходить через точку виникнення максимальних напружень, складає всього 110 МПа і припускає можливість перерозподілу напружень при виникненні зон пластичності. У центральній частині диска № 2 таке перерозподіл важко очікувати, оскільки до моменту виникнення в цьому місці пластичних деформацій інтенсивність дотичних напружень по всій товщині буде близька до граничної. Як показано далі, це припущення повністю підтвердилося.

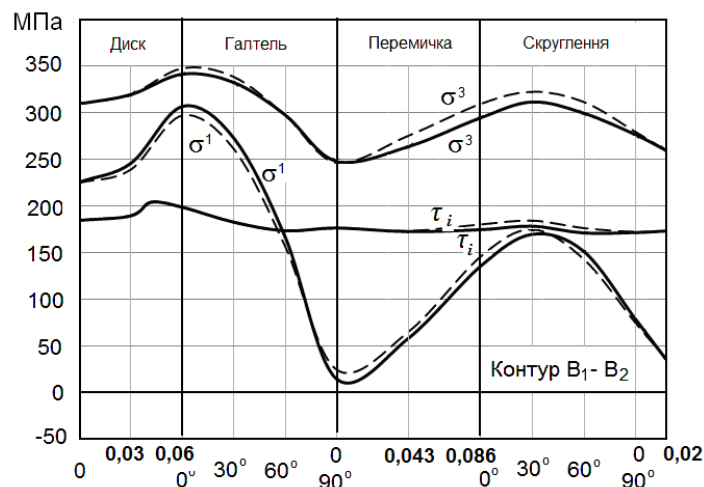


Рис.3.22

Збільшення числа оборотів ротора в умовах екстремальних режимів навантаження призводить до необхідності вивчати поведінку конструкції в пружно-пластичній стадії роботи матеріалу, механічні характеристики якого у розглянутій задачі досить точно апроксимуються моделлю пружно ідеально - пластичного тіла.

Для зменшення обчислювальних витрат при покроковому розв'язанні фізично нелінійної задачі розв'язок проведений для окремих фрагментів ротора, виділених із загальної конструкції. З конструктивної і статичної точок зору найбільш обґрунтованим є вибір в якості таких фрагментів дисків ротора, виділених площинами, які перпендикулярні до осі обертання і проходять через центри перемичок. Як було зазначено раніше, центри перемичок є найменш напруженими ділянками конструкції, тому розділення ротора на фрагменти в цих

місцях повинно призводити до мінімальних похибок. В якості граничних умов для перерізів з великим значенням координати приймемо вільний край, і для перерізів з меншим значенням вісь симетрії. При розрахунку використаний алгоритм розв'язання фізично-нелінійних задач, викладений, наприклад в [177].

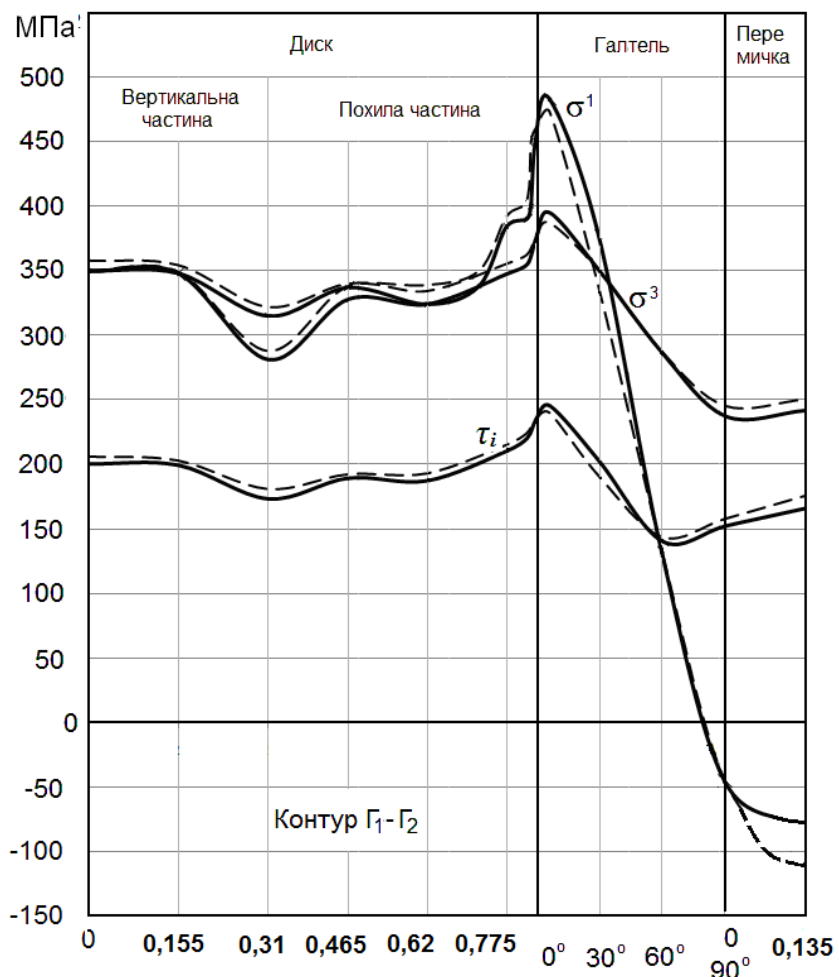


Рис.3.23

На рис.3.20–3.23 пунктирними лініями зображені епюри нормальних контурних напружень σ^1 , кільцевих σ^3 і інтенсивності дотичних напружень τ_i , отриманих на підставі розрахунку диску №2 як окремого фрагмента відповідно до запропонованої розрахункової схеми. Порівняння наведених епюр свідчить про близькість даних результатів до обчислених раніше на основі розрахунку ротора як єдиної конструкції. Максимальна похибка у зоні галтелей не перевищує в цьому випадку 12-15%, а в осі обертання – 3-4%. Однак, при розрахунку такої

відповідальної конструкції як ротор парової турбіни потужністю 1200000 кВт навіть така похибка є небажаною. З метою підвищення точності розрахунку вплив відкинутих частин ротора замінено опорними реакціями, визначеними з розрахунку конструкції в цілому. У цьому випадку пружні розв'язки збігаються, а похибка пластичного розрахунку такого ж порядку як заміна впливу лопаток поверхневими навантаженнями на ободах дисків.

На рис.3.24–3.25 представлені ізолінії інтенсивності дотичних напружень і розвиток зон пластичності в перерізі диску №2 в залежності від швидкості обертання ротора (рис.3.24,а відповідає 4000 об/хв, рис.3.24,б – 4250 об/хв, рис.3.25,а – 4350 об/хв, рис.3.25,б – 4400 об/хв). Вперше пластичні деформації зафіксовані при 3800 об/хв на поверхні галтелі в околі точки 3. На рис. 3.24–3.25 зони пластичності обмежені ізолініями, що відповідають інтенсивності дотичних напружень 400 МПа і позначені сірим кольором.

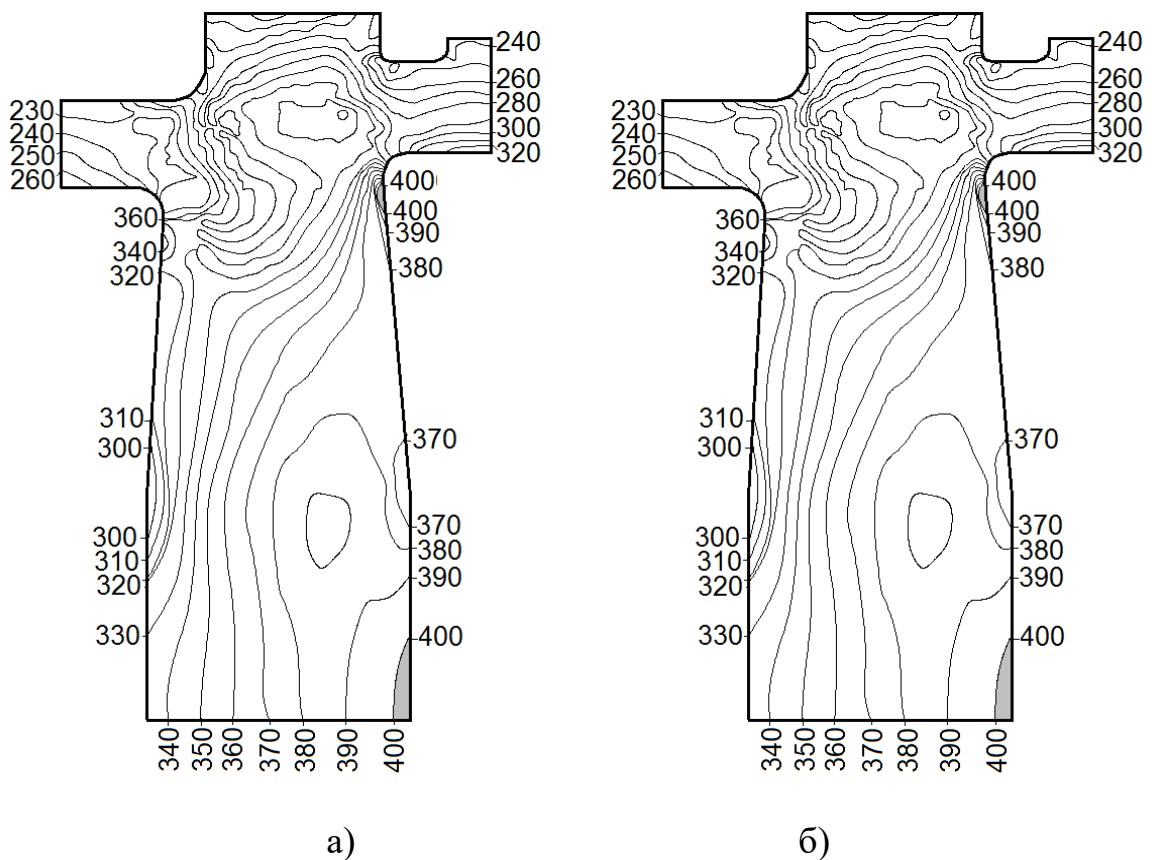


Рис.3.24

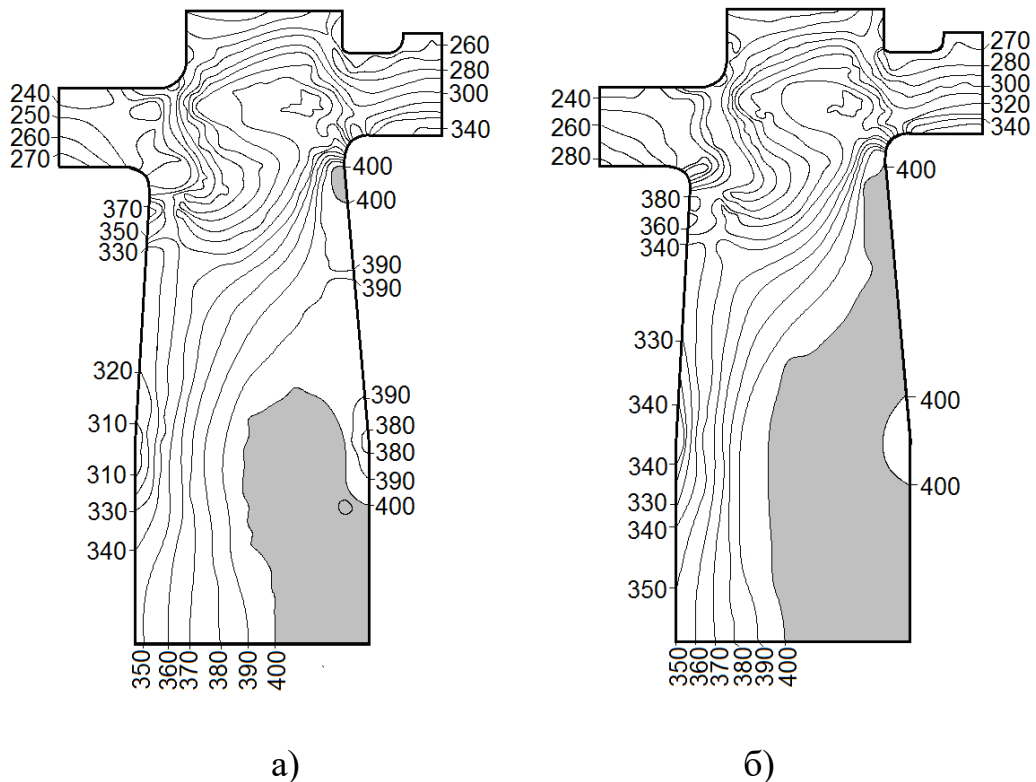


Рис.3.25

На рис.3.24,а представлені ізолінії інтенсивності дотичних напружень, що відповідають 4000 об/хв, коли пластичні деформації починають виникати також в околі точки 4. При 4250 об/хв спостерігається утворення зон пластичності біля осі обертання диска (рис.3.24,б). Слід зазначити істотну відмінність у характері розвитку зон пластичності. Так, якщо в околі галтелей вони поширюються на незначну відстань від поверхні ротора, то біля вісі обертання область пластичних деформацій має яскраво виражену тенденцію до розвитку в осьовому напрямку. Це стає особливо наочним при подальшому збільшенні швидкості обертання ротора. Вже при 4350 об/хв зона пластичності в осі обертання займає значну частину площі перерізу диска (рис.3.25,а), а при 4400 об/хв – об'єднується із зоною пластичності в околі точки 3 (рис.3.25,б). Отримана картина розвитку пластичних деформацій підтверджує початкове передбачення про те, що найбільш напруженою ділянкою ротора є перетин диска і вісі обертання.

На підставі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

Напружений стан ротора парової турбіни К-1200-240-2 відрізняється достатньою складністю і до його вивчення необхідно підходити з позицій просторової вісесиметричної задачі.

Приблизну оцінку розподілу напружень в подібних конструкціях (похибка максимальних напружень близько 15%) можна проводити на основі розрахунку окремих дисків. При інших співвідношеннях жорсткостей дисків і перемичок це питання потребує додаткових досліджень.

Незважаючи на те, що максимальні напруження спостерігаються в зонах скруглень, найбільш напруженими ділянками являються точки перерізу біля осі обертання ротора.

Отримані результати свідчать, що використання скінчених елементів, в основі співвідношень яких лежить моментна схема скінчених елементів та врахування змінності геометричних параметрів [70, 132] дозволяє проводити розрахунок ротора у постановці, яка враховує всі геометричні особливості конструкції без будь-яких спрощень.

3.5. Дослідження напружено-деформованого стану тонкостінних резервуарів

Для дослідження достовірності результатів, отримуваних на основі МССЕ із використанням універсального СЕ при розрахунку тонкостінних об'єктів, розглянуто тестові приклади. В якості першого прикладу розглянемо резервуар Тимошенка [217] (рис.3.26). Геометричні і механічні параметри резервуару є наступними: радіус $r=9.15$ м, висота $h=7.93$ м, товщина стінки $d=0.356$ м, об'ємна густина речовини, яка наповняє резервуар $\gamma=0,001$ кг/см³, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,25$.

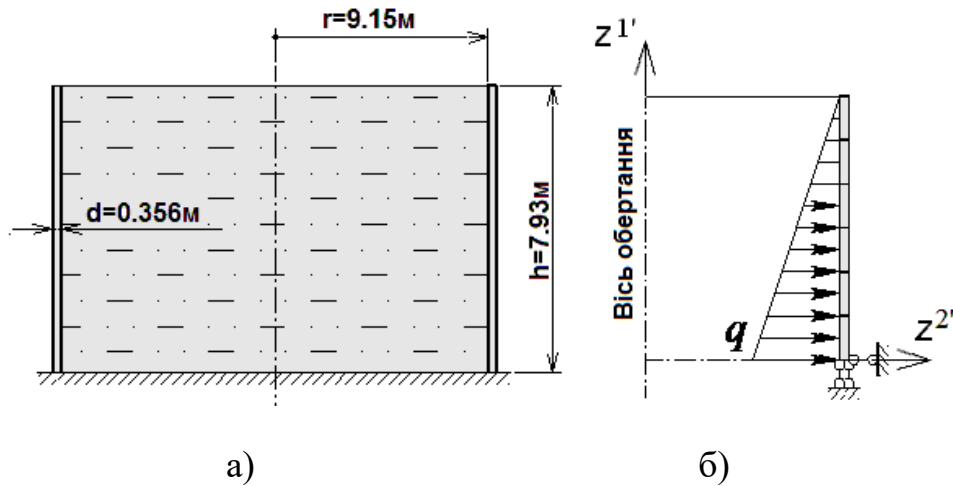


Рис. 3.26.

Аналітичні результати отримані за допомогою формул для визначення моменту і поперечної сили мають вигляд [217]:

$$(M_x)_{x=0} = M_0 = \left(1 - \frac{1}{\beta h}\right) \frac{\gamma r h d}{\sqrt{12(1-\gamma^2)}}, \quad Q_0 = \frac{\gamma r h d}{\sqrt{12(1-\gamma^2)}} \left(2\beta - \frac{1}{h}\right),$$

де $M_0=6338$ кгм/м, $Q_0=-10074$ кг/м.

При розв'язанні даного прикладу отримані результати за допомогою МССЕ (3.26,б) і програмного комплексу ЛИРА повністю співпали (табл.3.3.). Також було досліджено вплив зміни кількості СЕ по висоті резервуару. Розглянуто скінченно елементні моделі резервуару з 53 та 22 елементами, отримані результати співпадають (рис. 3.27-3.28).

Таблиця 3.3.

Методи розв'язання	Кількість СЕ	σ , Па
Аналітичний	-	450
МССЕ	1	450
ПК ЛИРА	10	448,6

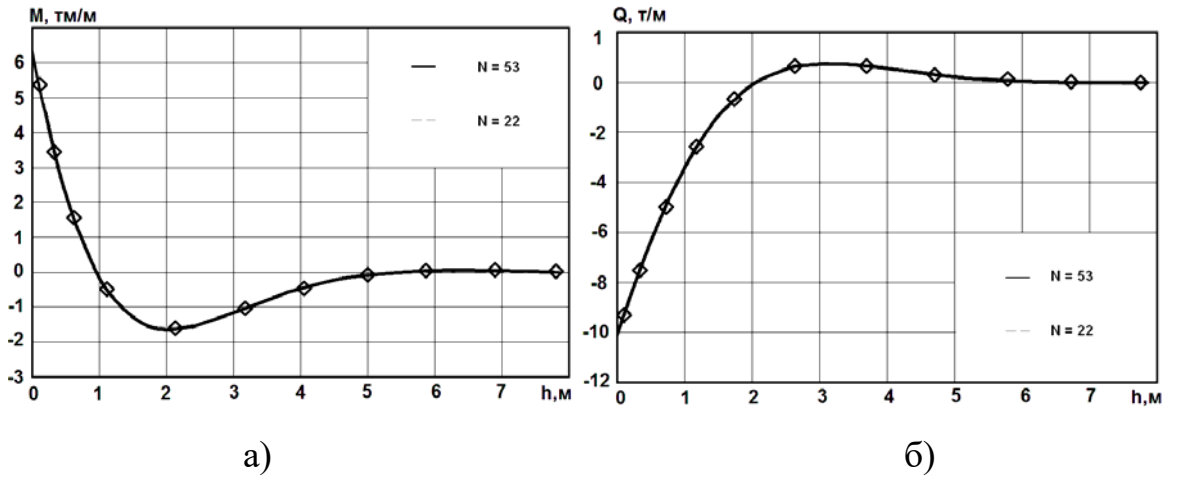


Рис. 3.27.

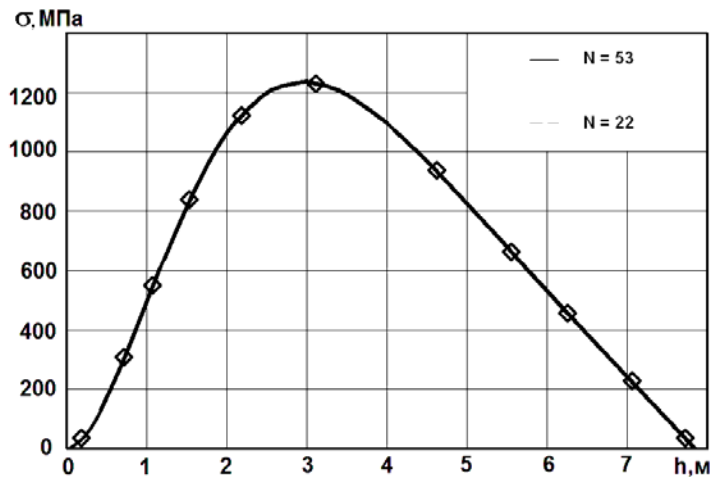


Рис. 3.28.

На другому етапі для дослідження ефективності МССЕ розглянуто тестовий приклад про кільце, товщина стінки і радіус якого прийняті по аналогії до досліджуваного резервуару для зберігання нафтопродуктів: $r=4.5$ м, $h=1$ м, $t=0.01$ м, модуль пружності $E=10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

Оскільки для МССЕ реалізовані кільцеві СЕ, то при розрахунку вісесиметричних оболонок, достатньо використовувати один кільцевий СЕ по окружній координаті (рис.3.29,а). Як показали дослідження для розв'язку цієї задачі на основі ПК Лира необхідно використовувати щонайменше 10 СЕ на секторі в 90^0 (рис.3.29,б). Спостерігається повне співпадіння результатів МССЕ з

одним СЕ з аналітичним розв'язком [3], мембранні напруження дорівнюють 450 Па, а ПК Лири при 10 СЕ отримуємо результат в 448,6 Па.

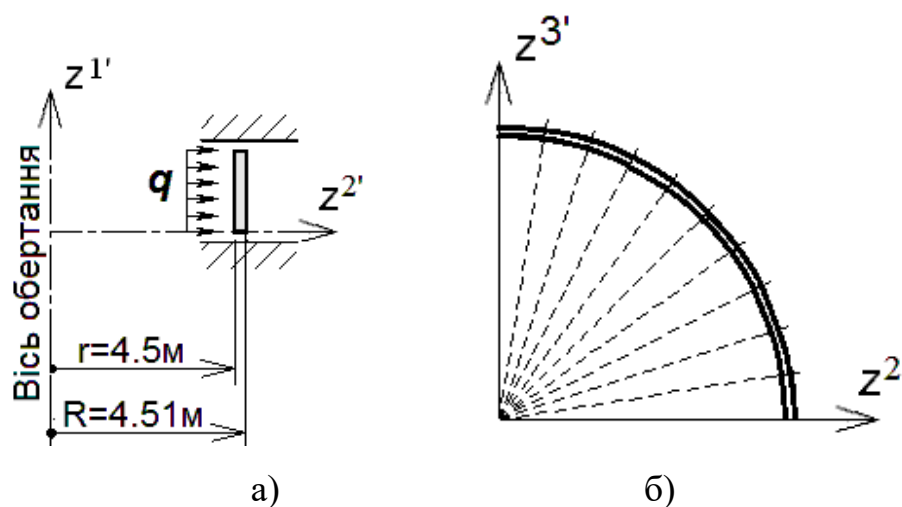


Рис. 3.29.

На третьому етапі досліджено напружено-деформований стан реального об'єкту. Резервуар номінальним об'ємом 1000 м³ призначений для прийому і зберігання нафтопродуктів (рис. 3.30). Геометричні параметри: висота стінки- $H = 17,88\text{ м}$, ; внутрішній діаметр-9.0 м; геометричний об'єм-1137 м³.

За умовну відмітку 0,000 прийнята відмітка верха крайки днища резервуару. Будівельні металоконструкції резервуару запроектовані в традиційній формі вертикального циліндру, що складається з днища, стінки і криши. Стінка резервуару в рівні днища кріпиться до фундаменту за допомогою фундаментних болтів. Кришка резервуару збірна конічна, складається з 12 щитів.

Навантаження збирається за формулою $q_{\max} = \rho_b \cdot g \cdot H$, де об'ємна густина речовини $\rho_b = 920\text{ кг} / \text{м}^3$, прискорення вільного падіння $g = 9.8\text{ м} / \text{с}^2$, $q_{\max} = 920 \cdot 9.8 \cdot 17.88 = 161206.08\text{ кг} / \text{м} \text{ с}^2$ (рис.3.31,а).

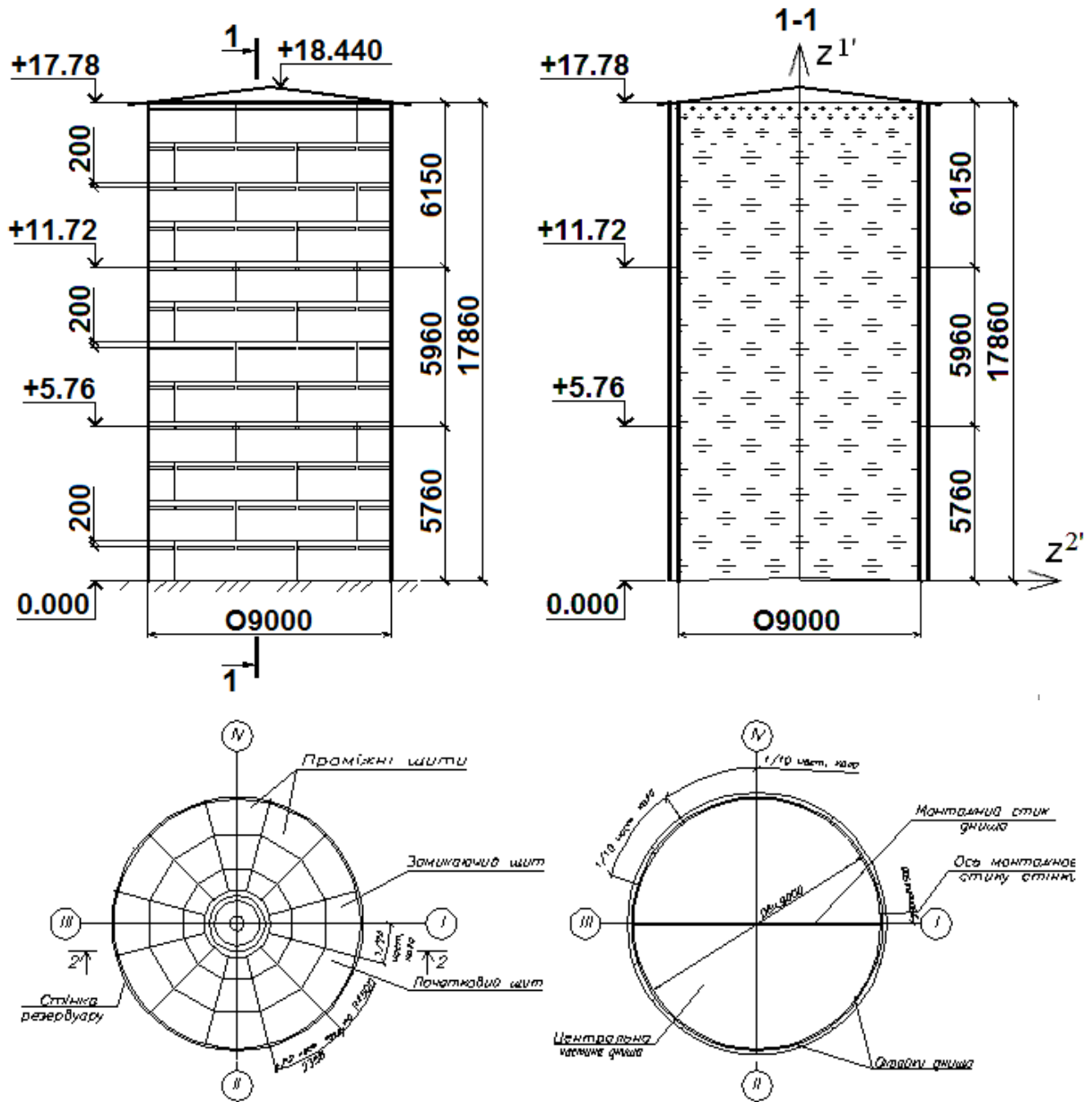


Рис. 3.30.

На рис.3.31,б показана змінення кільцевих напружень по висоті резервуару, які є максимальними в околі днища і поступово зменшуються до нуля до верху резервуару. Також можна спостерігати майже повне співпадіння результатів МССЕ і ПК ЛИРА.

По аналогії зі задачею про резервуар Тимошенка були порівняні моменти (рис.3.32) та перерізаючі сили (рис.3.33), отримані за допомогою МССЕ (рис.3.31,а) і ПК ЛИРА. Розглядався фрагмент резервуара висотою 2м, оскільки в вищих точках моменти і перерізаючі сили прямують до 0.

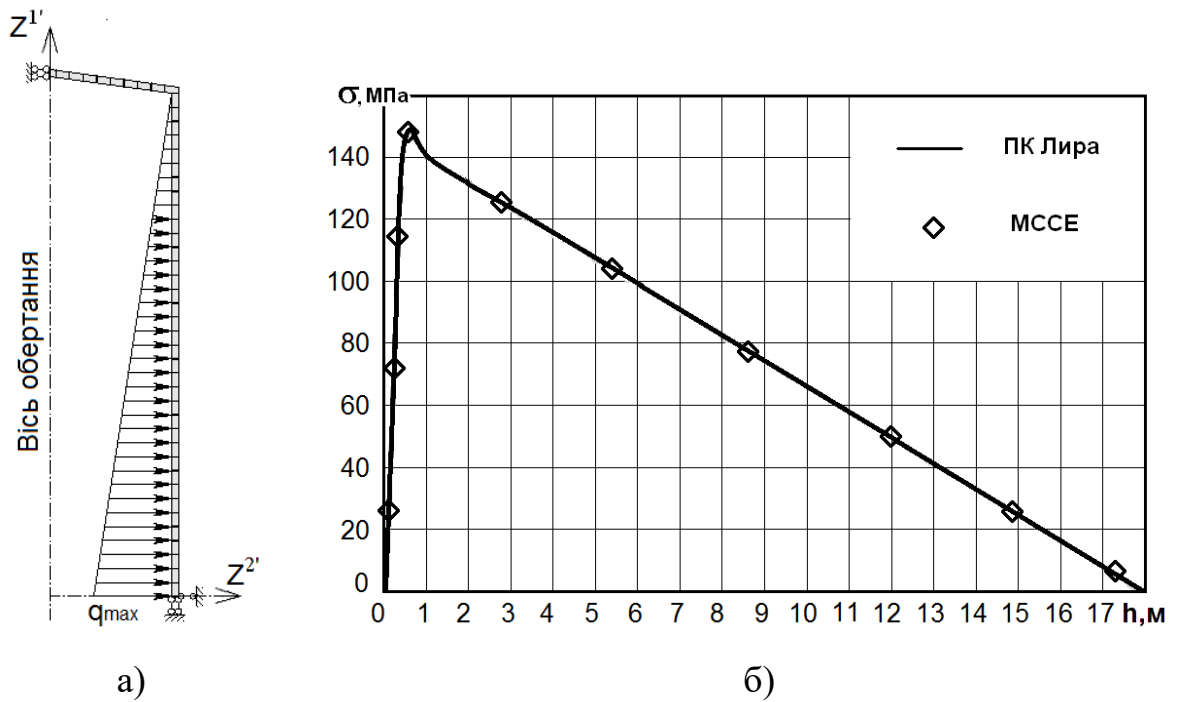


Рис. 3.31.

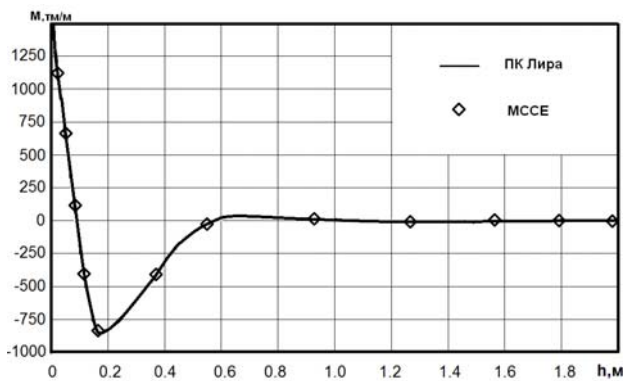


Рис. 3.32.

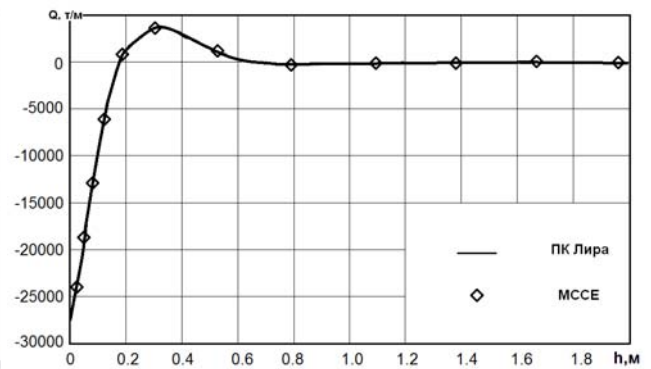


Рис. 3.33.

Представлені результати дослідження збіжності чисельних розрахунків тонкостінних і масивних тіл обертання, дають підставу стверджувати, що ефективність розробленого варіанта універсального скінченного елемента не поступається ефективності об'єктно орієнтованим СЕ. Однак, його застосування суттєво спрощує процедуру формування загальної дискретної моделі, знімаючи питання вибору типу елемента в залежності від геометричних параметрів окремих конструктивних деталей.

Порівняння двох найпоширеніших алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь, при розвитку деформацій пластичності дозволяє зробити висновок, що при використанні процедури екстраполяції переміщень їх ефективність практично однакова.

Слід відзначити, що відповідно до загально прийнятої технології проведення скінчено елементних розрахунків НДС складних конструкцій наявність декількох альтернативних варіантів СЕ і алгоритмів дозволяє вже на рівні модельних задач визначити оптимальну стратегію досліджень.

Наведені результати розрахунків достатньо складних і відповідальних реальних об'єктів сучасної техніки наглядно ілюструють широкі можливості розробленої методики і реалізуючого її програмного забезпечення. Значною мірою забезпечується використанням багатофрагментного підходу при побудові дискретних моделей МСЕ для тіл з концентраторами напружень або об'єктів складної структури шляхом поєднання регулярних сіткових підсистем в єдину оптимальну з точки зору кількості невідомих загальну сіткову структуру.

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Експлуатація значної кількості відповідальних конструкцій, таких як ротори парових турбін і газотурбінних установок здійснюється в умовах складних теплових режимів, які мають визначальний вплив при оцінці їх напружено-деформованого стану, що особливо проявляється на етапах пуску або зупинки. В цих випадках визначення неоднорідних температурних полів потребує розв'язання нестационарної вісесиметричної задачі теплопровідності. В даному розділі наведені основні вихідні і розрахункові співвідношення МСЕ вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності в криволінійній системи координат. а також алгоритми їх розв'язання. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

4.1. Вихідні співвідношення нестационарної теплопровідності неоднорідних тіл

Температурне поле неоднорідного ізотропного тіла обертання (рис.4.1), площею меридіонального перетину S , обмеженого контуром L описується диференціальним рівнянням нестационарної теплопровідності [106]:

$$\operatorname{div}(\lambda_{(x^1x^2)} \nabla T) = C_{(x^1x^2)} \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (4.1)$$

де $\lambda_{(x^1x^2)}$ - коефіцієнт теплопровідності; T - температура в точці тіла, що розглядається; $C_{(x^1x^2)}$ - питома об'ємна теплоємність матеріалу.

В криволінійній системі координат x^α [8] покомпонентна форма диференційного рівняння (4.1) приймає вигляд [28]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda_{(x^1 x^2)} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^\beta} \right) = C_{(x^1 x^2)} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Однозначність розв'язання рівняння (4.2) забезпечується введенням відповідних початкових та граничних умов. В якості початкових умов приймається відоме розподілення температури в тілі в деякий фіксований момент часу t_0 , що приймається за початок часової координати.

$$T(x^\alpha, t_0) = T_0(x^\alpha), \quad x^\alpha \in L, \quad (4.3)$$

де $T_0(x^\alpha)$ - задана функція координат.

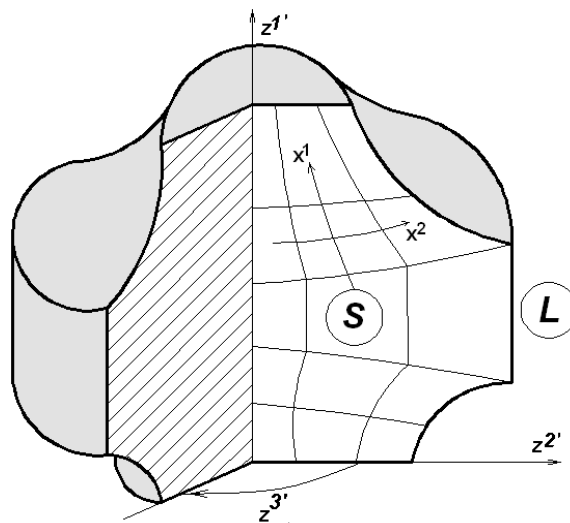


Рис.4.1.

Граничні умови в теорії теплопровідності формуються в вигляді двох ідеалізованих типів теплопередачі на границі тіла:

- 1) відомі зміни з часом температури точок поверхні тіла

$$T(x^\alpha, t) = f(x^\alpha, t), \quad x^\alpha \in L_1, \quad (4.4)$$

де $f(x^\alpha, t)$ - задана функція; L_1 - частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови першого роду.

2) відома температура зовнішнього середовища θ і закон конвекційного теплообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем

$$-\lambda_{(x^1x^2)} \frac{\partial T(x^\alpha, t)}{\partial n} = \alpha_{(x^1x^2)} [T(x^\alpha, t) - \theta(x^\alpha, t)], \quad x^\alpha \in L_2, \quad (4.5)$$

де α - коефіцієнт тепловіддачі; L_2 - частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови вигляду (4.5).

Рівняння (4.2) з початковими (4.3) і граничними (4.4)-(4.5) умовами однозначно визначає нестационарне температурне поле в тілі, властивості якого в загальному випадку залежать від просторових координат і температури.

Диференціальне рівняння (4.2) з граничними умовами (4.4)-(4.5) еквівалентне варіаційному рівнянню вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності [85]:

$$\begin{aligned} \delta\chi = & \int_S (\lambda_{(x^1x^2)} \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g_{(x^1x^2)}^{\alpha\beta}) \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dL + \\ & + \int_L \alpha(T - \theta)_{(x^1x^2)} \delta T dL - \int_S C_{(x^1x^2)} \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dL \end{aligned} \quad (4.6)$$

Як і в попередніх розділах, всі індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

4.2. Вісесиметричний скінченний елемент загального типу для розв'язання задач теплопровідності.

Для вісесиметричних та плоско-деформованих тіл для розв'язання задач теплопровідності на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутники довільної форми (рис. 4.2,а).

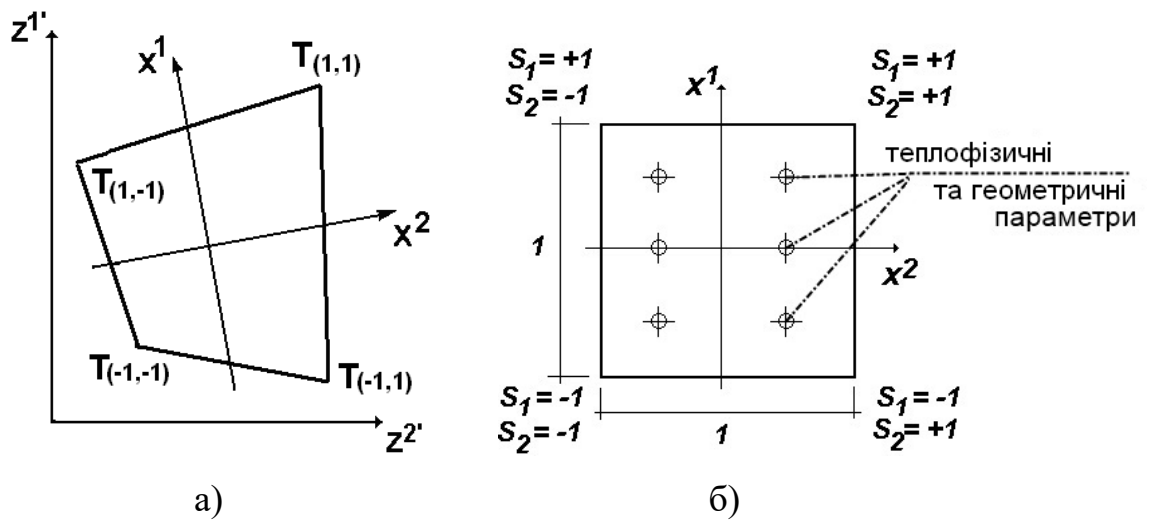


Рис. 4.2.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною (рис. 4.2,б).

Розглянемо скінченні елементи загального вигляду, на характер розподілення теплофізичних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ жодних обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 4.2).

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (4.7)$$

де $T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення температури.

Для СЕ, які примикають до границь області, розподілення температури вздовж координатної лінії визначаються формулою:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \quad (4.8)$$

Вирази для похідних від температури і часу мають вигляд:

$$\begin{aligned} T_{,\alpha} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

При скінченоеlementній апроксимації досліджуваного об'єкта для системи з N СЕ зазначене рівняння (4.2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \delta\chi &= \sum_{n=1}^N \delta\chi_n = \sum_{n=1}^N \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_{(x^1 x^2)} \left(\frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}_{(x^1 x^2)} \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} dx^1 dx^2 + \\ &+ \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \alpha_{(x^1 x^2)} T \delta T \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} dx^1 dx^2 - \int_L \alpha_{(x^1 x^2)} \theta \delta T \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} dL - \\ &- \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} C_{(x^1 x^2)} \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} dx^1 dx^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Після підстановки в (4.3) значень температури (4.4) та її похідних (4.5) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\delta\chi_n = & \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_{(x^1x^2)} \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left(T_{(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \right) \times \right. \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta \right) g_{(x^1x^2)}^{\alpha\beta} \left. \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 + \\
& + \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \alpha_{(x^1x^2)} \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right] \times \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right) \left. \right] \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dx^1 dx^2 - \\
& - \int_L \alpha_{(x^1x^2)} \theta \delta T \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dL - \\
& - \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} C_{(x^1x^2)} \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \times \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \left. \right] \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dx^1 dx^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Визначення інтегралів по x^1 та x^2 в загальному випадку може бути обчислене тільки на основі процедур чисельного інтегрування.

Тоді вираз (4.11) може бути поданий у вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta\chi_n = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\lambda_{(x^1x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left(T_{(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \right) \times \right. \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta \right) g_{(x^1x^2)}^{\alpha\beta} \sqrt{g_{(x^1x^2)}} H_i H_j \left. \right]_{x_i^1, x_j^2} + \\
& + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\alpha_{(x^1x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Big|_{x_i^1, x_j^2} - \\
& - \int_L \alpha_{(x^1 x^2)} \theta \delta T \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} dL - \\
& - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[C_{(x^1 x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \right. \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Big|_{x_i^1, x_j^2} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
R_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\lambda_{(x^1 x^2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta g_{(x^1 x^2)}^{\alpha\beta} \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Big|_{x_i^1, x_j^2} \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

- коефіцієнти матриці теплопровідності;

$$\begin{aligned}
B_{(S_\alpha, P_\alpha)} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\alpha_{(x^1 x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times \right. \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Big|_{x_i^1, x_j^2} \right] \quad (4.14)
\end{aligned}$$

- добавка до коефіцієнтів матриці теплопровідності на границі області, що співпадають з координатною лінією x^α , ($\alpha = 1, 2$);

$$C_{(S\alpha, P\alpha)} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[C_{(x^1 x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \right]_{x_i^1, x_j^2} \quad (4.15)$$

- коефіцієнти матриці теплоємності.

Інтеграл $\{Q_0\}$, що містить θ , визначається чисельно тільки на контурі тіла і при формуванні системи рівнянь переноситься в праву частину.

Внаслідок довільності варіації $\delta T_{(P_1 P_2)}$ рівняння (4.11) еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N \left([R] + [B] - [C] \{T\}_{,t} \right) = \sum_{l=1}^L \{Q_0\} \quad (4.16)$$

де коефіцієнти матриць $[R]$, $[B]$, $[C]$ визначаються за формулами (4.13-4.15).

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (4.16) використовується метод скінченних різниць. Вздовж часової координати t вибирається скінченна множина N точок t_n ($n = 0, 1, \dots, N$) з кроком Δt_n таким чином, щоб $t_n \big|_{n=0} = t_n$; $t_n \big|_{n=N} = t_k$.

$$[C] \{T\}_{n+1} + ([R] + [B]) \{T\}_{n+1} = [C] \{T\}_n - ([R] + [B]) \{T\}_n + \{Q_0\}_n. \quad (4.17)$$

Замінюючи похідну за часом в (4.16) скінченно-різницеvim алгоритмом другого порядку точності за схемою Кранка-Ніколсона [235] і приймаючи в якості невідомих значення температури в вузлах сіткової області в момент часу t_{n+1} , маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $T_{(S_1, S_2)}^{n+1}$ в матричному вигляді (4.17).

4.3. Модифікований СЕ для розв'язання задач нестационарної теплопровідності

Для модифікованого СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ , питома об'ємна теплоємність C та значення компонент метричного тензору g^{ij} несуттєво змінюються в площини СЕ і приймаються рівними їх відповідним значенням в центрі СЕ:

$$\lambda = \overset{\circ}{\lambda} = \lambda|_{x^\alpha=0}, \quad C = \overset{\circ}{C} = C|_{x^\alpha=0}, \quad g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij}|_{x^\alpha=0} \quad (4.18)$$

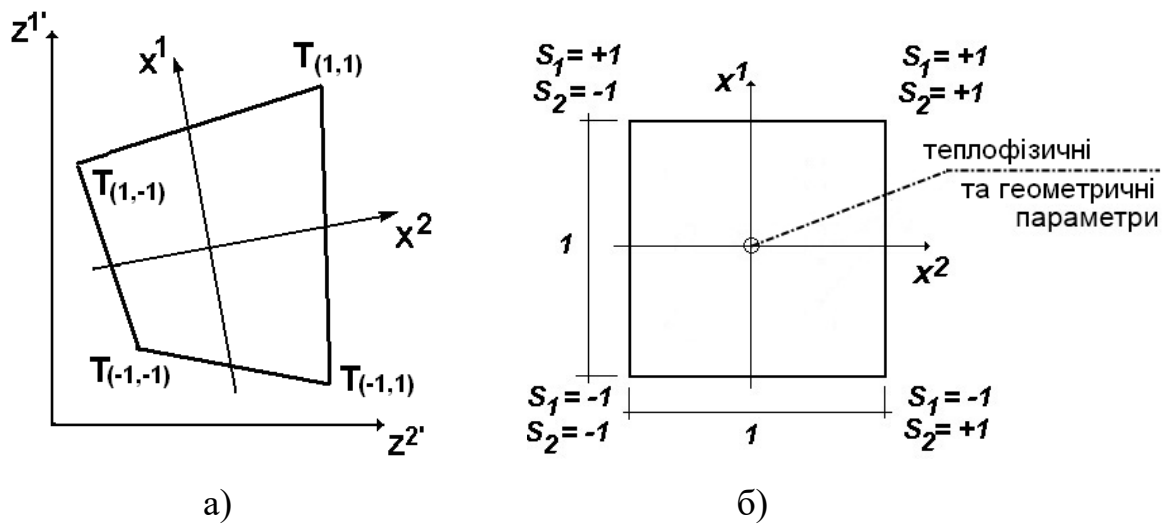


Рис. 4.3.

В цьому випадку вираз (4.11) спрощується та набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \delta\chi_n = & \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left(T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta \right) g^{\alpha\beta} \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \alpha \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right] \times \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right) \left] \sqrt{g} dx^1 dx^2 - \right. \\
& \quad \left. - \int_L \alpha \theta \delta T \sqrt{g} dL - \right. \\
& - \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} C \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \times \\
& \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \left] \sqrt{g} dx^1 dx^2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Обчислимо інтеграли

$$\begin{aligned}
& \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \\
& \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
\delta \chi_n = & \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} R_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} - \\
& - \int_L \alpha \theta \delta T \sqrt{g} dL + \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} -
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1, S_2)}}{\partial t} \delta T_{(P_1, P_2)} C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}, \quad (4.21)$$

де

$$R_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \lambda \left(\frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\circ\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\circ\alpha\alpha} \right) \sqrt{g} \quad (4.22)$$

- коефіцієнти матриці теплопровідності;

$$B_{(S_\alpha, P_\alpha)} = \alpha \sqrt{g} \left(\frac{(S_\alpha P_\alpha + 3)}{12} \right) \sqrt{g^{(3-\alpha)(3-\alpha)}} \quad (4.23)$$

- добавка до коефіцієнтів матриці теплопровідності на границі області, що співпадають з координатною лінією x^α , ($\alpha = 1, 2$);

$$C_{(S_\alpha, P_\alpha)} = \frac{C \sqrt{g}}{2} (S_1 P_1 + 3)(S_2 P_2 + 3) \quad (4.24)$$

- коефіцієнти матриці теплоємності.

Реалізація отриманих співвідношень не потребує чисельного інтегрування теплофізичних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ, що зменшує обсяг обчислювальних витрат.

4.4. Чисельні результати розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності.

Для дослідження достовірності розроблених співвідношень для розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності було розглянуто декілька тестових задач.

На першому етапі на основі розв'язання контрольних прикладів, розглянутих в роботі [26], було показано, що збіжність результатів, отримуваних із використанням обох типів СЕ практично однакова.

Для перевірки достовірності результатів застосування викладеного алгоритму до дослідження невстановлених температурних полів в конструкціях, що знаходяться в умовах конвекційного теплообміну з зовнішнім середовищем, температура якого змінюється з залежності від часу, розв'язано тестові задачі про температурний стан довгого циліндра необмеженої сталеві пластини .

Фрагмент довгого циліндра із початковою температурою (при $t_0 = 0$) 323°C (рис.4.4, а) знаходиться в стані конвекційного теплообміну між його поверхнею і навколишнім середовищем, температура якого θ_2 змінюється в залежності від часу t за законом $\theta_2 = \theta_0(1 + k_1 \cdot e^{k\tau})$, де $\tau = \frac{\alpha t}{r^2}$ - безрозмірний час, r - радіус циліндру, $\theta_0 = 823^\circ\text{C}$, коефіцієнт теплопровідності $\alpha = 0.557 \cdot 10^{-5}$ м²/сек, $k_1 = -0.5473$, $k = 53.6$, критерій теплової подібності $B_i = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = 15$.

Досліджувалась узгодженість розв'язку, який отриманий за розробленою методикою, з аналітичним розв'язком [106], а також з чисельним розв'язком, отриманим на основі використання просторово-часових СЕ [75] в залежності від кількості СЕ по радіусу. Аналіз результатів показав, що при достатньо малій (5 СЕ) кількості елементів, взятих по товщині циліндра, максимальна похибка не перевищує 3%, а десять елементів забезпечує точність з максимальною похибкою до 1%.

На рис. 4.4,б в вигляді ізоліній показано розподілення температури в циліндрі для моментів часу $t=180$ с, 300с, 420с, 540с. Суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [106], штрихпунктирна – розв'язку за МСЕ [75], а кружечками – за розробленою методикою. Співставлення кривих аналітичного і наближених розв'язків дозволяє констатувати, що запропонована методика досить добре узгоджується з аналітичним і чисельним розв'язком інших авторів.

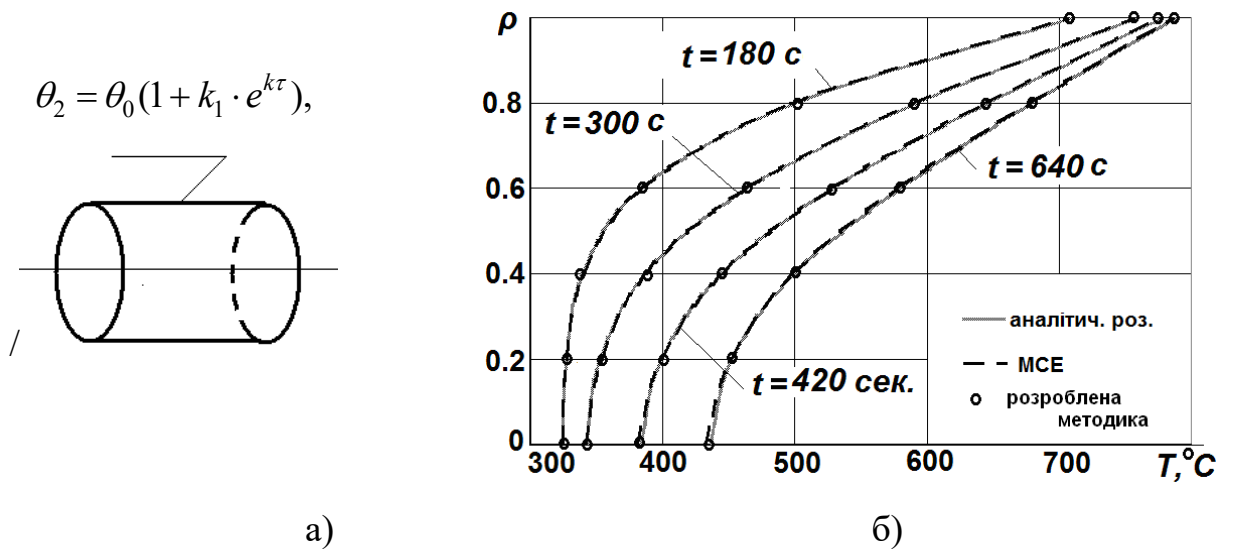


Рис. 4.4.

Необмеженої сталевая пластина розглянута при конвекційному теплообміні між її поверхнею $z' = +h/2$ і навколишнім середовищем. Поверхня $z' = -h/2$ передбачається ідеально теплоізолюваною. Початкова температура пластини $T_0 = 293^\circ K$, температура теплоносія $\theta = 1273^\circ K$, коефіцієнт теплопровідності $\alpha = 0.66 \cdot 10^{-5}$ м²/сек. Критерій теплової подібності, що відповідає товщині пластини $h = 0.008$ м, $B_i = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} = 0.2$ (рис.4.5,а).

На рис. 4.5 показано розподілення температури по товщині пластини для моментів часу $t=5$ с, 10с, 15с, 20с, 30с, 60с. Позначення кривих ідентичні використаним на рис.4.6.

Аналіз результатів свідчить, що і в даному прикладі спостерігається добра узгодженість наближеного і аналітичного розв'язків.

Таким чином, достовірність результатів для найпростіших випадків розподілення температур і теплофізичних характеристик матеріалу забезпечується.

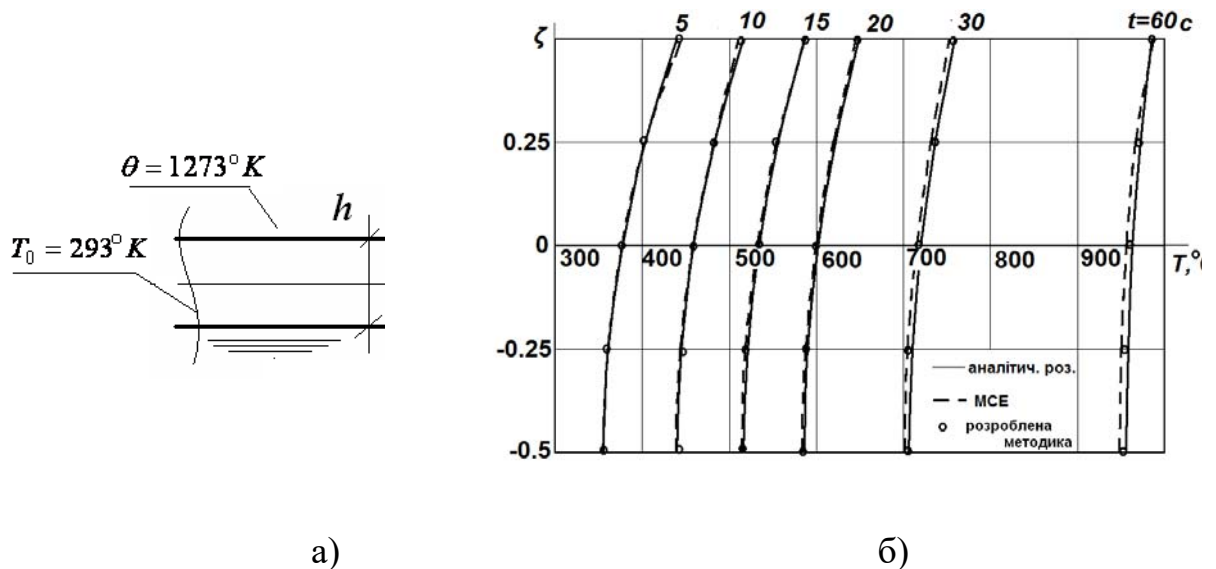


Рис. 4.5.

На другому етапі для ілюстрації застосування розроблених підходів виконано розрахунок зміни температурних полів ротора парової турбіни в режимі запуску. Ротор представляє собою вісесиметричне тіло, утворене набором масивних дисків, валів і перемичок різної форми перерізу (рис.4.6.). Дискретна модель поперечного перерізу ротора показана на рис.4.7. Ротор знаходиться в умовах нерівномірного нагріву. Через його зовнішню поверхню проходить теплообмін зі зовнішнім середовищем, який описується законом Ньютона. Температура середовища $\theta=500^\circ C$. В початковий момент часу $t_0=0$ температура ротора становить $20^\circ C$. При розрахунку прийняті такі механічні і теплофізичні характеристики: модуль пружності $E=206010$ МПа, коефіцієнт Пуасона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\beta_T = 12.2 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, коефіцієнт тепловіддачі

$\alpha_T=250$ Вт/(м²·град), коефіцієнт теплопровідності $\lambda_T=30$ Вт/(м·°С), питома теплоємність $C=0.15$ Дж/кг·°С.

На рис. 4.7 наведені результати розв'язання задачі теплопровідності – розподілення температур у моменти часу $t=300$ с, 4200 с, 6900 с.

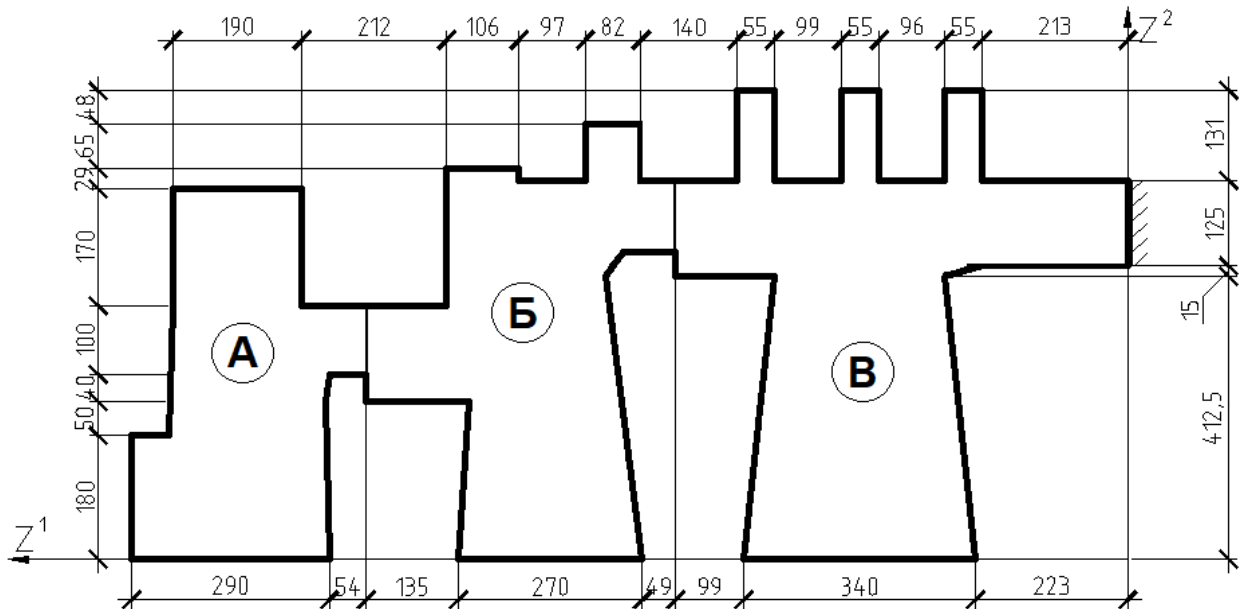
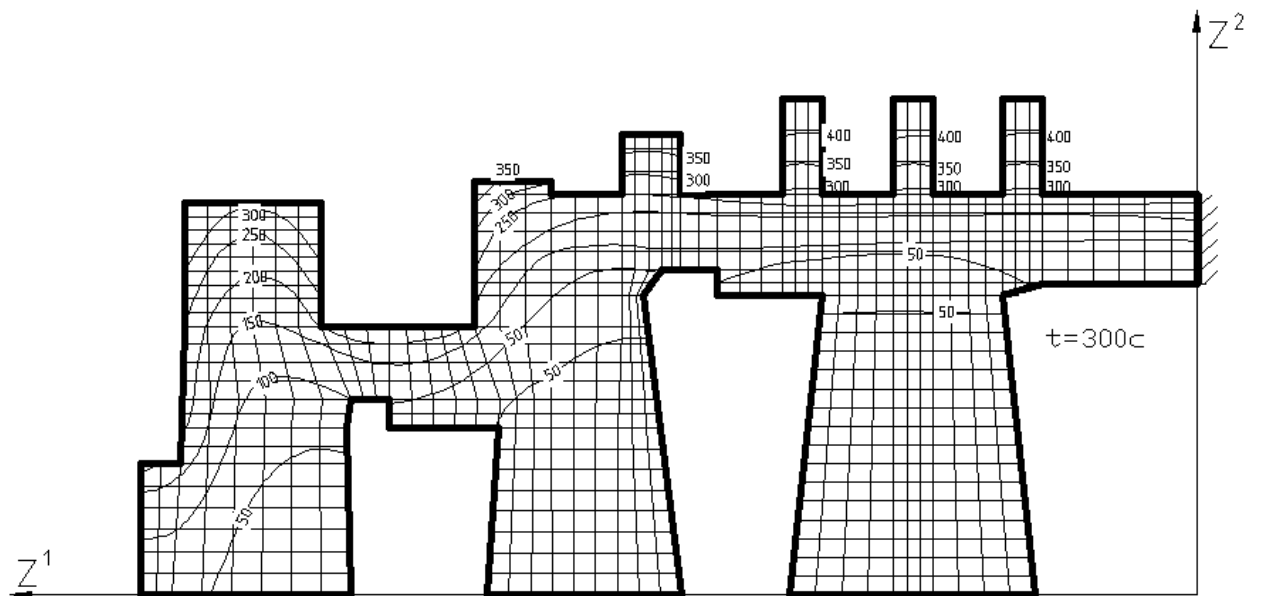
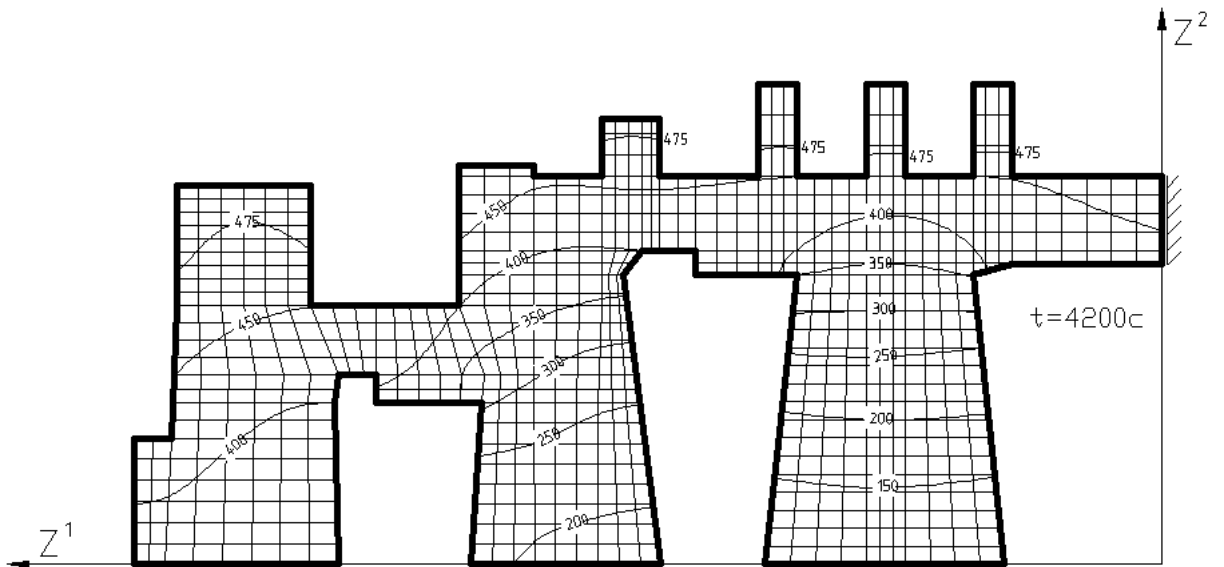


Рис.4.6.

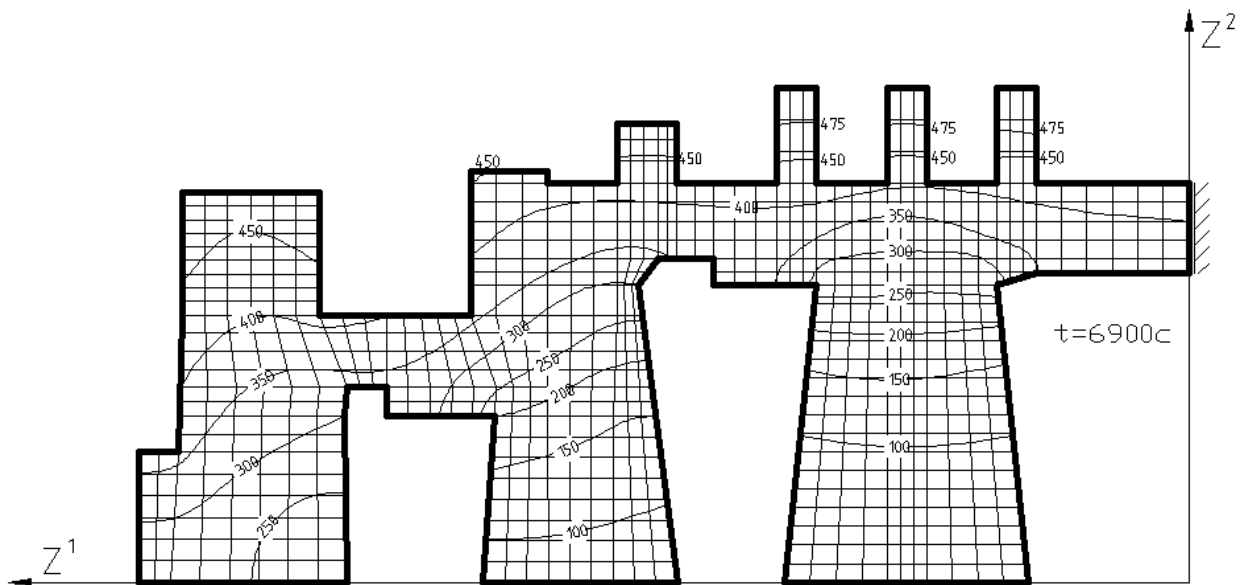


а)

Рис.4.7.



б)



в)

Рис. 4.7 (продовження).

Проведені дослідження дозволили встановити область використання розробленого модифікованого варіанту СЕ, який дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати і може бути застосований для розрахунку відповідальних об'єктів сучасної техніки.

Таким чином на основі представлених вище результатів можна стверджувати, що розроблений апарат чисельних досліджень нестационарних температурних полів методом скінченних елементів дозволяє суттєво розширити клас задач, включивши до їх переліку об'єкти, які знаходяться під дією не тільки силових, а й змінних у часі температурних навантажень.

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ РОЗРАХУНКОВОГО РЕСУРСУ СИСТЕМ ДЕФОРМІВНИХ ТІЛ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Узагальнення методики, викладеної в попередніх розділах на нові класи задач термов'язкопружнопластичного деформування з урахуванням пошкодженості матеріалу при силовому і нестационарному температурному навантаженні потребує розробки на основі МССЕ відповідних скінченноелементних співвідношень і алгоритмів. Крім того, оскільки значна кількість об'єктів досліджень можуть являти собою систему окремих, тіл виникає необхідність розгляду відповідних підходів для моделювання їх напружено-деформованого стану із урахуванням взаємодії (контакту) в процесі навантаження.

Враховуючи, що, наприклад, для конструкцій в галузі енергетичного машинобудування при дії довготривалих навантажень суттєвого значення набуває визначення їх розрахункового ресурсу, постає проблема його обчислення шляхом розв'язку задач континуального руйнування. Для обґрунтування достовірності результатів розрахунків, отриманих при термосиловому навантаженні розглянуто ряд контрольних прикладів, які охоплюють тіла, як при пружному деформуванні так і при наявності деформацій пластичності і повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу. Також отримані розрахункові співвідношення МССЕ для спеціального контактного СЕ і на цій основі проведено співставлення двох варіантів алгоритму моделювання процесу взаємодії деформівних тіл.

5.1. Вихідні співвідношення.

5.1.1. Основні співвідношення термов'язкопружнопластичності

При наявності незворотних деформацій пластичності і повзучості зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння і теорії спрочнення [93, 149 та ін.]. В цьому випадку приращення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$ може бути подане сумою приращень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, приращень деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$ і приращень деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$, також температурних $d\varepsilon_{ij}^t$ тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^t. \quad (5.1)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими. Приращення повних напруження визначаються через компоненти тензора приращень пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука.

Температурні деформації малі і визначаються формулою:

$$\varepsilon_{ij}^t = \beta^t T g^{ij}, \quad (5.2)$$

де $\beta^t = \beta^t(T)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Приращення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом [93, 103, 149]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (5.3)$$

де f_p – функція текучості;

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} / 3$ – компоненти девіатора напружень; $\sigma_0 = \sigma_{ii}$:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\mathcal{G}_p, T)]^2 = 0, \quad (5.4)$$

де $\tau_s(\mathcal{G}_p, T)$ – межа текучості при чистому зсуві;

$\mathcal{G}_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ij p}$ – параметр зміцнення Одквіста.

Прирошення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (5.5)$$

де f_c – функція, що визначає поверхню повзучості:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\mathcal{G}_c, T, \xi_c^i)]^2 = 0; \quad (5.6)$$

$\sigma_i(\mathcal{G}_c, T, \xi_c^i)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\mathcal{G}_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon^{ij c}$ – параметр

зміцнення Одквіста; $\xi_c^i = \frac{d\varepsilon_c^i}{dt} = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\xi_{ij}^c d\xi_c^{ij}$ – інтенсивність швидкостей

деформацій повзучості.

Параметри τ_c , τ_s , ν , E в рівняннях стану (5.4) і (5.6) визначаються із дослідів на простий розтяг або стиск циліндричних зразків при різній температурі нагріву деталей і швидкості деформації. Діаграми спрочнення, побудовані в координатах σ^i (інтенсивність напруження)- \mathcal{G}_c (параметр Одквіста, який для одномірного деформування співпадає з інтенсивністю логарифмічної міри

деформації ε_i), які показано в роботі [50, 84], достатньо повно характеризують поведінку матеріалу за границями пружності. Виконуючи диференціювання виразу (2.11), встановлюємо взаємозв'язок між прирощеннями напружень і прирощеннями пружних деформацій:

$$d\sigma^{ij} = \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e + \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \varepsilon_{kl}^e, \quad (5.7)$$

де, згідно з формулою (5.1),

$$d\varepsilon_{kl}^e = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c - \left(d\varepsilon_{kl}^t - \frac{\partial \beta_T}{\partial T} dT \cdot T \cdot g_{kl} \right). \quad (5.8)$$

Для визначення прирощень деформацій пластичності скористуємося співвідношеннями (5.5). Оскільки при пластичному деформуванні зображувальна точка залишається на поверхні текучості, то виконується рівність:

$$d f_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial f_p}{\partial T} dT. \quad (5.9)$$

Часткові похідні в рівнянні (5.9) по s^{ij} , ϑ_p , T дорівнюють:

$$\frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = s^{ij}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial T} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial T}. \quad (5.10)$$

Перепишемо співвідношення (5.9) з урахуванням (5.10). Оскільки $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$, отримаємо:

$$s_{ij}d\sigma^{ij} - 2\tau_s \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} d\mathcal{G}_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right) = 0. \quad (5.11)$$

Враховуючи співвідношення (5.7) і (5.9), рівняння (5.11) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} s_{ij} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c) + \\ + s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \cdot \varepsilon_{kl}^e = \\ = 2\tau_s \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} d\mathcal{G}_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подамо приращення пластичних деформацій відповідно до формули (5.10). Після відповідних перетворень запишемо вираз λ_p для ізотропного матеріалу:

$$\lambda_p = \frac{2 G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_p dT}{\gamma^p}, \quad (5.13)$$

де

$$\gamma_p = 2 G s^{kl} s^{kl} + \frac{4}{3} \sqrt{3} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} = 4\tau_s^2 \left(G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} \right), \quad (5.14)$$

$$\beta_p = s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e. \quad (5.15)$$

Аналогічно визначимо величину скалярного модуля λ_c , що дозволяє обчислити приращення деформацій повзучості:

$$\lambda_c = \frac{2G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_c dT - \rho_c}{\gamma^c}, \quad (5.16)$$

де

$$\beta_c = s_{ij} \frac{\partial \left[\mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right]}{\partial T} \varepsilon_{kl}^e, \quad (5.17)$$

$$\gamma_c = 4\sigma_{ic}^2 \left(G + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_c}{\partial \mathcal{G}_p} \right). \quad (5.18)$$

Після підставлення значень $d\varepsilon_{kl}^c$ та $d\varepsilon_{kl}^p$ через знайдені λ_c і λ_p в рівняння (5.7) отримаємо:

$$\begin{aligned} d\sigma^{ij} = & \left\{ \left[\mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times \\ & \times d\varepsilon_{kl} - \left\{ \left[\mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - \left(\frac{\beta_c}{\gamma^p} + \frac{\beta_p}{\gamma^c} \right) s^{kl} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e \right\} dT + \\ & + \left[\mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \frac{\rho_c}{\gamma^c} s_{kl}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Позначивши множник попереду dT через Q^{ij} , а третій складник D^{ij} , отримаємо:

$$d\sigma^{ij} = \left\{ \left[\mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times$$

$$\times d\varepsilon_{kl} + Q^{ij} dT + D^{ij} = d\sigma_{ij}^* - d\sigma_c^{ij} \quad (5.20)$$

де $d\sigma_{ij}^*$ – прирощення напружень, що визначаються з урахуванням залежності фізично-механічних параметрів від розвитку деформацій пластичності і повзучості; $d\sigma_c^{ij} = Q^{ij} dT + D^{ij}$ – прирощення напружень, пов'язані зі зміною фізико-механічних характеристик при зміні температури та швидкості деформацій повзучості.

5.1.2. Визначальні рівняння теорії повзучості з пошкодженням

Як при деформаціях пластичності так і для деформацій повзучості прирощення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$, обумовлених переходом від проміжної відлікової конфігурації до актуальної, може бути подане сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, прирощень деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$, тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c \quad (5.21)$$

Опис деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодження здійснюється на основі співвідношень теорії Ю.М. Работнова [188]:

$$\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = D \left(\frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m \quad (5.22)$$

де ξ_c^i – інтенсивність швидкості деформацій повзучості, ω – параметр пошкодженості матеріалу $0 < \omega < 1$; $D = D(T)$, $m = m(T)$ – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Значення величини параметра пошкодженості $\omega = \omega(t)$ змінюється в процесі деформування матеріалу від $\omega_0 = 0$ в вихідному стані матеріалу до $\omega^* = 1$, що відповідає умові локальної втрати несучої здатності.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості ξ_{ij}^c і напружень має вигляд:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}. \quad (5.23)$$

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості необхідно наведене співвідношення доповнити рівнянням, що описує зміну з часом параметра пошкодженості [50]:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta, \quad (5.24)$$

де $C = C(T)$, $m = m(T)$, $q = q(T)$, $\beta = \beta(T)$ – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість, σ_e – еквівалентне напруження.

Згідно з роботою [50] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення пошкодженості є:

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}), \quad (5.25)$$

де $I_1(\sigma_{ij})$, $I_2(s_{ij})$ – відповідно перший і другий інваріанти тензора σ_{ij} і девіатора напружень s_{ij} ; α, β, γ – константи матеріалу, $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Спосіб подання пошкодженості у вигляді скалярної величини є найбільш використовуваним у розрахунковій практиці [32, 50, 109]. Використання скалярного параметра пошкодженості дозволяє проводити чисельні дослідження, використовуючи наявні експериментальні дані про властивості матеріалів.

Момент часу t^* , в який в певній точці тіла виконується умова

$$t^* = t(\omega = \omega^*), \quad (5.26)$$

$$\omega^* \approx 1, \quad (5.27)$$

є моментом локальної втрати несучої здатності, що визначає розрахунковий ресурс тіла в умовах континуального руйнування.

Наведені фізичні співвідношення дозволяють проводити опис процесу континуального руйнування і визначення ресурсу на основі моделювання деформування в умовах повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу.

5.2. Обчислення температурних деформацій на основі МССЕ

Для обчислення температурних деформацій із використанням розроблених скінченних елементів застосовуються вектори температурних деформацій $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\}$,

$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}^T \right\}$, $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2}^T \right\}$, які обчислюються через вектори вузлових температур $\{T\}$:

$$\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right] \{T\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,1}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_1^T \right] \{T\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,2}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_2^T \right] \{T\}, \quad (5.28)$$

де

$$\{T\}^T = \left\{ T_{(-1;-1)} \quad T_{(1;-1)} \quad T_{(-1;1)} \quad T_{(1;1)} \right\}; \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{11}^T \quad 2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{12}^T \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22}^T \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^T \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha}^T \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^T \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33,\alpha}^T \right\}; \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right]^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right]^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right]^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right]^{(1;1)} \right]; \\ \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,1}^T \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,1}^T \right]^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,1}^T \right]^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,1}^T \right]^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,1}^T \right]^{(1;1)} \right]; \\ \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,2}^T \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,2}^T \right]^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,2}^T \right]^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,2}^T \right]^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,2}^T \right]^{(1;1)} \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}^T \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,1}^T \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{\boldsymbol{B}}_{,2}^T \right]^{(S_1, S_2)}$ для

вісесиметричних тіл визначаються відповідно до формул з урахуванням обчислених значень компонент метричного тензора для вісесиметричних тіл:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \circ \\ B^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \alpha_T \circ g_{11} \\ \frac{1}{4} \alpha_T \circ g_{12} \\ \frac{1}{4} \alpha_T \circ g_{22} \\ \frac{1}{4} \alpha_T \circ g_{33} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \circ \\ B_{,1}^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \alpha_T S_2 \circ g_{11} \\ \frac{1}{2} \alpha_T S_1 \circ g_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \circ \\ B_{,2}^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \alpha_T S_1 \circ g_{22} \\ \frac{1}{2} \alpha_T S_2 \circ g_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Напруження обчислюються за формулою (5.2) де $\varepsilon_{kl}^e = \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T$.

5.3. Достовірність визначення параметрів напруженого стану при термосиловому навантаженні

Значний практичний інтерес представляють задачі про напружено-деформований стан конструкцій в пружно-пластичній стадії роботи з урахуванням зміцнення матеріалів і залежності їх фізико-механічних характеристик від температури. Розв'язок таких задач за допомогою аналітичних методів пов'язаний зі значними математичними труднощами.

Визначимо пружно-пластичне напружений стан диска сталої товщини в процесі його нагрівання і проведемо співставлення результатів з отриманим в роботі [27]. Нерівномірне температурне поле диска змінюється уздовж радіуса відповідно до кривої, представленій на рис.5.1. Внутрішній радіус диску $Z_C=2.15$ см, зовнішній – $Z_B=17.15$ см. Температура вздовж радіального напрямку диска змінюється нерівномірно – зберігає майже сталі значення до $2/3$ радіуса диска і різко зростає в іншій його частині. У зв'язку з цим розрахункову схему доцільно

прийняти з нерівномірним кроком скінченних елементів за радіусом, як це показано на рис. 5.1.

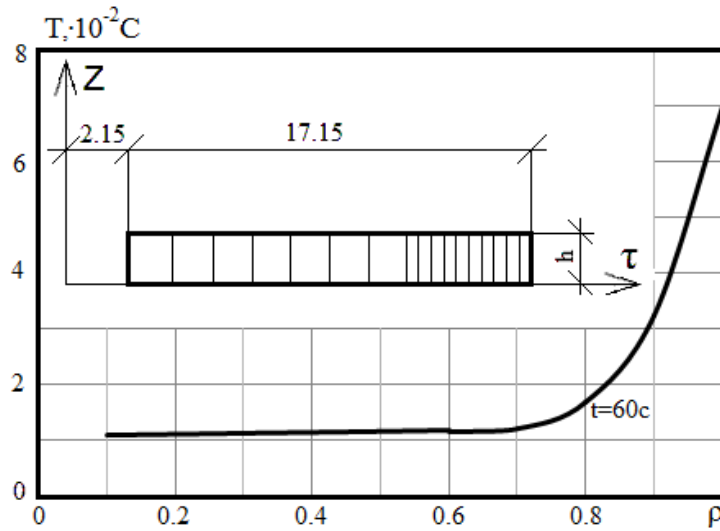


Рис. 5.1.

Залежність інтенсивності дотичних напружень σ_i від інтенсивності деформацій ε_i і температури приведені в табл.5.1. В табл.5.1 наведені також значення коефіцієнту лінійного розширення β_T від температури. Коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$.

На рис. 5.2 наведені графіки зміни компонент радіальних і колових напружень σ_r і σ_θ вздовж радіусу диска.

Таблиця 5.1

ε_i	σ_i /даН/см ² / при T °C и $\beta_T \cdot 10^4$ 1/град								
	T=0	T=100	T=200	T=300	T=400	T=500	T=600	T=700	T=800
	0.15	0.152	0.154	0.157	0.162	0.166	0.169	0.171	0.172
0.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.001	1950	1925	1880	1800	1700	1560	1400	1200	1000
0.002	3900	3850	3760	3600	3390	3080	2760	2430	1800
0.004	5375	5630	5520	5175	5000	4580	3885	3225	2290
0.006	6295	6175	5935	5650	5375	4910	4130	3465	2440
0.008	6690	6500	6180	5925	5585	5020	4295	3625	2500
0.012	7060	6790	6420	6150	5796	5112	4410	3728	2540

Штрихпунктирною лінією позначені розподілення напружень, обчислені за методикою роботи [21], суцільною - по МССЕ. З графіків видно, що спостерігається задовільне узгодження величин напружень в пружнопластичній області, а області пружних деформацій криві практично збіглися. Деякі відмінності графіків є в області пластичних деформацій ($14.9 \leq r \leq 17.15$), що можна пояснити тим, що в роботі [21] розрахунок проводився із урахуванням історії навантаження, в той час як в даній роботі розв'язок отримано без урахування історії навантаження.

Наведені результати дозволяють зробити висновок про високий рівень достовірності результатів моделювання напружено-деформованого стану при дослідженні термов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні

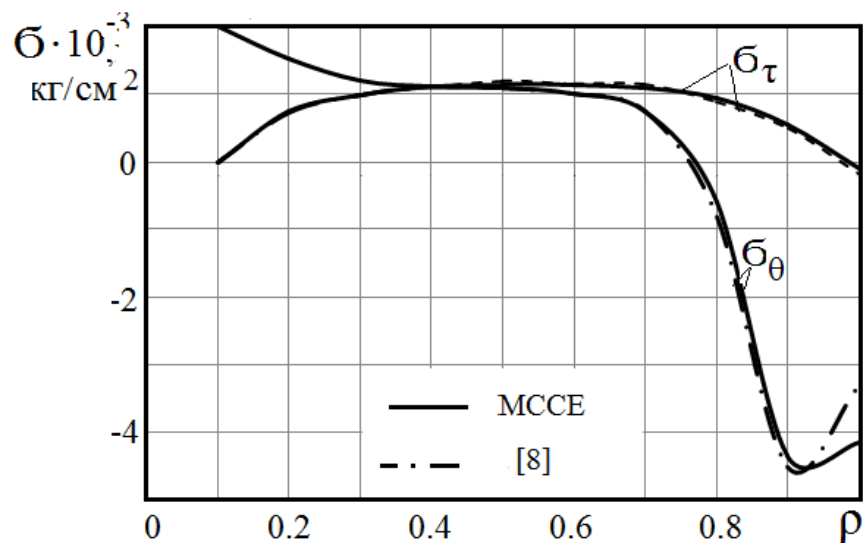


Рис. 5.2.

В якості іншого контрольного прикладу розглянемо розподіл температурних напружень в круглій пластині сталюї товщини із центральним отвором рис.5.3 [68].

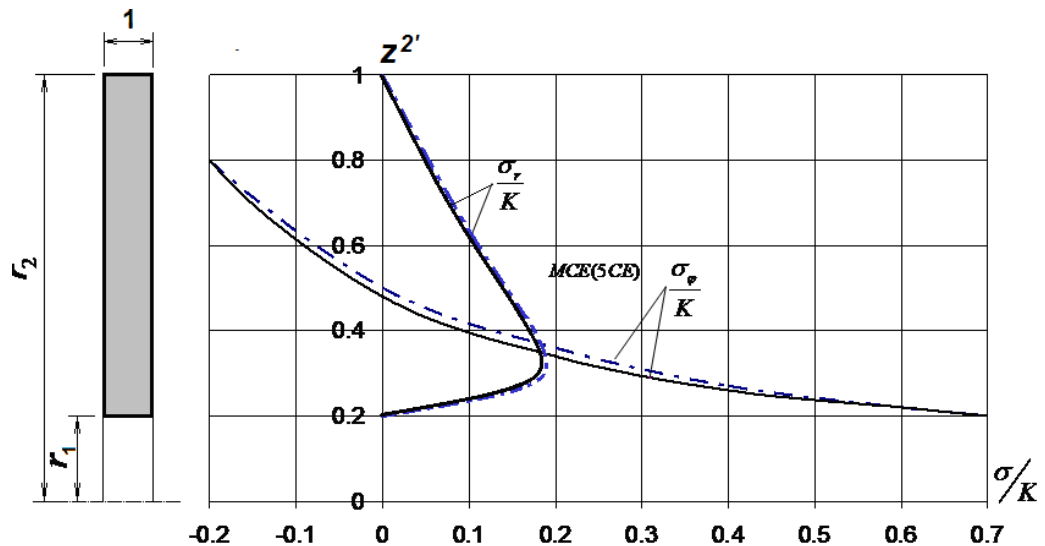


Рис.5.3

Температурне поле пластини визначимо згідно формули:

$$T = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{\ln \rho_1} \ln \rho, \quad (5.32)$$

де T_1 і T_2 температура пластини на внутрішньому $\rho = \rho_1$ та зовнішньому $\rho = 1$ контурах. На рис.5.3 показано порівняння результатів отриманих аналітично в роботі [107] (суцільна лінія) та розрахунком за МССЕ (штрихпунктирна лінія).

Значний інтерес становить порівняння чисельних результатів з експериментальними даними. З цією метою була розглянута задача про термопружний стан диску з отвором, який знаходиться під дією нерівномірного нагріву. Температурне поле змінюється вздовж радіуса диску у відповідності з графічною залежністю, наведеною на рис.5.4,а.

На рис.5.4,б наведені криві напружень σ_r та σ_θ отримані експериментально методом електротензометрії [186] (представлені у вигляді круглих позначок), результати чисельних розрахунків, отриманих в роботі [186] (представлені суцільними лініями) та результати розрахунку за МССЕ (представлені штриховими лініями).

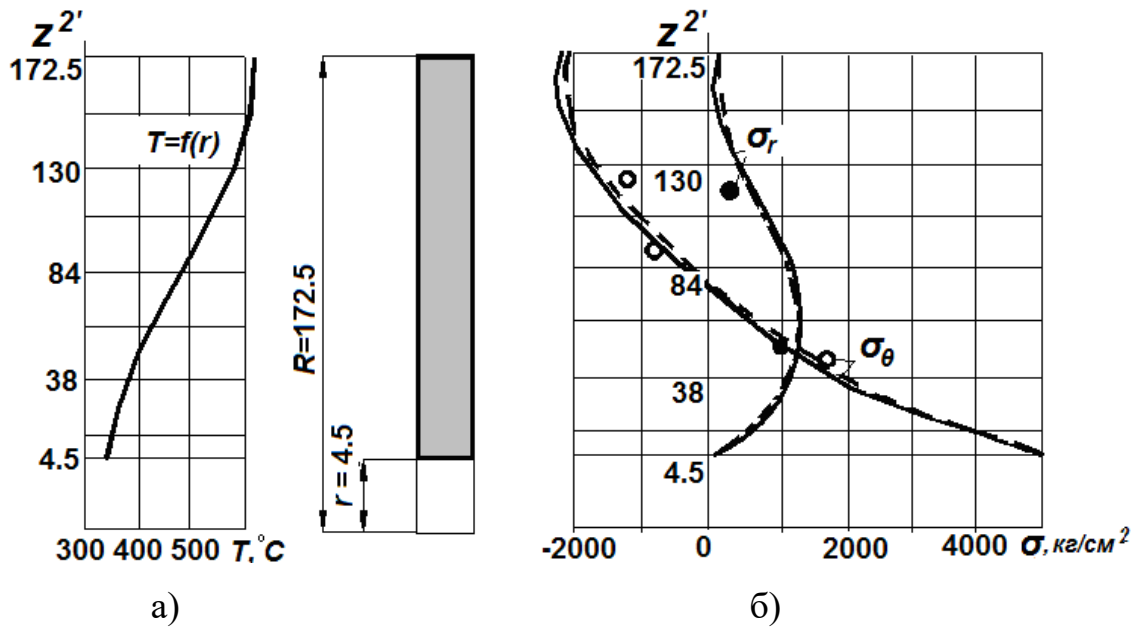


Рис.5.4.

Порівняння результатів розрахунку за МССЕ та експериментальних даних показує, що вони задовільно узгоджуються між собою. Як можна побачити наближені результати МССЕ та результати чисельного розрахунку в роботі [186] краще узгоджуються між собою ніж з експериментом. Скоріш за все це можна пояснити великою похибкою експериментальних даних.

Розглянемо температурні напруження в суцільному диску, що обертається з кутовою швидкістю ω (1/сек). Нехай температурне поле змінюється лише вздовж радіуса, а по товщині диск нагрітий рівномірно. В роботі [21] наведений аналітичний розв'язок цієї задачі при умові незалежності модуля пружності E та коефіцієнта лінійного розширення α_T від температури. В цьому випадку формули для обчислення напружень σ_r , σ_ϕ мають наступний вигляд [21]:

$$\sigma_r = E\alpha_T \left(\frac{k_1(R)}{R^2} - \frac{k_1(r)}{r^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (R^2 - r^2), \quad (5.34)$$

$$\sigma_\phi = E\alpha_T \left(\frac{k_1(R)}{R^2} - \frac{k_1(r)}{r^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 R^2 - \frac{1+\nu}{8} \rho\omega^2 r^2, \quad (5.35)$$

де $k_1(r) = \int_0^r rT(r)dr$, $\rho = \frac{\gamma}{g}$ - щільність матеріалу, γ - питома вага матеріалу.

Для співставлення результатів розрахунку, отриманих за наведеними формулами і за розробленою методикою, розглянемо термопружний стан сталюого диска ($\gamma = 0.00786$ кг/см³) при квадратичному розподілі температури $T(r) = cr^2$.

Для зручності представимо, що E , α_T , c дорівнюють одиниці. Кутову швидкість приймемо рівною 3.14 1/сек. В табл.5.2 наведено порівняння результатів точного та наближеного розв'язків при квадратичному законі розподілу температури вздовж радіуса диска.

Таблиця 5.2

ρ	σ_r			σ_ϕ		
	[21]	МССЕ	похибка	[21]	МССЕ	похибка
0.05	3.990	3.921	1.7	3.970	3.893	1.95
0.15	3.910	3.856	1.4	3.730	3.685	1.20
0.25	3.750	3.710	1.1	3.250	3.216	1.06
0.35	3.510	3.475	1.0	2.530	2.503	1.07
0.45	3.190	3.161	0.9	1.570	1.549	1.34
0.55	2.790	2.765	0.9	0.370	0.353	5.20
0.65	2.310	2.289	0.9	-1.069	-1.063	1.30
0.75	1.750	1.740	1.0	-2.749	-2.761	0.43
0.85	1.110	1.095	1.3	-5.669	-5.674	0.20
0.95	0.390	0.377	3.2	-6.289	-6.846	0.25
1.00	0.000	0.000	0.0	-8.000	-8.000	0.00

Порівняння результатів показало, що похибка в напруженнях σ_r за максимальними значеннями дорівнює 1.7%, а максимальні напруження σ_ϕ , що

отримані за наведеними формулами та по розробленій методиці співпали, що свідчить про високу точність запропонованого варіанту МСЕ.

В конструкціях та окремих деталях, що працюють під впливом об'ємних та поверхових сил при нерівномірному нагріві, фізико-механічні характеристики матеріалів можуть суттєво залежати від температури. Актуальним є апробація розробленої методици для розв'язання такого типу задач. Нижче наводяться результати розв'язання задачі про узагальнений деформований стан неоднорідного циліндра. Неоднорідність циліндра полягає в залежності модуля пружності E від температури, яка змінюється по радіусу циліндра і обумовлена впливом нерівномірного нагріву. Вихідні дані: $\nu = 0.3$, $\alpha_T = 1 \cdot 10^{-4} \text{ 1/град}$, $E = 10^3 e^{-0.04606T}$, $T = -71.66(\rho - 0.2)$ (рис.5.5).

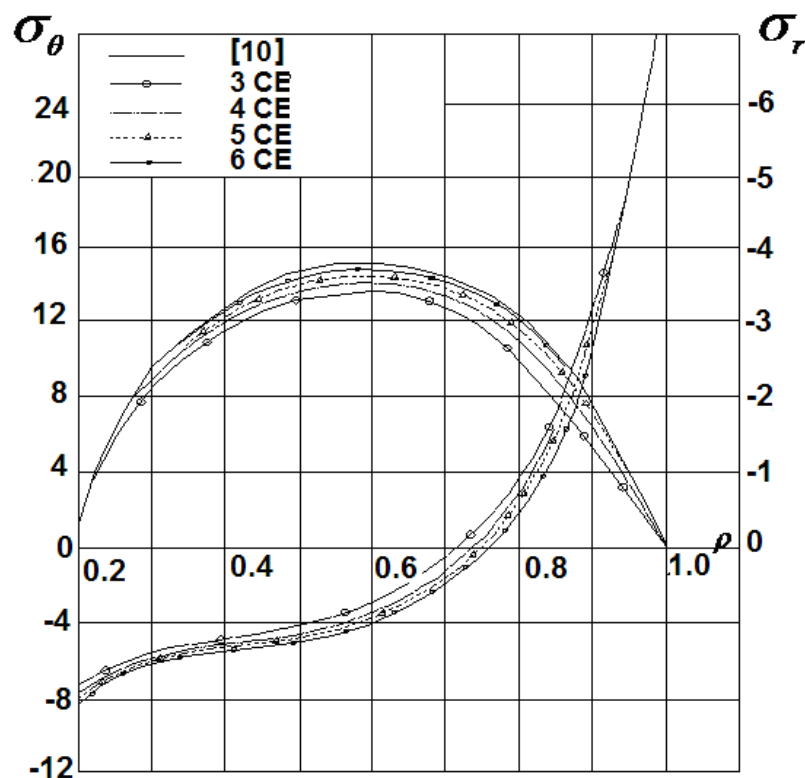


Рис.5.5

Результати розрахунку порівнювались із розв'язком, отриманим в роботі [21]. При розрахунках досліджувалась потрібна кількість СЕ по товщині стінки циліндра при якій досягається збіжність результатів. Як впливає із графіків,

наведених на рис.5.5, достатнім виявилось 5 СЕ для отримання збігу кривих напружень σ_r і σ_θ . При цьому похибка у визначенні максимальних напружень не перевищує 3%, що свідчить про високу точність розробленої методики стосовно задач із неперервною неоднорідністю.

Таким чином, розроблена на основі МССЕ методика розв'язання вісесиметричних задач при термосиловому навантаженні забезпечує достовірність результатів для різних об'єктів і розрахункових схем, які включають кругові і плоскодеформовані тіла при різних законах розподілу температури та зовнішнього навантаження, а також у випадку залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від температури.

Для моделювання деформування в умовах повзучості, як і при пружнопластичному деформуванні, використовуються обидва алгоритми розв'язання систем нелінійних рівнянь, а при виконанні екстраполяції переміщень визначення прирощення вектора переміщень на кроці « m » визначається наступним чином:

$$\{\Delta u^m\} = \frac{\{\Delta u^{m-1}\} \Delta t^m}{\Delta t^{m-1}}. \quad (5.36)$$

Для дослідження алгоритму з екстраполяцією переміщень при повзучості по формулі (5.36), розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах повзучості тонкостінної труби (рис. 5.6).

Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (5.37)$$

де $A = 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$, $k_1 = 2,36$, $c = 20,5 \text{ МПа}$, $B = 0,58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3,17} \text{ год}^{-1}$, $k_2 = 3,17$ – константи матеріалу [119, 185], радіуси труби дорівнюють $R_I = 5,5 \text{ мм}$,

$R_2 = 6$ мм. Деформування відбувалося під впливом постійного розтягуючого навантаження, що створює в трубі напруження $\sigma = 60$ МПа.

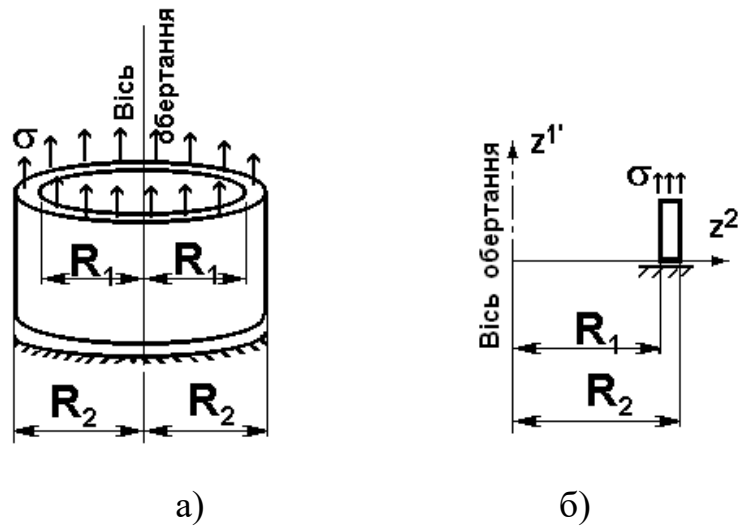


Рис. 5.6.

Величини деформацій повзучості, наведені в таблиці 5.3, добре узгоджуються з експериментальним результатом [119, 185].

Таблиця 5.3

t , год	2,5	5	7,5	10	12,5
ε_c % [74д]	0,625	1,270	2,221	3,603	5,000
ε_c % (5.36)	0,631	1,286	2,259	3,675	5,121
похибка	0,99%	1,28%	1,72%	2,00%	2,42%

Ефективність розробленої модифікації алгоритму з екстраполяцією переміщень по формулі (5.36) показано на рис. 5.7 у вигляді графіків залежності кількості ітераційних витрат, необхідних для розв'язання задачі при різних значеннях деформацій повзучості ε_c .

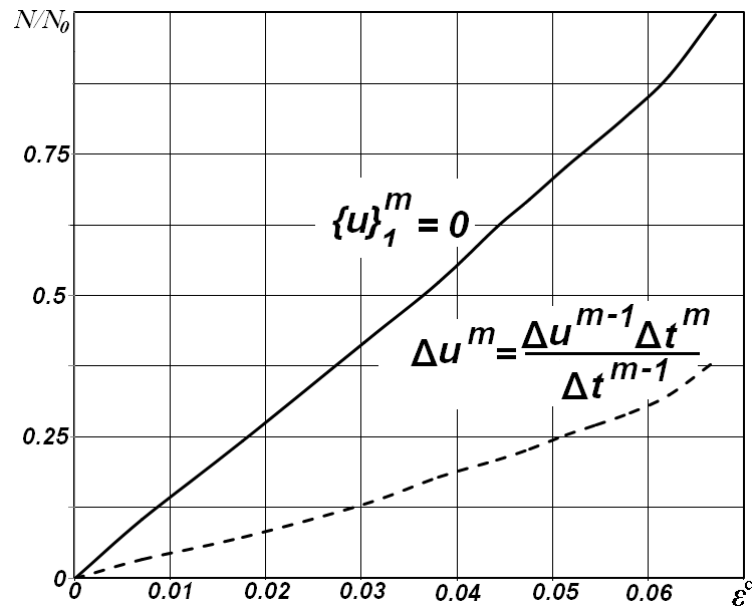


Рис. 5.7.

Як видно, застосування початкового наближення прирощень переміщень для задач повзучості дозволяє зменшити обчислювальні витрати в три рази [75].

Аналогічні результати отримані при одночасному розвитку деформацій пластичності та повзучості в задачі про розтяг прямокутної пластини з центральним вирізом малої товщини (рис.5.8,а) [250].

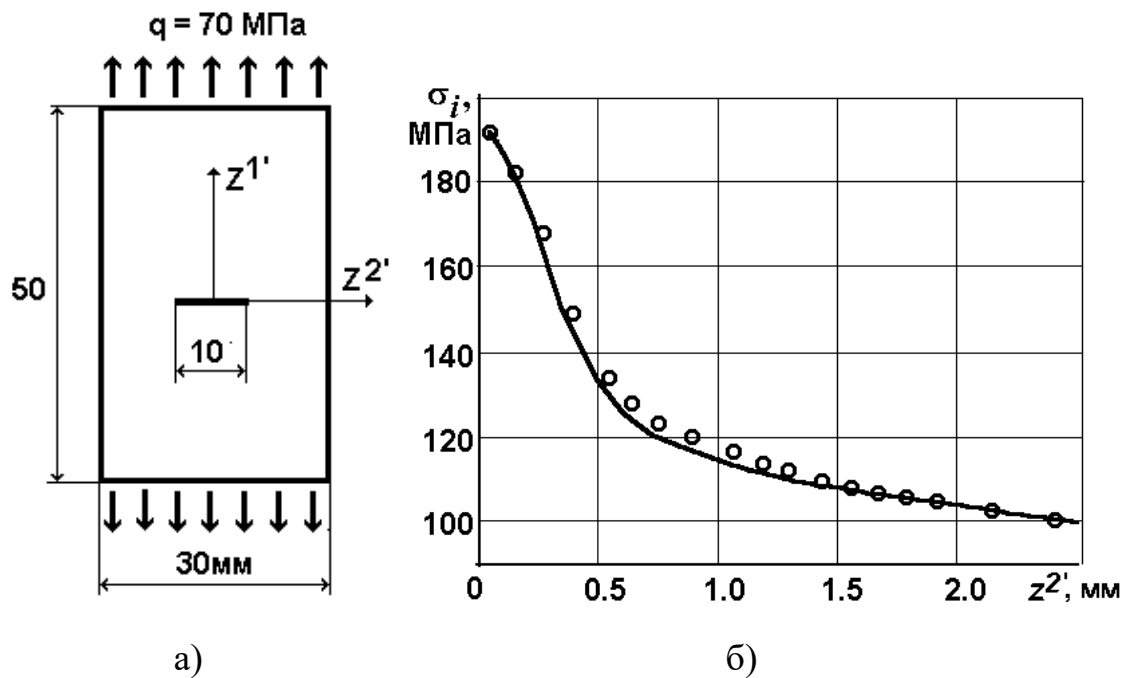


Рис.5.8.

Для опису властивостей матеріалу в умовах повзучості використано наступні рівняння:

$$\frac{d\varepsilon_{ijc}}{dt} = \frac{3}{2} A \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^n \frac{s_{ij}}{\sigma_i} t^m, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left[\frac{(1-\alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_1}{1-\omega} \right]^\varphi \quad (5.38)$$

де $A=3.523 \cdot 10^{-21}$ МПа^{-5.51}год.⁻¹, $n=5.51$, $B=1.555 \cdot 10^{-17}$ МПа^{-5.23}год.⁻¹, $\varphi=4.23$, $\alpha=0.7$ – константи матеріалу.

Розв'язання даного тестового прикладу було виконано з урахуванням сумісного виникнення деформацій пластичності і повзучості. Отримані результати подані у вигляді розподілень σ_i вздовж осі вирізу в момент часу $t=10$ год. (рис. 5.8,б). Збіг названих параметрів напружено-деформованого стану з [250] спостерігається на протязі всього часу деформування пластини.

Отже, використання основного і модифікованого алгоритмів розв'язання нелінійних задач МССЕ дозволяє отримувати достовірні результати при сумісному виникненні деформацій пластичності і повзучості.

Таким чином, розроблена на основі МССЕ методика розв'язання вісесиметричних задач пружнов'язкопластичності при термосиловому навантаженні забезпечує достовірність результатів для вісесиметричних і плоско деформованих тіл.

5.4 Методика моделювання взаємодії окремих конструктивних елементів.

Необхідність моделювання умов взаємодії в системі просторових тіл виникає при розгляді опорних пристроїв, з'єднань лопаток із дисками та інших відповідальних елементів конструкцій. У загальному випадку це потребує розв'язання просторової контактної задачі з урахуванням тертя на поверхнях сполучуваних тіл.

Тертя зазвичай розглядається як процес, при якому дотичні напруження на контактних поверхнях визначаються відповідно з прийнятим законом тертя. Як показують досліди [239], для пластичного деформування може бути використаний закон Кулона у вигляді:

$$\tau \leq \sigma_n f_{\text{mp}} \quad (5.39)$$

де f_{mp} – коефіцієнт тертя; σ_n – напруження в елементі, спрямоване по нормалі і контактній поверхні; τ – напруження тертя в скінчененому елементі контактного шару.

Не рідко закон Кулона, зручно сформулювати в зусиллях:

$$F_{\text{mp}} \leq P^H f_{\text{mp}} \quad (5.40)$$

де P^H – зусилля в закріпленому вузлі, направлене по нормалі до поверхні контакту; f_{mp} – сила тертя в цьому вузлі.

В основу методики розв'язання поставленої задачі на основі МССЕ покладено підхід, що ґрунтується на введенні фіктивного контактного шару матеріала між взаємодіючими тілами, рис.5.9.

Цей контактний шар має досить незначну товщину h порівняно з габаритами взаємодіючих конструктивних деталей та повинен забезпечувати умови взаємного непроникнення матеріалу окремих конструктивних елементів,

відсутності розтягуючи напружень, σ^{11} по нормалі до його поверхні, відповідність дотичних напружень, σ^{12} прийнятому закону тертя.

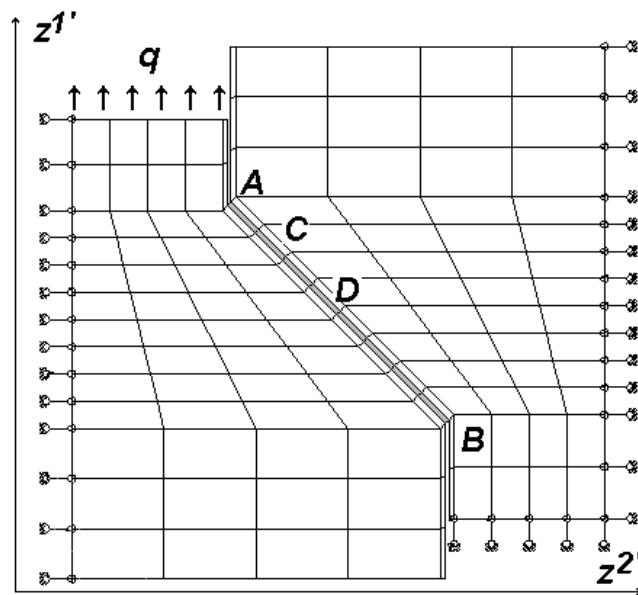


Рис. 5.9.

В залежності від величини зусиль тертя можливі два підходи до вибору початкової розрахункової схеми, подальше уточнення напружено-деформованого стану якої дозволяє задовільнити умову тертя у вигляді, наприклад (5.39)

У випадку значних величин коефіцієнта тертя f контактний шар формується із звичайних скінченних елементів. В процесі деформування в кожному СЕ, що належить контактному шару відбувається зменшення дотичних напружень σ^{12} , якщо їх величина перевищує напруження тертя t . У випадку незначних величин коефіцієнта тертя f контактний шар формується із спеціальних скінченних елементів, що не сприймають дотичних зусиль (напружень). В процесі деформування в кожному СЕ, що належить контактному шару, відбувається збільшення дотичних напружень σ^{12} до величини, що відповідає значенню коефіцієнта тертя.

При побудові матриці жорсткості спеціальних СЕ і при обчисленні векторів вузлових реакцій відбувається корекція відповідних компонент тензора пружних сталих за умов дорівнювання нулю дотичних напружень.

$$C_*^{ijkl} = C^{ijkl} - C_2^{ijkl} - C_3^{ijkl}, \quad (5.39)$$

де C_*^{ijkl} – скореговані компоненти тензора пружних сталей; $C_2^{ijkl} = C^{ij12}$, – складові, що відповідають дорівнюванню нулю дотичних напружень σ^{12}

Отримаємо:

$$\begin{aligned} C_*^{ijkl} &= C^{ijkl} - \mu(g^{i1}g^{j2} + g^{i2}g^{j1}) - \mu(g^{i1}g^{j3} + g^{i3}g^{j1}) = \\ &= C^{ijkl} - \mu \left[g^{i1}(g^{j2} + g^{j3}) + g^{j1}(g^{i2} + g^{i3}) \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Для порівняння ефективності отримуваних двома зазначеними підходами результатів розглянемо наступний тестовий приклад при умові відсутності тертя. Просторові плоско деформовані тіла сполучені вздовж площадки AB , нахиленої під кутом 45° . Граничні умови і навантаження подані на рис.5.9. Характеристики матеріалу конструкції: $E=6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu=0.3$.

Проведені розрахунки дозволили отримати розподілення нормального тиску вздовж площадки AB (рис.5.10), що якісно збігається з відомими аналітичним [46] розв'язком.

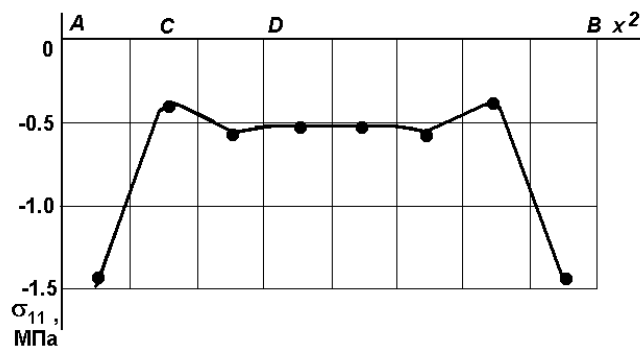


Рис. 5.10.

Величини нормальних напружень і похибки їх обчислення, що отримані при введенні умови, що дотичні напруження дорівнюють нулю у вирази векторів вузлових реакцій і різній точності ζ розв'язування отримуваної системи рівнянь, та із застосуванням спеціальних СЕ, наведені в табл. 5.4. Похибка $\delta(\sigma_{11})$ визначена по відношенню до значень σ_{11} , отриманих за допомогою спеціальних СЕ). Точність розв'язання системи нелінійних рівнянь, що потрібна для отримання в усіх точках із точністю в межах 5%, становить $\zeta = 10^{-5}$. Відповідні обчислювальні витрати становлять більш ніж 300 ітерацій.

Таблиця 5.4

Точність розв'язання системи рівнянь ζ	Величина нормальних напружень, МПа / похибка обчислення нормальних напружень $\delta(\sigma_{11})$, % в характерних точках площадки АВ			Кіль- кість ітерацій
	A	C	D	
10^{-1}	-1.097/25.8	-0.290/16.3	-0.437/13.6	50
10^{-2}	-1.367/7.52	-0.318/8.36	-0.482/5.71	140
10^{-3}	-1.451/1.83	-0.326/6.05	-0.496/1.98	229
10^{-4}	-1.478/-	-0.329/5.18	-0.506/0.98	319
Спец.СЕ, $\sigma_{12} = 0$	-1.478/-	-0.347/-	-0.501/-	-

Отже, при відсутності тертя переваги використання спеціальних СЕ очевидні, але при збільшенні значень коефіцієнту тертя ефективність обох підходів зближується і в крайньому випадку повного прилипання стають очевидними переваги використання звичайних СЕ. тому при розв'язанні реальних задач доцільно проводити співставлення ефективності обох підходів на модельних задачах.

Загалом, приведені вище співвідношення і алгоритми охоплюють всі етапи розвитку методики, починаючи з вибору відповідних законів стану, виведення нових розрахункових співвідношень МССЕ і закінчуючи апробацією на тестових прикладах алгоритмів розв'язання задач термопружнов'язкопластичного деформування окремих тіл і їх систем при термосиловому навантаженні. Це дає можливість надалі розглядати нові класи об'єктів, пов'язаних з дослідженням напружено-деформованого і обчисленням розрахункового ресурсу важливих елементів конструкцій і їх вузлів.

РОЗДІЛ 6. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРОГНОЗУВАННЯ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Для ілюстрації можливостей застосування розроблених в розділах 4 і 5 методик дослідження поведінки плоско-деформованих і вісесиметричних тіл у нестационарному температурному полі, визначення пов'язаних з ними температурних напружень, коректного обчислення розрахункового ресурсу окремих об'єктів і взаємодіючих деталей розглянуті такі важливі об'єкти машинобудування як корпус стопорного клапана парової турбіни при силовому і температурному навантаженнях, цільнокований ротор парової турбіни і ялинкове з'єднання хвостовика лопатки з диском газотурбінної установки

6.1. Дослідження напружено-деформованого стану корпусу стопорного клапана парової турбіни при термосиловому навантаженні

Стопорний клапан парової турбіни призначений для автоматичного припинення надходження пари в турбіну у випадку аварійних ситуацій, зокрема при перевищенні швидкості обертання вала заданих допустимих величин. Розрахункове дослідження напружено-деформованого стану корпусу стопорного клапана парової турбіни було проведено при дії термосилового навантаження.

Досліджуваний об'єкт являє собою масивне тіло обертання складної форми. У верхній частині - це циліндр, довжиною $2R$, товщиною $0,375 R$, в верхній частині – полусфера, товщиною $0,32R$, радіусом $0,85 R$, де R - внутрішній радіус циліндра. У верхній частині циліндра за допомогою рівномірно розташованих по колу болтів закріплена кришка. Перехідна частина від циліндра до сфери має виступ для запору стопорного клапана. Матеріал конструкції характеризується наступними механічними і теплофізичними параметрами: коефіцієнт Пуассона

$\nu = 0.3$, модуль пружності $E = 205800 \text{ МПа}$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ І/град.}$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 34.6 \text{ ккал/м} \cdot \text{час} \cdot \text{град.}$, теплоємність $C_p = 7.25 \text{ ккал/кг} \cdot \text{град.}$, критичний коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{Ic} = 31 \text{ МПа м}^{1/2}$, $\sigma_I = 300 \text{ МПа}$. В окружному напрямку геометричні і механічні характеристики не змінюються. Розрахункова схема наведена на рис. 6.1,а де всі розміри представлені відносно внутрішнього радіуса циліндру R . Корпус знаходиться під дією нестационарного температурного поля і завантажений рівномірно розподіленим тиском по внутрішній поверхні, а також розподіленим по колу навантаженням від клапана і кришки. На рис.6.1,б наведена схема фрагментації меридіонального перетину. для оптимізації параметрів сіткової моделі один з варіантів якої представлено на рис.6.2,а.

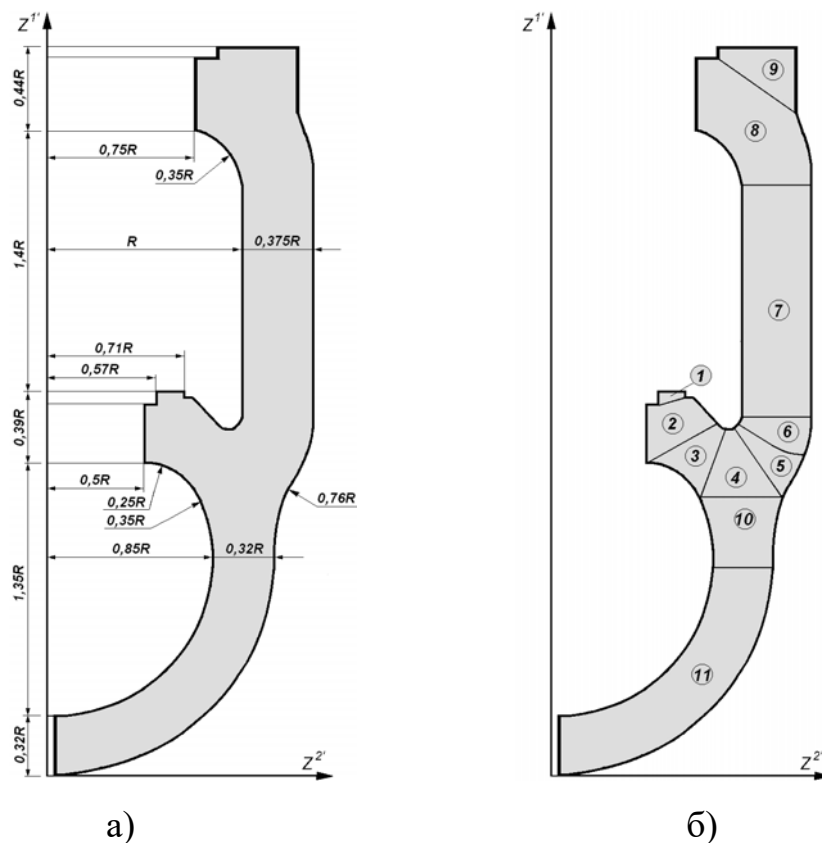


Рис. 6.1.

На першому етапі було проведено дослідження НДС коробки стопорного клапану від дії внутрішнього тиску $q=1 \text{ кн/м}$, результати якого представлені на

рис.6.2,б у вигляді ізоліній головних напружень в меридіональному перетині. Максимальні значення розтягуючі напружень зосереджені на внутрішній поверхні в зоні галтельного переходу від циліндричної частини корпусу до запорного виступу. На рис 6.3 наведені графіки розподілення інтенсивності розтягуючих напружень по поверхні галтелі і по товщині стінки корпусу при різних параметрах дискретної моделі.

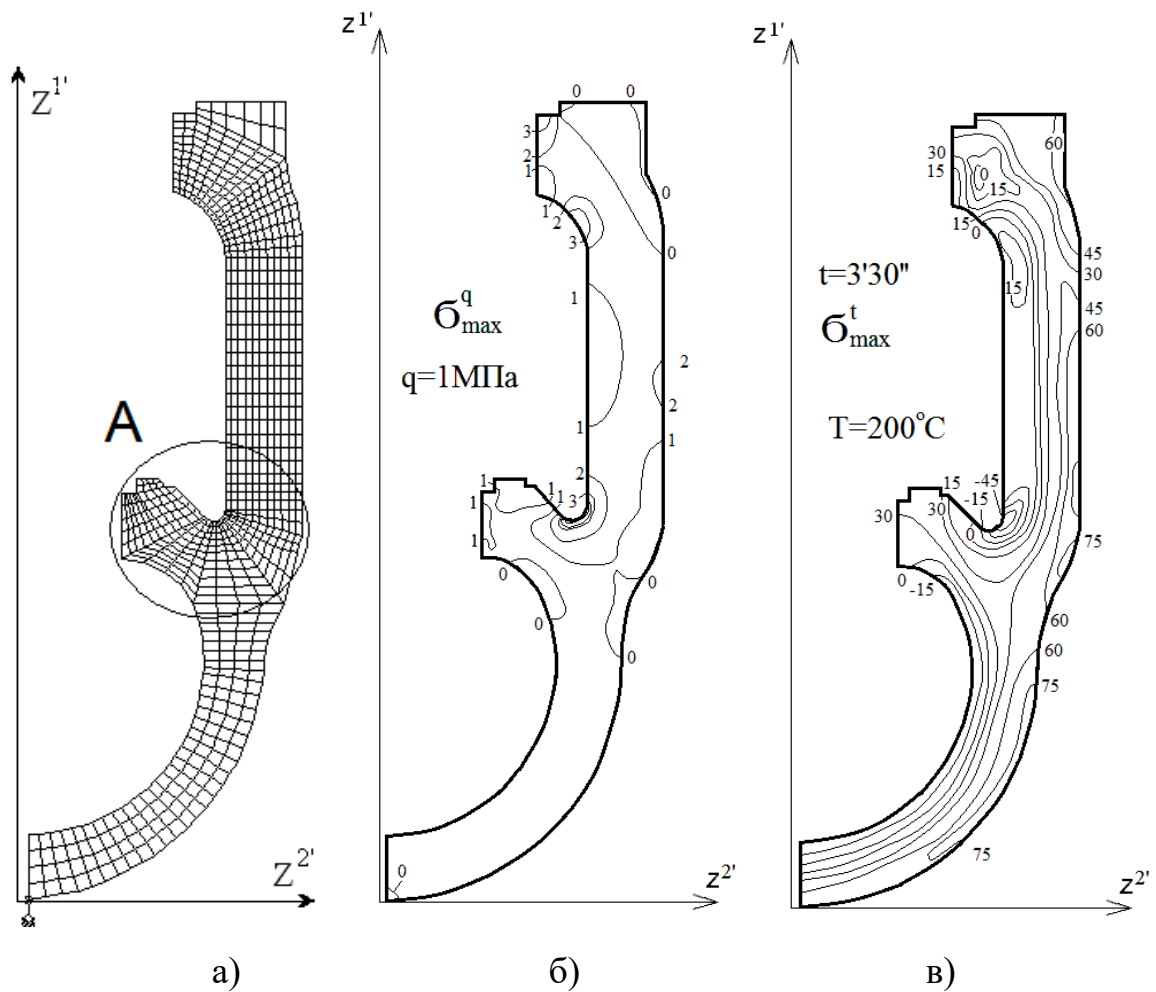


Рис. 6.2.

На другому етапі було проведено аналіз впливу на НДС коробки клапану нерівномірного температурного поля. На рис.6.4 наведені графіки розподілу температури вздовж лінії EFG (рис.6.3,б), отримані в пусковому режимі при внутрішній температурі 200°C , початковій температурі корпусу 20°C і теплоізолюваній його зовнішній поверхні.

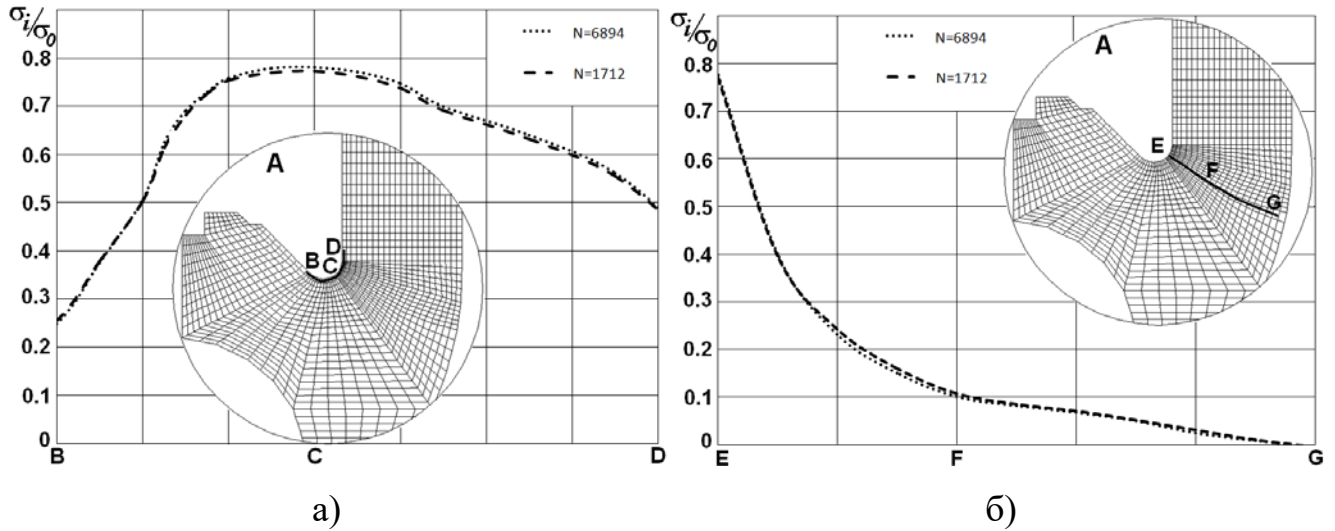


Рис. 6.3.

Обчислення параметрів напружено-деформованого стану корпусу стопорного клапану при температурному навантаженні були проведені для всіх етапів пускового режиму, вказаних на рис 6.4. Один із результатів розрахунків, отриманий в момент часу $t = 3$ мин.30 сек.. На рис.6.5 наведені графіків розподілення колових напружень по поверхні галтелі і по товщині стінки корпусу.

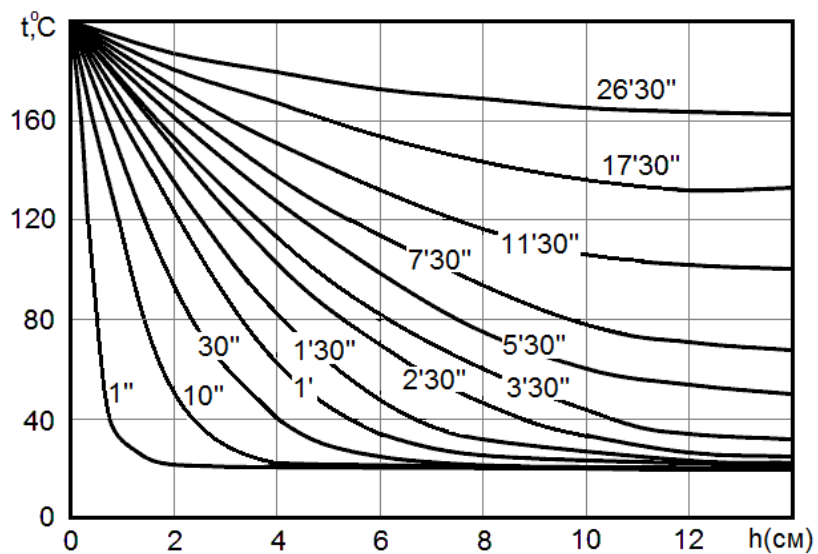


Рис. 6.4.

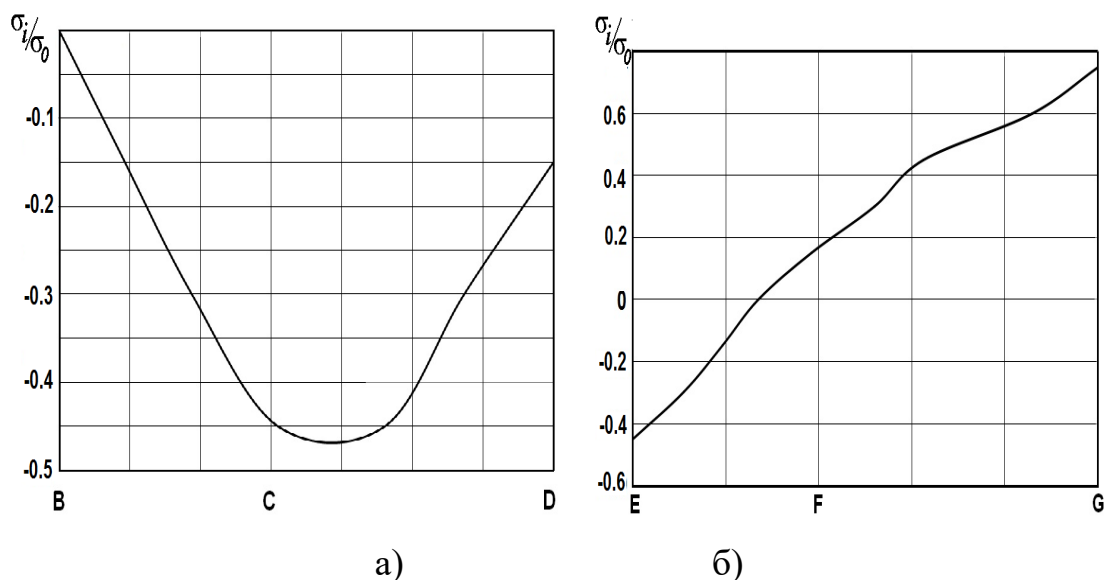


Рис. 6.5.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що врахування температурного навантаження в період пуску на певний час зменшує рівень розтягуючих напружень в області галтельного переходу, але підвищує їх на більшій частині товщини стінки. Як показали результати експертного аналізу стану конкретних промислових зразків стопорних клапанів, оцінка впливу температурного фактору на величину розрахункового ресурсу потребує подальших досліджень в рамках механіки руйнування.

6.2. Визначення ресурсу цільнокованого ротору парової турбіни в умовах повзучості

Розглядувані процеси деформування в умовах повзучості із накопиченням пошкодженості найбільш притаманні елементам енергетичного обладнання, умови роботи яких передбачають тривале силове навантаження при високих температурах, до яких зокрема, відносяться ротори парових турбін. Від надійності роботи таких відповідальних елементів конструкцій як диски турбін і хвостовики лопаток залежить працездатність енергетичних установок (парових турбін,

реактивних двигунів) в цілому. Їх аварійне руйнування є особливо небезпечним і може призвести до значних матеріальних збитків.

Диск ротора парової турбіни є масивним вісесиметричним тілом з центральним скрізним отвором та ободом для закріплення бандажу з лопатками (рис.6.6). Сили, що впливають на диск обумовлено його обертанням з частотою $n_o=3000$ об/хв і складаються із рівномірно розподіленого по площині бандажного обода S поверхневого навантаження інтенсивністю 68 МПа, що моделює вплив лопаток, і масових сил, що розподілені по об'єму диска.

Масова сила dP , що діє на елементарний об'єм матеріалу dV , розташований на відстані $R=z^2$ від осі обертання диску, обчислюється за формулою

$$dP = \rho w^2 R dV \quad (6.1)$$

де ρ – щільність матеріалу диску, $\rho = 7850$ кг/м³; ω – кутова швидкість обертання диску, $w = \pi n_o/30$.

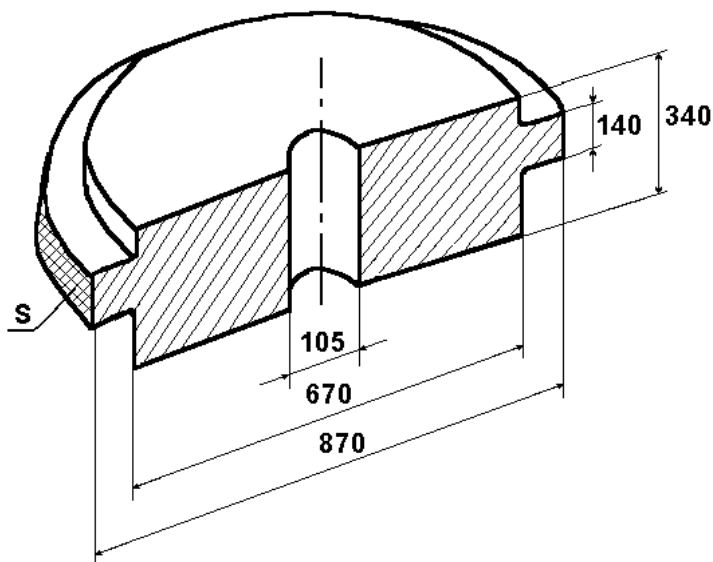


Рис.6.6.

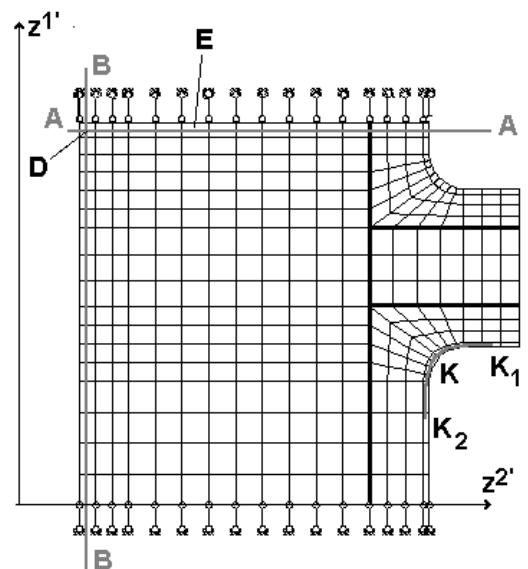


Рис 6.7.

Скінченноелементна дискретизація досліджуваного об'єкту проводилась із застосуванням вісесиметричних скінченних елементів. Для дослідження збіжності

результатів в залежності від кількості вузлів скінченноелементної моделі N пружний розв'язок отриманий при $N = 165, 384, 538$. Варіант сітки з 384 вузлів показаний на рис.6.7 (товсті лінії відповідають границям фрагментів). При послідовному згущенні сітки товщина слою скінченних елементів вздовж галтелей залишалася незмінною.

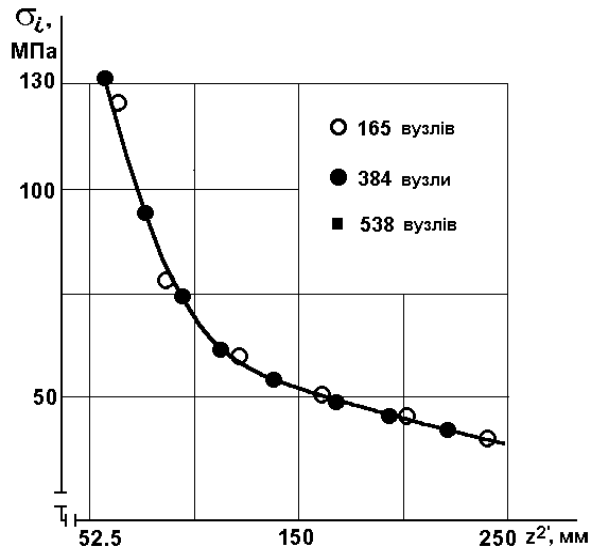
Для дослідження збіжності розв'язку виконано порівняння отриманого розподілення інтенсивності нормальних напружень σ_i вздовж радіусу ротора, на якому σ_i досягає максимальних значень (лінія А–А на рис.6.7), вздовж концентратора напружень – галтелі (на відстані 2.5 мм від поверхні – лінія K_1 – K_2 на рис.6.7), а також вздовж перерізу, що лежить на відстані 63 мм від осі ротора і паралельний їй (В–В на рис.6.7). Як видно з графіків, наведених на рис.6.8, збіжність значень σ_i в перерізах А–А (рис.6.8,а) і В–В (рис.6.8,б) в межах 2% досягнена вже при найменшому числі вузлів скінченноелементної моделі внаслідок однорідності напруженого стану в цій області. Збіжність значень σ_i вздовж галтелі досягнена при $N=384$ з точністю 2% по відношенню до результату при $N=538$ (рис.6.8,б).

Таким чином, для подальшого розрахунку застосовано дискретну модель при $N=384$ (рис.6.7). Як видно з наведеного на рис.6.9,а розподілення інтенсивності нормальних напружень в поперечному перетині, в початковий момент часу максимальні напруження спостерігаються біля осі ротора (точка D).

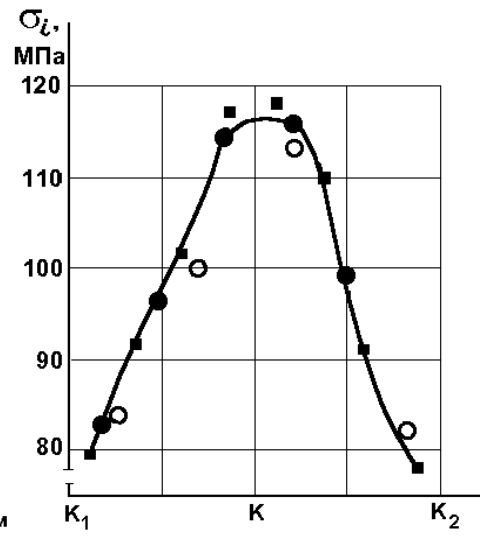
Для опису деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу використані наступні рівняння

$$\xi_i^c = A \left(\frac{\sigma_i}{1 - c\omega} \right)^n t^m, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = B \left[\frac{(1 - \alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_1}{1 - \omega} \right]^\varphi, \quad (6.2)$$

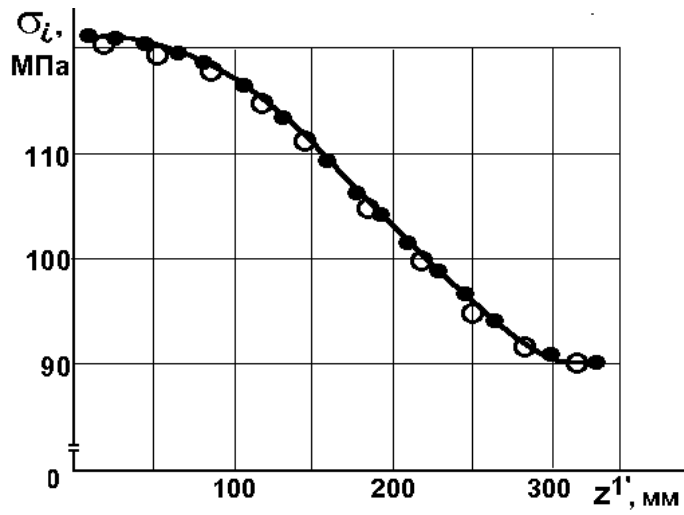
де $A=3.523 \cdot 10^{-21}$ МПа⁻ⁿгод^{-m-1}, $c=0.7$, $n=6.51$, $m=-0.47$, $B=6.555 \cdot 10^{-19}$ МПа^{-φ}год⁻¹, $\alpha=0.7$, $\varphi = 4.23$ – константи матеріалу.



а)

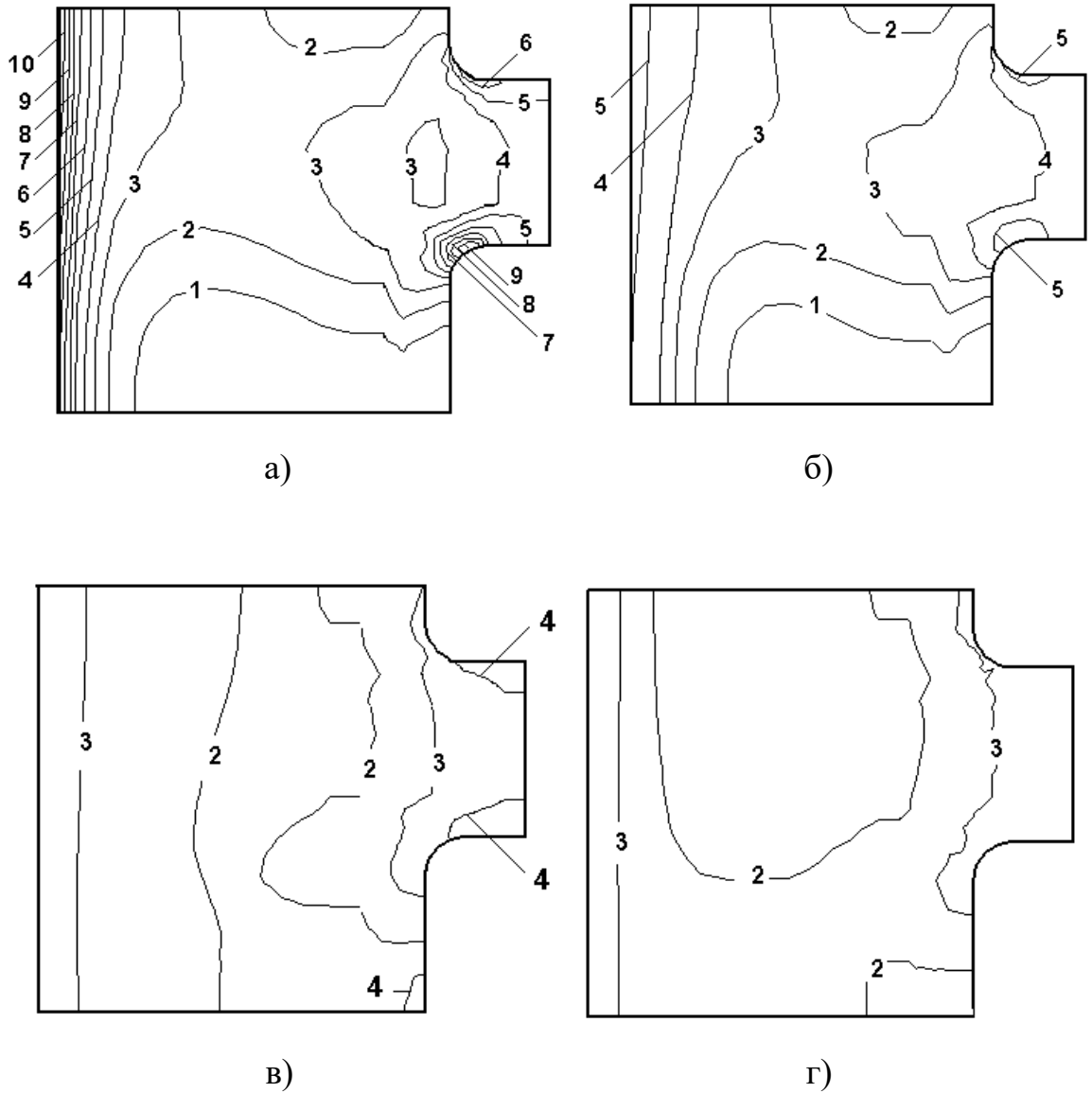


б)



в)

Рис.6.8.



σ_i , МПа: 1 – 7,75; 2 – 38,17; 3 – 48,59; 4 – 59,02; 5 – 69,44; 6 – 79,86;
7 – 90,29; 8 – 100,7; 9 – 111,1; 10 – 121,6

Рис. 6.9.

Дослідження збіжності в залежності від величини кроку за часом Δt проводилось шляхом контролювання похибки визначення величин ω в найбільш пошкодженій зоні по закінченні першої стадії невстановленої повзучості, на II стадії встановленої повзучості, а також за величиною часу до початку руйнування.

На першому етапі проведено моделювання деформування на протязі 98.4 годин після прикладення навантаження. До цього часу закінчується I стадія невстановленої повзучості, що встановлено за величиною $\partial\omega/\partial t$. Розрахунок проведений при змінному кроці за часом. Розглянуто три послідовності кроків (№№ 1–3), що поступово збільшуються від 0.04 до 15 год. в послідовності №1, від 0.02 до 10 год. в №2, і від 0.01 до 5 год. в №3. Дослідження проведено в точках D і K (рис.6.7), де спостерігаються локальні максимуми σ_i в початковий момент часу i , відповідно, максимуми значень ω на початковому етапі деформування. Дослідження збіжності розв'язку при повзучості в інтервалі 0 – 98.4 год наведені в табл.6.1. (величини ω – в чисельнику, похибка відносно до розв'язку, що отриманий при найменшому кроці за часом δ_ω , % – в знаменнику) похибка визначення пошкодженості для послідовності кроків №2 лежить в межах 2%.

Таблиця 6.1.

Час, год. →		7.4	98.4
точка	№№	$\omega, 10^{-4} / \delta_\omega, \%$	
D	1	0.0380 / 7.4	0.242 / 3.8
	2	0.0350 / 1.1	0.248 / 1.4
	3	0.0354 / –	0.252 / –
K	1	0.0339 / 16.0	0.275 / 4.5
	2	0.0399 / 1.8	0.282 / 1.7
	3	0.0407 / –	0.287 / –

При подальшому моделюванні деформування на II стадії повзучості (від 98.4 до 21 100 годин) крок за часом було послідовно збільшено до $\Delta t=250, 500, 1000$ і 2000 год. Як видно з наведених в табл.6.3 величин ω в точці її найбільших значень на радіусі А-А і відповідні похибки δ_ω , обчислених відносно до розв'язку, отриманого при $\Delta t=250$ год., лежать в межах 2%.

Розв'язання задачі до початку руйнування проводилось із $\Delta t = 2000, 1000, 500, 250$ год., а також із поступовим зменшенням кроку за часом від 2000 до 50 год. на інтервалі від 100 000 год. Отримані значення часу до початку руйнування ($t_{\text{руйн.}}$, табл.6.2) свідчать, що результат, як у випадку застосування змінного кроку за часом, так і для постійних кроків ($\Delta t = 500, 1000$) збігається з похибкою в межах 2%.

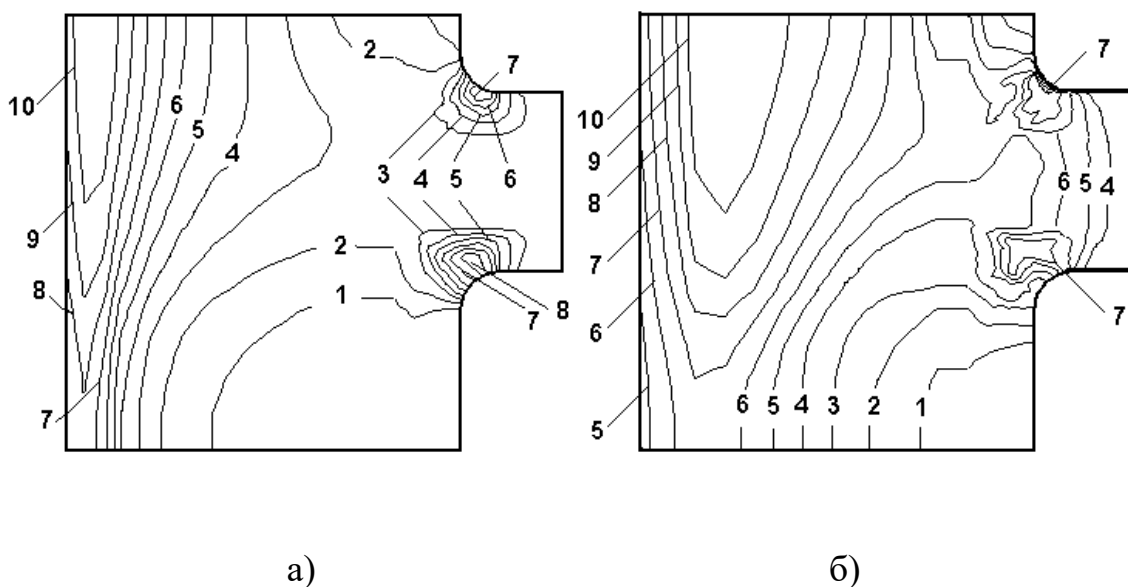
Таблиця 6.2.

t, год	8600	21100	$t_{\text{руйн.}}, \text{ГОД.} / \delta_{t_{\text{руйн.}}}, \%$
$\Delta t_{\text{max}}, \text{ГОД}$	$\omega / \delta_{\omega}, \%$		
2000	–	0.04138 / 2.2	127 100 / 6.27
1000	0.01763 / 1.56	0.04194 / 2.28	122 100 / 2.09
500	0.01783 / 0.44	0.04264 / 0.65	121 100 / 1.25
250	0.01791 / –	0.04292 / –	119 600 / –
2000....5000	–	–	117 600 / 1.67

В якості величини розрахункового ресурсу прийнято значення 117600 год., отримане при змінному кроці за часом із припущенням величини похибки визначення ресурсу в запас.

Отримані результати дозволяють спостерігати еволюцію напружено-деформованого стану ротора на протязі всього процесу деформування – змінення в часі розподілення інтенсивності нормальних напружень і параметру пошкоженості (рис.6.9 – 6.12). Як видно з ізоліній розподілення σ_i , рис.6.9, в момент $t = 0$ зона максимальних напружень розташована на внутрішній поверхні диску (рис.6.9,а). З часом, внаслідок розвинення деформацій повзучості, відбувається зменшення максимальних значень і перерозподіл напружень: так, на момент часу $t = 21\ 100$ год. максимальні напруження зменшилися вдвічі (рис.6.9,б), а в момент, попереджуючий початок руйнування ($t = 117\ 600$ год., рис.6.9,в) напружено-деформований стан диску є досить однорідним.

Початкове розташування зони максимальних значень пошкоженості ω_{\max} відповідає розташуванню зони максимальних напружень (рис.6.10, а). З часом відбувається пересування зони ω_{\max} вздовж радіусу в напрямку від осі обертання. До моменту часу біля 21000 год. з початку деформування ця зона є досить великою і розташована всередині диска (рис.6.10, б).



$\omega \cdot 10^{-3}$ 1 – 0,03	2 – 0,06	3 – 0,09	ω : 1 – 0,006 , 2 – 0,012, 3 – 0,018
4 – 0,12, 5 – 0,15, 6 – 0,18			4 – 0,024, 5 – 0,030, 6 – 0,036,
7 – 0,21, 8 – 0,24, 9 – 0,27,			7 – 0,042, 8 – 0,048, 9 – 0,054,
10 – 0,30			10 – 0,060

Рис. 6.10.

На протязі залишку часу до початку руйнування значення пошкоженості в цій зоні є більшими, ніж в точках D і K, що відповідають максимумам пружних напружень (рис.6.11). Зона ω_{\max} локалізується в точці E, де в момент часу $t = 117600$ год. формується початкова зона руйнування (рис.6.12). Таким чином, в даному випадку руйнування розпочинається з середини диска.

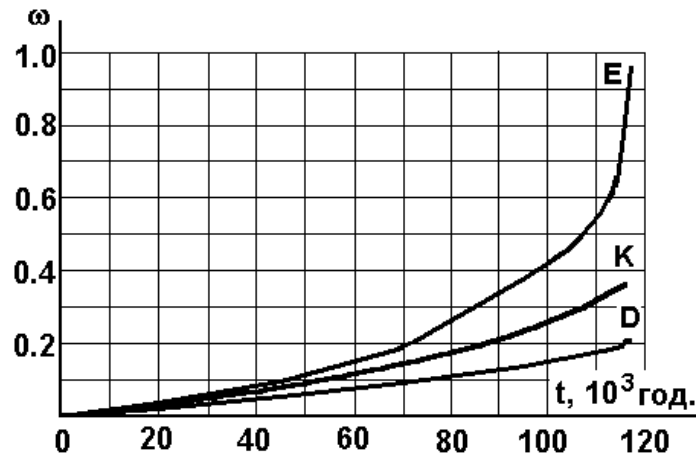


Рис.6.11

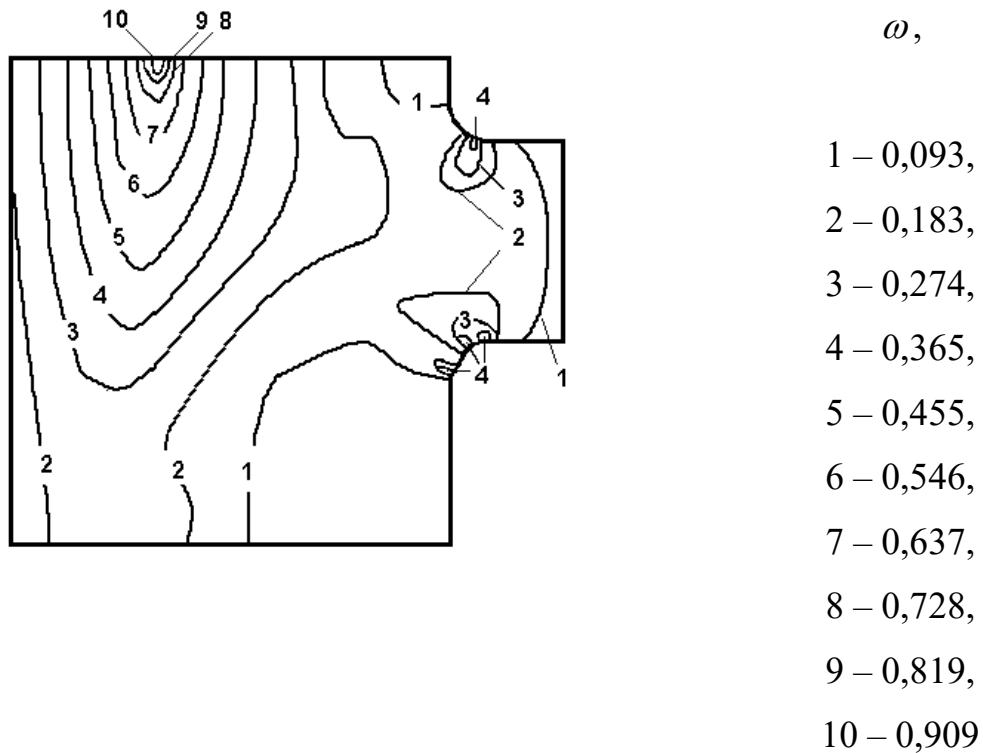


Рис. 6.12.

Наведені в роботі [81] результати експериментальних досліджень повзучості дисків, що обертаються, свідчать, що для дисків із різних сталей руйнування може розпочинатися з появи радіальних тріщин на торцевій поверхні диска як біля центрального отвору, так і посередині диска. Необхідно відзначити, що в цьому експериментальному дослідженні навантаження обиралися таким

чином, щоб забезпечити руйнування дисків в короткий термін (в межах 100-200 год.).

Проведення масштабних експериментальних досліджень процесу деформування елементів енергетичного обладнання на базах, що відповідають розрахунковим строкам експлуатації не є можливим. Як свідчать отримані при розв'язку цієї задачі результати, розроблена методика дає змогу проводити чисельне моделювання процесів деформування реальних елементів конструкцій на базах, що відповідають термінам їх експлуатації із урахуванням ефекту перерозподілення напружень і визначенням розташування початкових зон руйнування.

6.3 Дослідження впливу температурного навантаження на ресурс ялинкового з'єднання хвостовика лопатки з диском газотурбінної установки

Хвостовик є складовою частиною ялинкового з'єднання лопаток стаціонарних газотурбінних установок (ГТУ) і є одним із найбільш напружених і відповідальних елементів деталей, які використовуються в силових установках безпілотних літаючих апаратах, літаках, гвинтокрилах, кораблях військового і громадського призначення, приводів генераторів електростанцій, газоперекачуючих агрегатах, установок нафтохімічної і других галузей промисловості. З'єднання являє собою систему деформівних тіл і передає на диск усі навантаження, що впливають на лопатки (рис. 6.13).

Для розглянутих деталей характерним є тривале термосилове навантаження при високих температурах нерівномірно розподілених в просторі. У цих умовах вже з перших хвилин навантаження в конструкції виникають деформації повзучості, які значною мірою визначають розподілення напружень в деталі [27, 114], а внаслідок безперервних змін фізико-механічних властивостей матеріалу при високих температурах розрахунок на статичну міцність набуває вирішального значення [61].

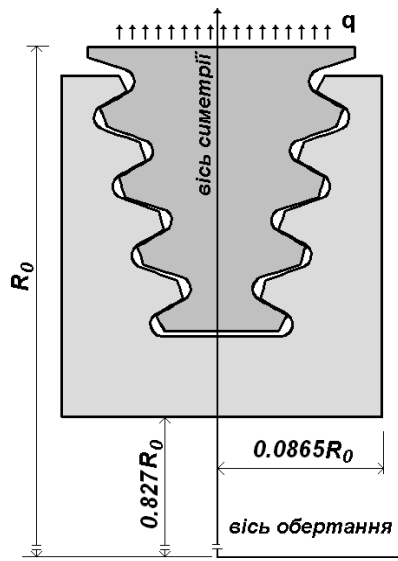


Рис. 6.13.

Для розрахунку хвостовиків використовуються інженерні методики які ґрунтуються на використанні приблизного закону розподілення навантаження між зубцями з'єднання і не враховують всього комплексу факторів (концентрація напружень, повзучість тощо), у зв'язку з цим розрахунки виконуються із використанням коефіцієнтів запасу $k = 2...3$ [46]. В той же час, внаслідок складної форми досліджуваного об'єкта, його напружено-деформований стан в площині поперечного перерізу відрізняється суттєвою неоднорідністю. При цьому, як показано в роботі [125] зменшення такої неоднорідності шляхом змінення величин зазорів між зубцями хвостовика та диску є практично неможливим. Детальний огляд розрахункових досліджень процесу деформування хвостовиків, який наведений в роботі [125], присвячений питанню урахування температурних напружень, нерівномірності розподілення напруження між зубцями з'єднання, деформуванню в умовах повзучості, показує, що дані дослідження ґрунтуються на застосуванні наближених розрахункових схем. Тому для визначення ресурсу хвостовика з урахуванням усіх можливих впливів коректно буде використовувати чисельні методики. Завдяки цьому можна більш точно описати складну геометрію об'єкта і застосувати складні закони стану матеріалу [125, 208] і, відповідно, більш точно визначити показники ресурсу.

Хвостовик лопатки (рис. 6.13) являє собою тіло із складною формою поперечного перерізу і, фактично однорідне в напрямку, перпендикулярному до площини поперечного перерізу.

Зважаючи на це, розрахунок хвостовика доцільно виконувати в двовимірній постановці. При роботі ГТУ найбільш значними статичними зусиллями, що виникають в лопатках турбін і передаються на хвостовик є відцентрові зусилля розтягу від лопатки [61, 114, 208], розподілення яких вздовж поверхні хвостовика є майже сталим. Відома низка результатів чисельних досліджень процесу деформування хвостовиків лопаток, що проведені у двовимірній постановці [11, 27, 49, 61, 125, 136, 208], в просторовій постановці відомі лише окремі результати дослідження пружного деформування [212]. В роботі [11] зубці завантажувалися однаковими зусиллями, рівномірно розподілені по висоті робочої грані. У роботах [27, 125] при розгляді повзучості не враховано накопичення пошкодженості і не визначений час до руйнування деталі. У роботі [185] запропоновано розглядати з'єднання – фрагмент обода диска з хвостовиком як систему деформівних тіл, але не досліджено еволюцію напружено-деформованого стану в умовах повзучості. У роботі [125] розв'язано задачу про деформування з'єднання в умовах повзучості: розрахунок проведений із урахуванням пошкодженості матеріалу, час до початку руйнування визначений на основі екстраполяції результату моделювання процесу накопичення пошкодженості на окремому проміжку часу на весь період роботи деталі.

В усіх вище згаданих роботах обчислення ресурсу хвостовика виконувалось без урахування геометричної нелінійності. В зв'язку з чим необхідним є дослідження впливу урахування геометрично нелінійного деформування на величину розрахункового ресурсу хвостовика стаціонарної газової турбіни в умовах повзучості.

Розрахунок хвостовика проведений в двовимірній постановці для середнього перетину хвостовика під впливом рівномірно розподіленого розтягуючого навантаження інтенсивністю q в напрямку осі z' , що відповідає дії

відцентрових сил пера лопатки. Величина q являє собою відношення рівнодіючої відцентрових сил в кореновому перерізі пера лопатки до площі її прикладання. Зубці хвостовика спираються на відповідні до них вирізи в ободі диска, які деформуються. Таким чином, вздовж поверхонь сполучення зубців хвостовика із диском реалізуються граничні умови у вигляді пружних опор. Розв'язання задачі про деформування хвостовика в такій постановці потребує наявності інформації про жорсткість зубців диска турбіни. В той же час, для моделювання таких умов обпирання пружні опори доцільно замінити зустрічною деталлю, що за геометрією та умовами роботи відповідає фрагменту обода диска турбіни. Хвостовик із зустрічною деталлю утворюють ялинкове з'єднання.

Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного МСЕ засвідчили, що напружено-деформований стан лопатки є суттєво неоднорідним як по висоті, так і в межах поперечних перерізів. В роботі [18, 19] розглянуто питання можливості фрагментації лопатки і застосування напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для визначення напружено-деформованого стану неоднорідних просторових призматичних тіл змінної геометрії. На основі цих результатів було обрано небезпечний поперечний переріз лопатки R_0 , комбінація усередненого напруження σ_0 і усередненої температури T_0 в якому призводить до найбільш інтенсивного накопичення деформацій повзучості. Обране напруження σ_0 , так як в роботі [19] для лопатки і в роботі [18] для хвостовика буде використовуватись в даній роботі для опису вихідних даних і представлення результатів дослідження напружено-деформованого стану хвостовика.

Внаслідок симетрії при розрахунку розглядалася половина поперечного перетину об'єкта (рис. 6.14). Без урахування геометричної нелінійності цей об'єкт було розглянуто в роботі [18].

При побудові СЕ сітки використана концепція багатофрагментності. Граничні умови визначено з умов симетрії та закріплення в радіальному

напрямку: $u^1(z^1 = 0) = 0$, $u^2(z^2 = 0) = 0$, $u^2(z^2 = 0,066R_0) = 0$. Частина поперечного перерізу в межах яких сітка є регулярною – фрагменти позначені на (рис.6.14,а) цифрами в кружках. Дослідження збіжності отримуваних результатів в залежності від кількості невідомих скінченоелементної моделі проведено шляхом співставлення розподілів безрозмірної інтенсивності напружень [18] для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596. Похибка визначення напружень при пружному деформуванні становить біля 2%. Тому в подальшому використовуємо сітку кількістю невідомих з 3344 (рис. 6.14,б).

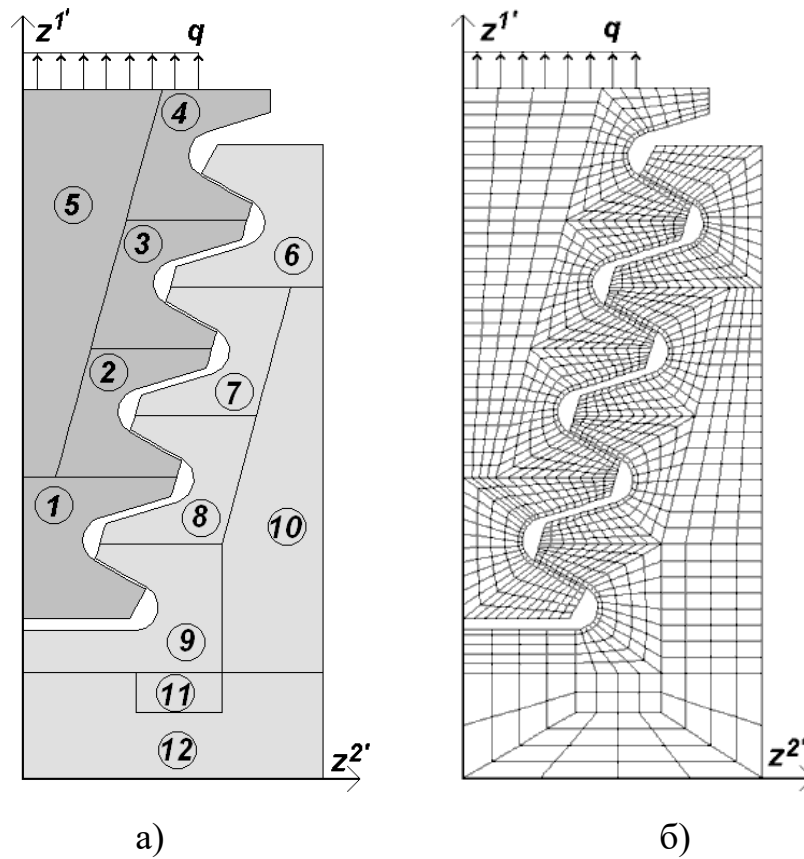


Рис. 6.14.

Для опису деформування матеріалу в умовах повзучості застосовано рівняння:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \quad (6.3)$$

де $B = B(T)$, $C = C(T)$, $m = m(T)$, $n = n(T)$, $r = r(T)$, $q = q(\sigma, T)$ – константи матеріалу, T – температура, ω – параметр пошкодженості Качанова-Работнова, t – час, ε_c – інтенсивність деформацій повзучості, σ – інтенсивність нормальних напружень, $\sigma_e = \sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ – еквівалентне напруження [9].

Отримане розподілення безрозмірної інтенсивності напружень наведено на рис. 6.15.

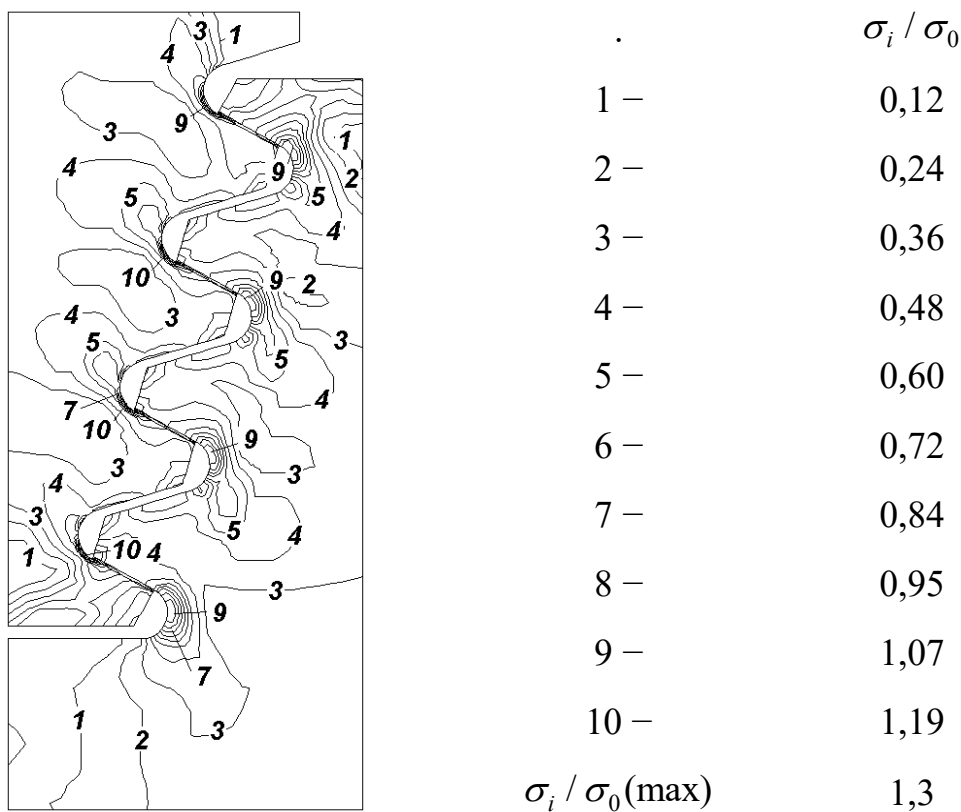


Рис. 6.15.

Порівняно з роботою [18] також досліджувалася збіжність при квазірегулярному згущенні в фрагменті 1, де виникають максимальні напруження. Згущення виконувалось в такій послідовності: по радіусу 9 елементів (рис. 6.16,а), по радіусу 13 елементів (рис. 6.16,б). В останньому варіанті в місці концентрації напружень, характерні розміри SE в напрямку z^1 суттєво перевищували розміри

в напрямку z^2 в зв'язку з цим проведене згущення в коловому напрямку вздовж галтелі (рис. 6.16,в).

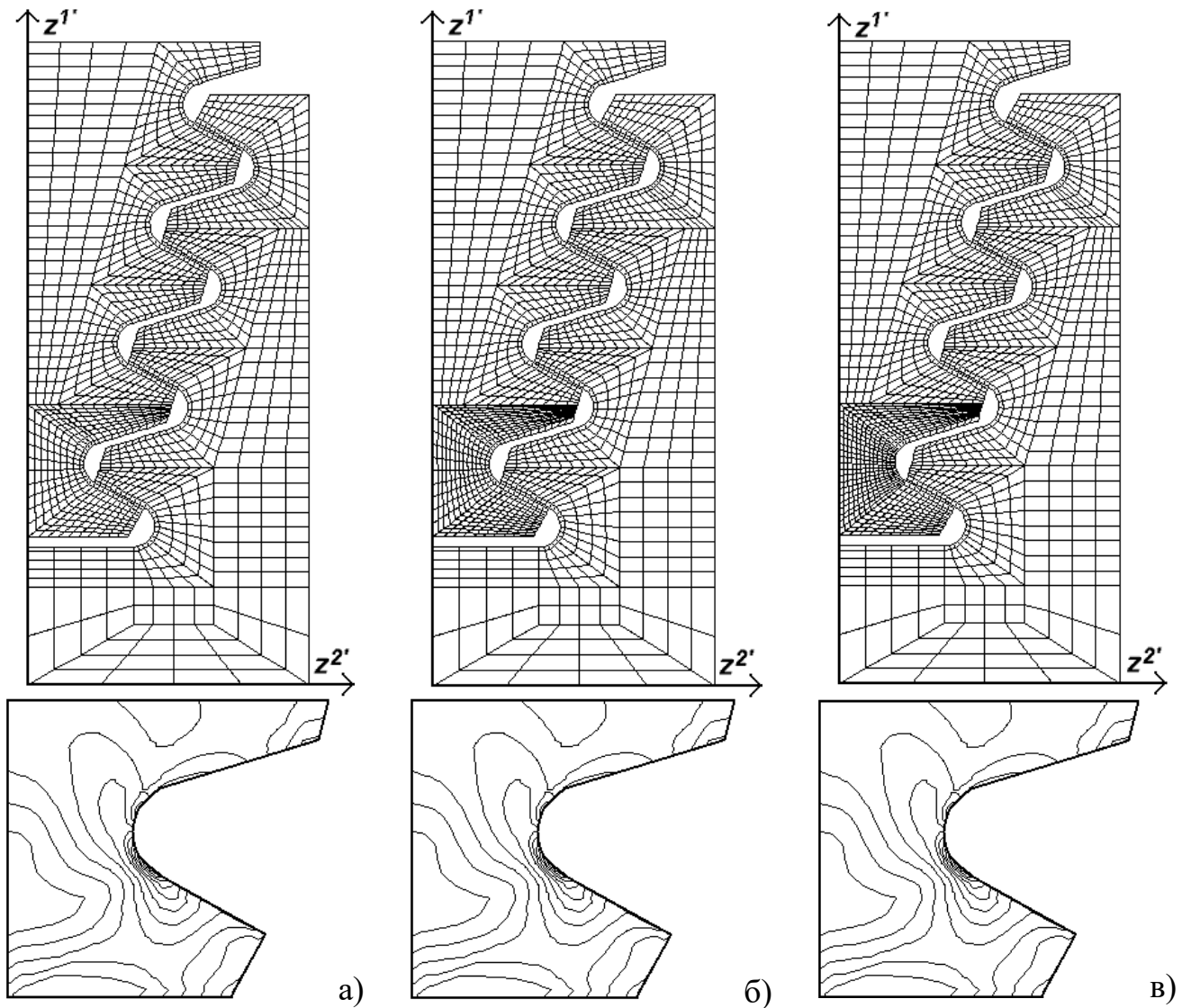


Рис. 6.16.

Розподілення безрозмірної інтенсивності напружень для трьох дискретних моделей є однаковим.

Для більш детального аналізу збіжності результатів було досліджено розподілення безрозмірної інтенсивності напружень хвостовика вздовж радіусів 1, 2, 3, 4 галтелей (рис. 6.17), та по дузі тих самих галтелей (рис. 6.18), що проходить через точку максимальних напружень.

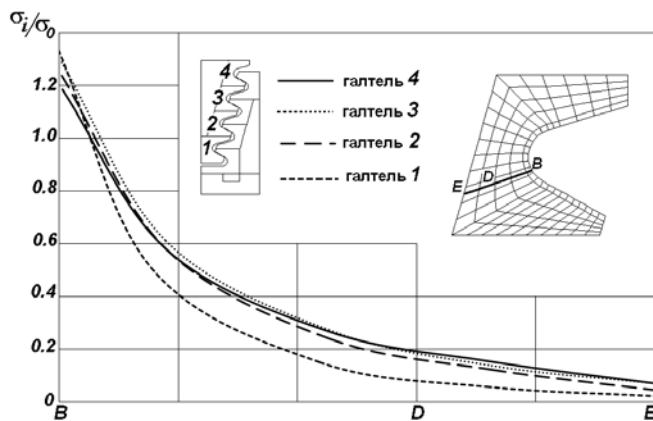


Рис. 6.17.

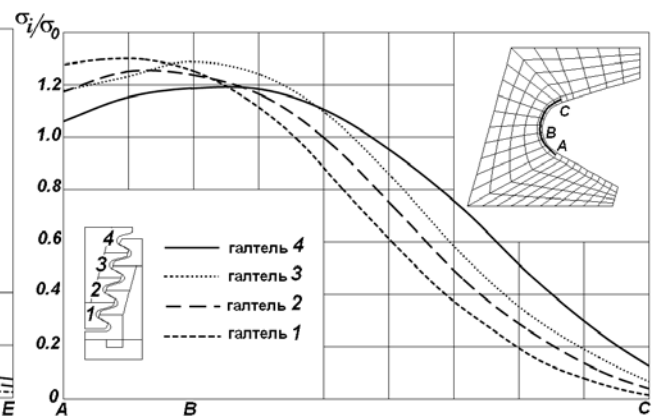


Рис. 6.18.

В роботі [18] показані результати, отримані при застосуванні скінченоелементних моделей з кількістю невідомих 3344 та 9596, які майже повністю співпали між собою (похибка менше 1%), в той же час на сітці з кількістю невідомих 1074 отримані максимальні напруження є меншими майже на 10%. Розподілення інтенсивності напружень показано на рис. 6.19 по дузі галтелі, що проходить через точки виникнення максимальних напружень фрагмента 1 та на рис. 6.20 по радіусу галтелі. В подальшому досліджувався вплив геометричної нелінійності в умовах повзучості на напружено-деформований стан об'єкту та величину основного ресурсу хвостовика.

На другому етапі розв'язання даної задачі проведено дослідження впливу неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану. Зміна температури по висоті поперечного перерізу хвостовика лопатки описується лінійним законом, максимальні і мінімальні значення лежать в межах $\pm 0.5\%$ від значення температури в перерізі, що знаходиться на відстані $0,9345R_0$ від осі обертання диска.

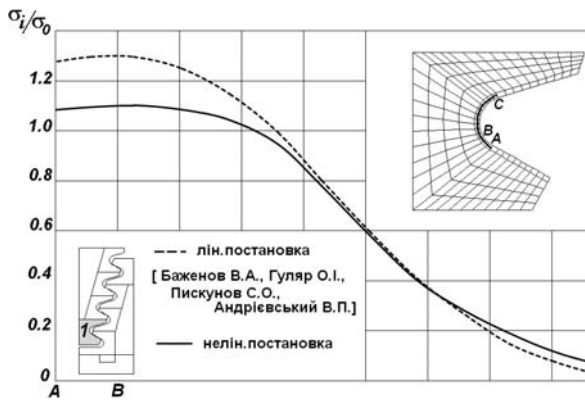


Рис. 6.19.

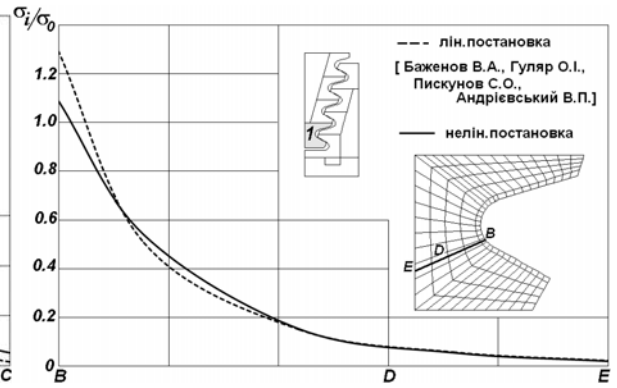


Рис. 6.20.

В першу чергу для більш детального аналізу впливу температурного поля було досліджено відмінності розподілення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 6.21) та пошкодженості (рис. 6.22) на протязі усього часу експлуатації в точці, де виникають максимальні напруження з урахуванням ($T \neq const$) і без урахування ($T = const$) неоднорідного температурного поля [72, 287]. Також був проведений аналіз розподілення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 6.23) та пошкодженості (рис. 6.24) вздовж галтелі в області виникнення максимальних напружень.

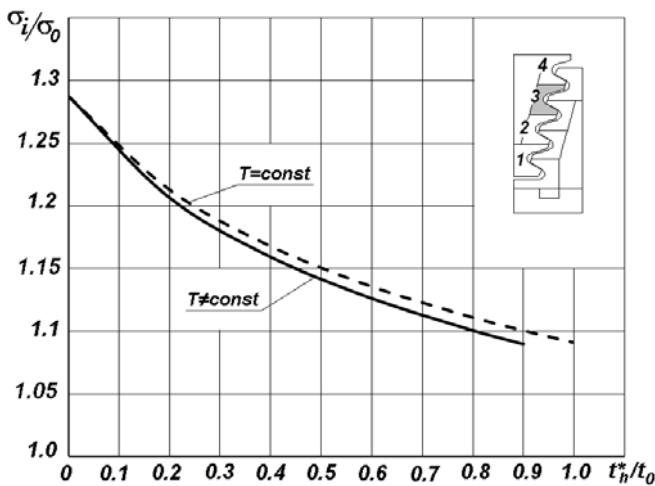


Рис. 6.21.

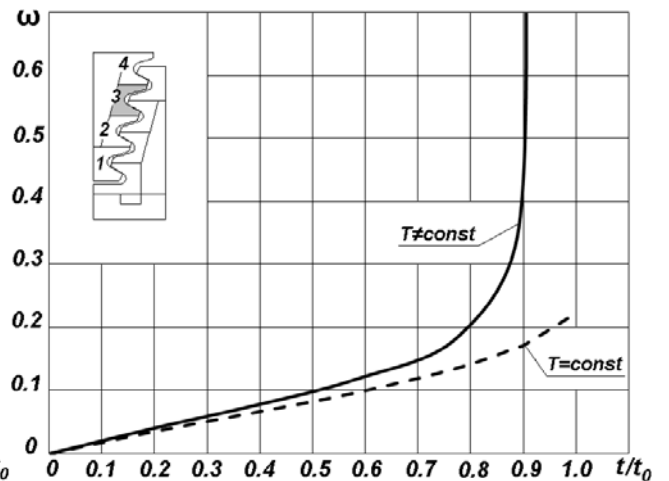


Рис. 6.22.

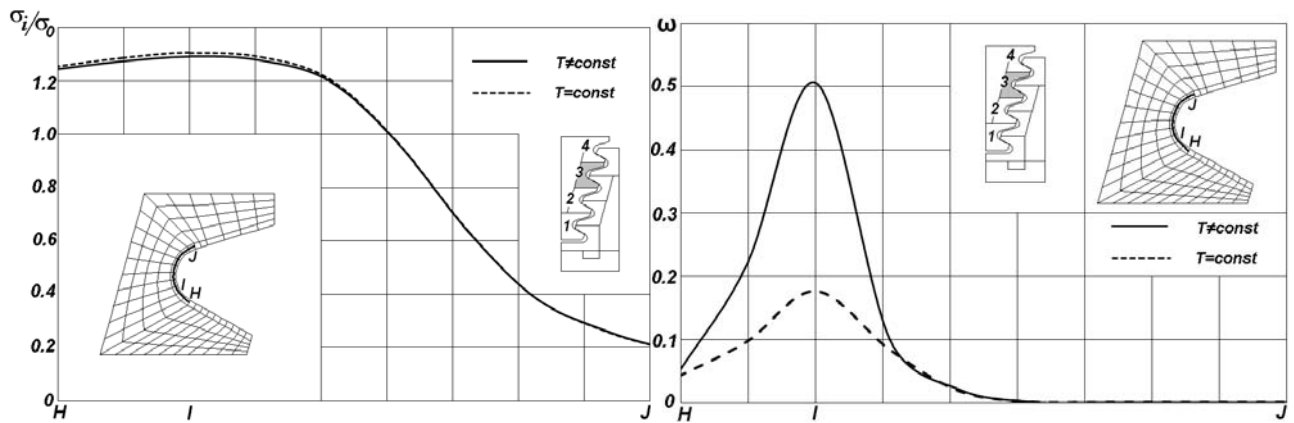


Рис. 6.23.

Рис. 6.24.

При проведенні розрахунку передбачалось, що внаслідок малих розмірів хвостовика по висоті вплив температурних деформацій на напружено-деформований стан є незначним. Це підтверджується результатами, наведеними в роботі [18]. В той же час залежність констант рівнянь (6.3) від температури приводить до суттєвих відмінностей в перебігу процесу повзучості при урахуванні неоднорідного розподілу температури, що призводить до зміни ресурсу. Для даного розподілення температури значення розрахункового ресурсу становить $t_T=0,91t_0$ [18], тобто наявність залежності констант матеріалу від температури може зменшити величину ресурсу в межах 10% .

Таким чином, можна констатувати ефективність і широкі можливості розробленої методики для розв'язання задач із визначення несучої здатності відповідальних об'єктів техніки при високому рівні достовірності результатів.

РОЗДІЛ 7. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МССЕ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ І ФОРМОЗМІНЕННЯ

Визначення напружено-деформованого стану широкого кола вісесиметричних тонкостінних, масивних і комбінованих конструкцій складної структури в екстремальних режимах навантаження і при моделюванні складних технологічних процесів таких, наприклад, як обробка металів тисненням, потребує створення ефективного апарату чисельних досліджень використання нелінійних співвідношень між переміщеннями і деформаціями. Це призводить до необхідності створення нових типів скінченних елементів і отримання відповідних співвідношень для обчислення коефіцієнтів матриць жорсткості і вузлових реакцій. Наявність двох типів нелінійності і необхідність дослідження закритичної поведінки об'єктів після втрати стійкості потребує розробки узагальнених алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь. Крім того при змінних граничних умовах необхідна розробка підходів до їх врахування, а також відповідної організації обчислювального процесу визначення температурних полів в задачах суттєвого формозмінення.

7.1. Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості

Математичне моделювання стійкості, закритичної поведінки і формозмінення тіл обертання здійснюється на основі фізично і геометрично нелінійної постановки вісесиметричної задачі термов'язкопружнопластичності. Прийнято, що матеріал відповідає моделі ізотропного середовища при малих пружних і великих незворотних деформаціях [129].

Вісесиметричні масивні, тонкостінні і комбіновані об'єкти розглядаються в базисній початковій відліковій системі координат [120,121]. Суттєва зміна первісної геометрії тіла при формозмінненні обумовлює необхідність використовувати, окрім початкової, ще актуальну конфігурацію, вектори місця і метричні тензори яких визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}(z', t_0), & g_{ij} &= \bar{r}_{,i} \bar{r}_{,j}, & \bar{r}_{,i} &= \frac{\partial}{\partial z^i} \bar{r}, \\ \bar{R} &= \bar{R}(Z', t), & G_{ij} &= \bar{R}_{,i} \bar{R}_{,j}, & \bar{R}_{,i} &= \frac{\partial}{\partial Z^i} \bar{r}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

Тут і в подальшому великі латинські літери застосовуються при визначенні параметрів актуальної конфігурації, малі – початкової.

Представляючи вектор місця деякої точки актуальної конфігурації, як суму вектора місця початкової конфігурації і вектора переміщень \bar{u} , приходимо до виразів метричного тензора актуальної конфігурації:

$$G_{ij} = (\bar{r}_{,i} + \bar{u}_{,i})(\bar{r}_{,j} + \bar{u}_{,j}) = \bar{r}_{,i} \bar{r}_{,j} + \bar{r}_{,j} \bar{u}_{,i} + \bar{r}_{,i} \bar{u}_{,j} + \bar{u}_{,i} \bar{u}_{,j} = g_{ij} + \Delta G_{ij} \quad (7.2)$$

де

$$\Delta G_{ij} = \bar{r}_{,j} \bar{u}_{,i} + \bar{r}_{,i} \bar{u}_{,j} + \bar{u}_{,i} \bar{u}_{,j} \quad (7.3)$$

Тензор деформацій в актуальній конфігурації визначається співвідношенням [121]:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\hat{F} - \hat{G}) \quad (7.4)$$

де $F^{ij} = g_o^{ij}$ – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензору g_o^{ij} , в початковій відрахунковій конфігурації, G^{ij} – компоненти метричного тензору в актуальній конфігурації.

Для опису напруженого стану об'єкта використовується тензор істинних напружень Коші $\hat{\sigma}$.

При великих деформаціях можливі значні повороти частин конструкцій, які не повинні змінювати пружно-деформований стан тіла. В цьому випадку необхідно, щоб величини, які входять в визначальні співвідношення, задовольняли вимогам індиферентності. В зв'язку з цим в роботі використані тензор напружень Коші і міра деформацій Фінгера. Обидва тензора і їх інваріанти задовольняють властивості індиферентності [121].

При виборі мір деформацій і напружень враховано вимоги енергетичної сполученості. Як показано в роботі [112], міри Фінгера і Коші являються енергетично сполученими, на відміну наприклад від мір Генкі і Коші.

Матеріальні похідні по часу від тензора деформацій (7.3) і тензора напружень Коші цим властивостям не відповідають, тому необхідно використовувати об'єктивні похідні.

В якості об'єктивної похідної використовується похідна типу Олдройда [182]. Вибір об'єктивної похідної для прийнятої моделі матеріалу при малих пружних і великих незворотних деформаціях, як показано в роботі [112], може бути довільним і зроблений виходячи із зручності побудови обчислювального процесу. До переваг похідної Олдройда потрібно також віднести відсутність осциляцій при чистому зсуві, що характерно для похідної Яумана.

Для математичного обґрунтування об'єктивності використання формулювань законів стану, а також для побудови крокового процесу вирішення еволюційних задач формозмінення додатково вводиться проміжна відлікова конфігурація тіла, відповідна моменту часу \tilde{t} , достатньо близькою до t актуальної конфігурації:

$$t = \tilde{t} + \Delta t \quad (7.5)$$

Графічне зображення вектора місця трьох використовуваних конфігурацій (початкова, проміжна, актуальна) представлено на рис.7.1.

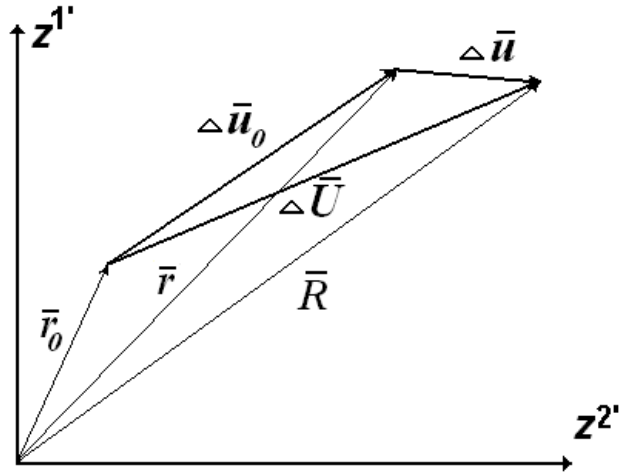


Рис.7.1

Прирошення Δt вибирається таким чином, щоб приращення компонент метричного тензора при переході від проміжної відлікової конфігурації до актуальної були малі в порівнянні з G_{ij} .

$$\begin{aligned} \Delta \hat{G} &= \hat{G} - \hat{g}, \\ \Delta G_{ij} &\ll G_{ij} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Використовуючи проміжну відлікову конфігурацію, тензор деформацій можна представити наступним чином:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\hat{F} - \hat{g} - \hat{G}) = \hat{\varepsilon} + \Delta \hat{\varepsilon}, \quad (7.7)$$

де

$$\hat{\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\hat{F} - \hat{g}), \quad \Delta \hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\Delta \hat{G}. \quad (7.8)$$

Приймаючи швидкість деформації в якості похідної Олдройда від тензора (7.3), покажемо об'єктивність тензора приросту деформацій при переході від проміжної відлікової до актуальної конфігурації:

$$\Delta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol} \Delta t \quad (7.9)$$

де

$$\hat{\varepsilon}^{ol} = \frac{1}{2} \left[\dot{\hat{F}} - \dot{\hat{G}} - \nabla \bar{v}^T (\hat{F} - \hat{G}) - (\hat{F} - \hat{G}) \nabla \bar{v} \right] = \frac{1}{2} (\dot{\hat{G}} + \nabla \hat{G}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} \quad (7.10)$$

Аналогічно (7.7) представимо напруження в актуальній конфігурації:

$$\hat{\sigma} = \hat{\tilde{\sigma}} + \Delta \hat{\sigma}, \quad (7.11)$$

де

$$\hat{\tilde{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad \Delta \tilde{\sigma} = \Delta \sigma^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j, \quad \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j. \quad (7.12)$$

Якщо всі величини в (7.12) віднести до актуальної конфігурації, то отримаємо:

$$\hat{\sigma} = \hat{\tilde{\sigma}} + \Delta \hat{\sigma}, \quad \hat{\tilde{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j. \quad (7.13)$$

Виходячи з (7.12), $\Delta\hat{\sigma}$ представляє собою добуток матеріальної похідної $\dot{\hat{\sigma}}$ на приріст часу Δt :

$$\dot{\hat{\sigma}}\Delta t = \hat{\sigma} + \hat{\hat{\sigma}}. \quad (7.14)$$

Приріст напружень із (7.13) може бути записаний, як добуток об'єктивної похідної на Δt :

$$\hat{\sigma}^{ol}\Delta t = \hat{\sigma} + \hat{\hat{\sigma}}. \quad (7.15)$$

Використовуючи вирази (7.14) і (7.15), а також здійснюючи граничний перехід при $\Delta t \rightarrow 0$, приходимо до виду об'єктивної похідної, відповідно похідній Олдройда.

Таким чином, показана індиферентність тензора прирощення деформацій (7.12) і прирощення напружень (7.15), причому в обох випадках використана одна і та ж об'єктивна похідна. Представлення тензора приросту деформацій, як добуток похідної Олдройда на прирощення часу (7.9) дозволяє використовувати адитивний розклад, аналогічно прийнятому для швидкостей деформацій (7.4) і для їх прирощень.

7.2. Особливості визначення геометрично-нелінійних деформацій на основі МССЕ

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для проміжної відлікової і актуальної конфігурації відомі компоненти тензору перетворення $z_{,\beta}^{\alpha'}$, і $Z_{,\beta}^{\alpha'}$ відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}, \quad Z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X^{\beta}}. \quad (7.17)$$

Подамо компоненти метричного тензору g_{mn} для вісесиметричних тіл в місцевій проміжній відліковій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензору базисної кругової ортогональної циліндричної системи координат:

$$\begin{aligned} g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2 \\ g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{\nu'} z_{\beta}^{\nu'}, \quad g_{33} = (z^{2'})^2 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Аналогічно, в актуальній конфігурації:

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{\nu'} Z_{\beta}^{\nu'} \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (7.19)$$

Відповідно для плоско-деформованих тіл $g_{3'3'} = 1$, тоді в проміжній відліковій системі координат $g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{\nu'} z_{\beta}^{\nu'}$, а $g_{33} = 1$.

В актуальній конфігурації:

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{\nu'} Z_{\beta}^{\nu'} \quad G_{33} = 1. \quad (7.20)$$

Нове положення точки А в системі $z^{i'}$ визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'} \quad (7.21)$$

Диференціюючи по x^i , визначимо компоненти тензора перетворення в актуальній системі координат:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = z_{,\beta}^{\alpha'} + u_{,\beta}^{\alpha'}. \quad (7.22)$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора $G_{\alpha\beta}$ в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \left(z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} \right) \left(z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'} \right) = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} \\ G_{33} &= \left(z^{2'} + u^{2'} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Перепишемо (7.23) в вигляді :

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta}, \quad G_{33} = g_{33} + \Delta G_{33}, \quad (7.24)$$

де

$$\Delta G_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}, \quad \Delta G_{33} = \left(2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right) \quad (7.25)$$

Підставляючи (7.25) в (7.26), запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних компонент прирощення деформації в актуальній конфігурації відносно проміжної відлікової:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} \right), \quad \Delta \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right). \quad (7.26)$$

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} \right), \quad \Delta \hat{\varepsilon}_{33} = z^{2'} u^{2'}. \quad (7.27)$$

Коваріантні компоненти тензора прирощення нелінійних деформацій в актуальній конфігурації (7.26) можна співвідношеннями аналогічними за формулою з (7.27):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\bar{z}_{,\beta}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} \right), \quad \varepsilon_{33} = \bar{z}{}^{2'} u^{2'}. \quad (7.28)$$

де коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}{}^{v'} = z^{v'} + \frac{1}{2} u^{v'}, \quad \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} = z_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'}, \quad (7.29)$$

Можна показати, що вираз (7.30) тотожно дорівнює (7.26):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\left(z_{,\alpha}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}{}^{v'} \right) u_{,\beta}{}^{v'} + \left(z_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'} \right) u_{,\alpha}{}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} + u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} \right). \\ \varepsilon_{33} &= \left(z^{2'} + \frac{1}{2} u^{2'} \right) u^{2'}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Аналогічно можна представити варіації деформацій. Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (7.26):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}{}^{v'} \delta u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} \delta u_{,\alpha}{}^{v'} + 2 \delta u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} \right). \\ \delta(\Delta\varepsilon_{33}) &= \frac{1}{2} \left(2 z^{2'} \delta u^{2'} + 2 u^{2'} \delta u^{2'} \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (7.30) :

$$\delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\alpha}), \quad (7.32)$$

де

$$Z' = z' + u', \quad Z'_{,\beta} = z'_{,\beta} + u'_{,\beta}, \quad (7.33)$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \left((z'_{,\alpha} + u'_{,\alpha}) \delta u'_{,\beta} + (z'_{,\beta} + u'_{,\beta}) \delta u'_{,\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + u'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + u'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + 2u'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha}) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Варіаційне рівняння рівноваги в актуальній конфігурації має вигляд

$$\delta W - \delta A = 0 \quad (7.35)$$

де δA - варіація роботи зовнішніх сил, δW - варіація роботи внутрішніх сил

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_{x_1 x_2} \sigma^{ij} \delta G_{ij} \sqrt{G} dx^1 dx^2 \quad (7.36)$$

Представляючи G_{ij} враховуючи, що при варіюванні в актуальній конфігурації $\overline{g_{ij}}$ залишається незмінним, отримаємо:

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_{x_1 x_2} \sigma^{ij} \delta(\Delta G_{ij}) \sqrt{G} dx^1 dx^2 \quad (7.37)$$

Запишемо вираз варіації енергії СЕ в актуальній конфігурації через деформації:

$$\delta W = \iint_{x_1 x_2} \sigma^{ij} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \sqrt{G} dx^1 dx^2 \quad (7.38)$$

З даного виразу в подальшому можна отримати вектор вузлових реакцій, що визначається по значенням повних напружень в актуальній конфігурації і коефіцієнти матриці жорсткості СЕ в проміжній відліковій конфігурації.

7.3. Матриця жорсткості в проміжній відліковій конфігурації і рівняння рівноваги в актуальній конфігурації скінченного елемента з чисельним інтегруванням

Формула для визначення вузлових реакцій в актуальній конфігурації геометрично нелінійного СЕ загального типу (рис. 7.2) за формою збігається зі виразом для визначення вузлових реакцій у лінійній постановці

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \quad (7.39)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

В формулі (7.39) при визначенні напружень використовується матриця $[B]$, яка пов'язує переміщення і нелінійній деформації в актуальній конфігурації:

$$\left[\bar{B} \right]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 + (\bar{z}_{,12}^{\nu'} S_1 + 2\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} \bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 + (\bar{z}_{,12}^{\nu'} S_1 + 2\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_2 + \bar{z}_{,2}^{\nu'} S_1) & \frac{1}{4} (\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_2 + \bar{z}_{,2}^{\nu'} S_1) \\ \frac{1}{2} \bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 + (\bar{z}_{,12}^{\nu'} S_1 + 2\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} \bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 + (\bar{z}_{,12}^{\nu'} S_1 + 2\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} \bar{z}_{,1}^{\nu'} S_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{z}_{,1}^{\nu'} S_2}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + \bar{z}_{,2}^{\nu'} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

де $\bar{z}_{,1}^{\nu'}$, $\bar{z}_{,2}^{\nu'}$ - обчислюються по формулам (7.29).

Матриця $[B]$ в формулі (7.39) визначається за допомогою виразу:

$$\left[B \right]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} Z_{,1}^{\nu'} S_1 + (Z_{,12}^{\nu'} S_1 + 2Z_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} Z_{,1}^{\nu'} S_1 + (Z_{,12}^{\nu'} S_1 + 2Z_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (Z_{,1}^{\nu'} S_2 + Z_{,2}^{\nu'} S_1) & \frac{1}{4} (Z_{,1}^{\nu'} S_2 + Z_{,2}^{\nu'} S_1) \\ \frac{1}{2} Z_{,1}^{\nu'} S_1 + (Z_{,12}^{\nu'} S_1 + 2Z_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} Z_{,1}^{\nu'} S_1 + (Z_{,12}^{\nu'} S_1 + 2Z_{,1}^{\nu'} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} Z_{,1}^{\nu'} S_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{,1}^{\nu'} S_2}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + Z_{,2}^{\nu'} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

де $Z_{,1}^{\nu'}$, $Z_{,2}^{\nu'}$ - обчислюються по формулам (7.33).

Матриця жорсткості лінеаризованого СЕ загального типу обчислюється за формулою:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[b]^T [D] [b] \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)} \quad (7.42)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

$$[b]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z \, {}_1^1 S_1 + (z \, {}_{,12}^1 S_1 + 2z \, {}_{,1}^1 S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} z \, {}_1^2 S_1 + (z \, {}_{,12}^2 S_1 + 2z \, {}_{,1}^2 S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (z \, {}_{,1}^1 S_2 + z \, {}_{,2}^1 S_1) & \frac{1}{4} (z \, {}_{,1}^2 S_2 + z \, {}_{,2}^2 S_1) \\ \frac{1}{2} z \, {}_1^1 S_1 + (z \, {}_{,12}^1 S_1 + 2z \, {}_{,1}^1 S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} z \, {}_1^2 S_1 + (z \, {}_{,12}^2 S_1 + 2z \, {}_{,1}^2 S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} z \, {}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z \, {}^2}{2} u_{2'(S_1, S_2)} + z \, {}^2 u_{2'(S_1, S_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Матриця $[b]$ і $[D]$ обчислені в проміжній відліковій конфігурації.

7.4. Розрахункові співвідношення універсального скінченного елемента в актуальній конфігурації.

Вираз для варіації енергії деформації в матричній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta W &= \left(\delta \{u\}^T \left[\overset{\circ}{B} \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \\ &= \frac{1}{12} \left(\delta \{u\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \delta \{u\}^T \left\{ \overset{\circ}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{r} \right\} = \left[\left[\overset{\circ}{B} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} \quad (7.45)$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по величинам напружень.

Матриці $[B]$, $[B_1]$ і $[B_2]$ в (7.45) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 [B]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{Z}_{,1}^r S_1 & \frac{1}{2} \dot{Z}_{,1}^{2'} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(\dot{Z}_{,1}^r S_2 + \dot{Z}_{,2}^r S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(\dot{Z}_{,1}^{2'} S_2 + \dot{Z}_{,2}^{2'} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \dot{Z}_{,2}^r S_2 & \frac{1}{2} \dot{Z}_{,2}^{2'} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \dot{Z}^{2'} \end{bmatrix} \\
 [B_1]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\dot{Z}_{,12}^r S_2 + 2 \dot{Z}_{,2}^r S_1 S_2 \right) - \dot{Z}_{,2}^r S_2 \dot{H}_{22,1} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\dot{Z}_{,12}^{2'} S_2 + 2 \dot{Z}_{,2}^{2'} S_1 S_2 \right) - \dot{Z}_{,2}^{2'} S_2 \dot{H}_{22,1} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \dot{Z}_{,2}^{2'} S_1 + \dot{Z}_{,1}^{2'} + \dot{Z}^{2'} \dot{H}_{33,1} \right) \end{bmatrix} \\
 [B_2]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\dot{Z}_{,12}^r S_1 + 2 \dot{Z}_{,1}^r S_1 S_2 \right) - \dot{Z}_{,1}^r S_1 \dot{H}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\dot{Z}_{,12}^{2'} S_1 + 2 \dot{Z}_{,2}^{2'} S_1 S_2 \right) - \dot{Z}_{,1}^{2'} S_2 \dot{H}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \dot{Z}_{,2}^{2'} S_2 + \dot{Z}_{,2}^{2'} + \dot{Z}^{2'} \dot{H}_{33,2} \right) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

де

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{\dot{G}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}}{\dot{G}_{\alpha(\alpha)}}, & \dot{G}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial G_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^\beta=0}, \\
 \dot{H}_{33, \alpha} &= \frac{\dot{G}_{33, \alpha}}{\dot{G}_{33}}, & \dot{G}_{33, \alpha} &= \left. \frac{\partial G_{33}}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\beta=0}, & \dot{G}_{33} &= G_{33} \Big|_{x^\beta=0}, \\
 \dot{G}_{(\alpha)\beta, \alpha} &= \dot{Z}_{, \alpha}^{v'} \dot{Z}_{, \beta(\alpha)}^{v'}.
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Наведені співвідношення дозволяють з єдиних позицій здійснювати побудову дискретних моделей для комбінованих об'єктів, що складаються зі масивних і тонкостінних фрагментів.

7.5. Алгоритм розв'язання задач нелінійного деформування стійкості та закритичної поведінки вісесиметричних тіл.

Як було зазначено у розділі 2 для розв'язання нелінійних задач у даній роботі використовується комбінований алгоритм, що поєднує інтегрування по параметру з методом Ньютона-Кантаровича на одному кроці m значення параметра спуску λ [127].

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \left[K^* \right]_m^{-1} \left(\{Q\}^m - \{R\}_n^m \right) \quad (7.48)$$

де $\{u\}_n^m$ - приращення переміщень на ітерації n кроку m ; $[K^*]_m$ – лінеаризована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відліковій конфігурації x_m^α з використанням тензора миттєвих жорсткостей пружнопластичного матеріалу і координат вузлів дискретної моделі x_m^α ; $\{Q\}^m, \{R\}_n^m$ – вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації X_m^α .

Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням, як фізичної так і геометричної нелінійності на основі повних напружень, що дозволяє уникнути вказаної вище проблеми накопичення похибки.

Обчислення здійснюються до виконання умови, ідентичної до (2.114):

$$\|\{Q\}^m\| - \|\{R\}_n^m\| \leq \zeta \|\{Q\}^m\|, \quad (7.49)$$

Початкове значення вектора переміщень на першій ітерації кроку m екстраполюється за значенням вектора $\{u_{m-1}\}$ і прирощень параметра $\Delta\lambda_{m-1}$ і $\Delta\lambda_m$:

$$\{u_m\} = \frac{\{u_{m-1}\}\Delta\lambda_m}{\Delta\lambda_{m-1}}. \quad (7.50)$$

Після цього розпочинається ітераційний процес розв'язання системи нелінійних рівнянь, закінчення якого визначається умовою (7.49).

За обчисленим в результаті розв'язку системи нелінійних рівнянь значенням прирощення вектора $\{u_m\}$ визначаються прирощення фізичних напружень $(\Delta\tilde{\sigma}^{ij})_m$:

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_m = (\tilde{\sigma}^{ij})_{m-1} + (\Delta\tilde{\sigma}^{ij})_m, \quad (7.51)$$

та виконується перерахунок базисних координат всіх вузлів сіткової області за формулою:

$$z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + u_m^\alpha. \quad (7.52)$$

Якщо умова (7.49) не виконана, то визначається нове прирощення параметра і виконується наступний крок чисельного інтегрування.

В якості параметра може застосовуватися як інтенсивність навантаження, так і величина переміщення деякого вузла сіткової області. Використання двох параметрів спуску дозволяє отримувати всю криву навантаження-прогин при неоднозначності функцій $q(u)$ або $u(q)$.

Ефективність розглянутого алгоритму досліджувалася шляхом порівняння з інтегруванням на одному кроці методом Ньютона-Раффсона і методом однокрокової корекції по Ньютону-Раффсону.

Розглянута затиснена по контуру сферична панель під дією поперечного навантаження (рис. 7.2,а). Поведінка алгоритмів вивчалась на відрізку кривої $\frac{w}{h}(q)$ в межах від 0 до $\frac{w}{h} = 0.7$, де w - переміщення в центрі панелі, h - товщина оболонки.

Результати порівняння представлені на рис. 7.2,б у вигляді графіків, що відображають залежність часу розв'язку задачі від величини приросту параметра навантаження λ_q або іншими словами від величини кроку інтегрування.

Крок інтегрування приймається рівномірним і визначається за формулою:

$$\lambda_q = \frac{q_{(0.7)}}{m} \quad (7.53)$$

де $q_{(0.7)}$ - інтенсивність рівномірного навантаження, відповідна $\frac{w}{h} = 0.7$, m - число кроків інтегрування.

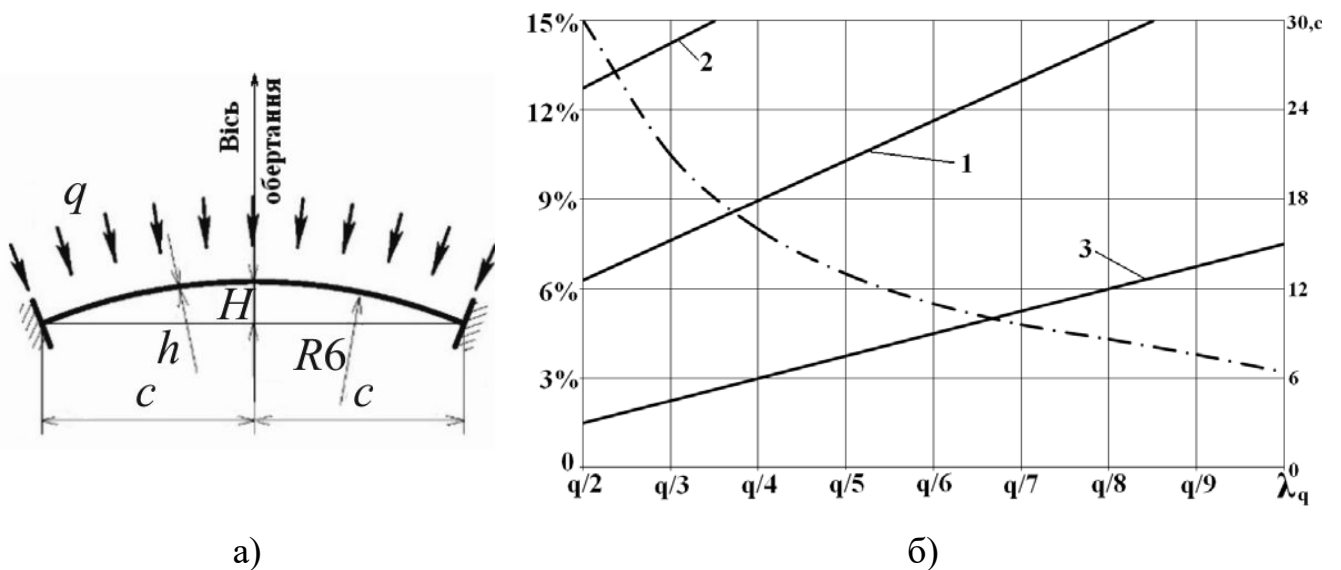


Рис. 7.2.

На графіку цифрою 1 позначена залежність часу розв'язання задачі від кроку інтегрування відповідно до формули (7.48), цифрою 2 - інтегрування на одному кроці методом Ньютона-Рафсона, 3 - методом одно-крокової корекції по Ньютону-Рафсону. Крім того, на рис.7.2,б штрих-пунктирною лінією позначена крива, що відображає точність визначення переміщення в центрі панелі від величини приросту параметра при однокроковій корекції.

Точність розв'язку, отриманого ітераційними алгоритмами, не залежить від величини кроку інтегрування і визначається величиною параметра ζ . Наведені результати отримані при $\zeta = 10^{-2}$ і відрізняються від еталонного рішення, отриманого при $\zeta = 10^{-6}$ менш ніж на 0,1%. У цій задачі залежність часу розв'язання різними алгоритмами від кількості кроків інтегрування виявилася практично лінійною.

Найменша витрата часу на одне прирощення параметра інтегрування відповідає методу однокрокової корекції, однак, точність розв'язання цим алгоритмом істотно залежить від величини приросту параметра. Дещо більша точність (на 2-3%) в розглянутому прикладі може бути отримана за рахунок застосування спуску по параметру переміщення, проте відсутність контролю за точністю розв'язання обмежує можливість використання цього методу. При підвищенні точності за рахунок зменшення кроку інтегрування збільшується загальний час розв'язання задачі і в цьому випадку ітераційні алгоритми виявляються ефективнішими. Особливо помітно це проявляється на ділянках кривої навантаження - прогин поблизу точок перегину, де різко зростає накопичення похибки.

Аналізуючи наведені результати можна зазначити, що застосування ітераційних алгоритмів найбільш сприятливо при максимальній величині кроку інтегрування. По витраті машинного часу переважним виявився алгоритм, заснований на використанні методу Ньютона-Кантаровича. Так, на розв'язання задачі цим алгоритмом потрібно майже в 2 рази менше часу, ніж методом

Ньютона-Рафсона, при одних і тих самих параметрах спуску. Отримані дані дозволяють обґрунтувати застосування алгоритму заснований на використанні методу Ньютона-Кантаровича, який забезпечує оптимальну відповідність між обчислювальними витратами і точністю розв'язання для розглянутого кола задач.

7.6. Алгоритм розв'язання контактної задачі зі змінними граничними умовами

Моделювання взаємодії деформованих об'єктів зі жорсткою перегородкою потребує виконання умов не проникнення і ковзання контактних поверхонь. До таких випадків відносяться задачі, пов'язані зі моделюванням процесів формозмінення заготовок в операціях обробки металів тисненням, таких як витяжка (рис.7.3,а) і осадка (рис.7.3,б), що супроводжуються розвитком великих деформацій пластичності.

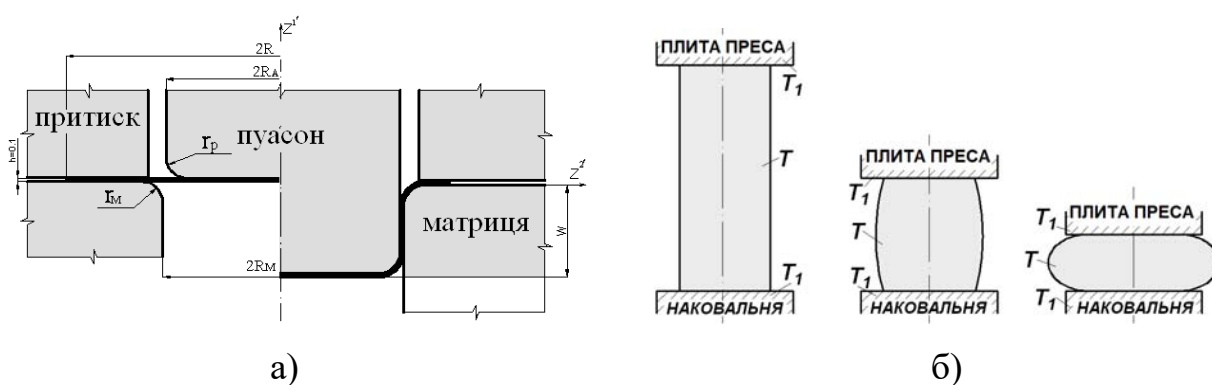


Рис 7.3

Вищезазначені умови взаємодії можна забезпечити закріпленням вузлів сіткової області, що знаходяться в контакті зі перегородкою, від зміщення за нормаллю до поверхні контакту. Для цього необхідно ввести систему координат $Z^{i''}$, пов'язану з границею жорсткої перегородки. На ділянках, де напрям осей $Z^{i''}$ не збігається зі напрямком осей базисної системи координат $Z^{i''}$ (рис.7.3), з'являється

необхідність перетворення компонент вектору реакцій в закріплених точках криволінійної ділянки із базисної системи координат в систему координат перепони:

$$k^{n''} = R^{m'} C_{m'}^{n''} \quad (7.54)$$

де $C_{m'}^{n''}$ – складові тензора перетворень $C_{m'}^{n''} = \cos(\widehat{n''m'})$.

Формування матриці системи розв'язувальних рівнянь відбувається в системі координат $Z^{i''}$. Вираз для варіації енергії в базисній системі координат має вигляд:

$$\delta W = K_{ij'} U^i \delta U^j \quad (7.55)$$

де $K_{ij'}$ - матриця жорсткості.

Переміщення U^i в базисній системі координат подаємо через переміщення U^m в системі координат $Z^{i''}$.

$$U^i = U^{m''} C_{m''}^{i'} \quad (7.56)$$

Тоді, вираз (7.55) буде мати вигляд

$$\delta W = \tilde{K}_{n''m''} U^{m''} \delta U^{n''} \quad (7.57)$$

Формула для перетворення матриці жорсткості має вигляд

$$\tilde{K}_{n''m''} = K_{ij'} C_{m''}^{i'} C_{n''}^{j'} \quad (7.58)$$

Компоненти вектору переміщень, отримані в результаті розв'язання задачі при перетворенні (7.58), наводяться у базисній системі координат.

Для розв'язання задач контактної взаємодії тіла, що деформується, зі жорсткою перпоною складної геометричної форми був розроблений алгоритм, який заснований на описаних вище положеннях.

На кожному кроці « n » виконується аналіз напружено-деформованого стану по результатам попереднього кроку « $n-1$ ». По умові непроникності відбувається закріплення окремих вузлів, в загальному випадку, що відрізняється від можливого закріплення вузлів на кроці « n ». У зв'язку з цим здійснюється пробна ітерація, після якої виконується перевірка реакцій в закріплених вузлах. Якщо останні змінюють знак на протилежний, вузли відкріпляються. Після цього розв'язок на кроці « n » повторюється знову, але вже з відкорегованими закріпленнями вузлів.

Розглянемо, наприклад, умови контакту деформуючого об'єкту з жорсткою перпоною з довільною формою границі (рис. 7.4).

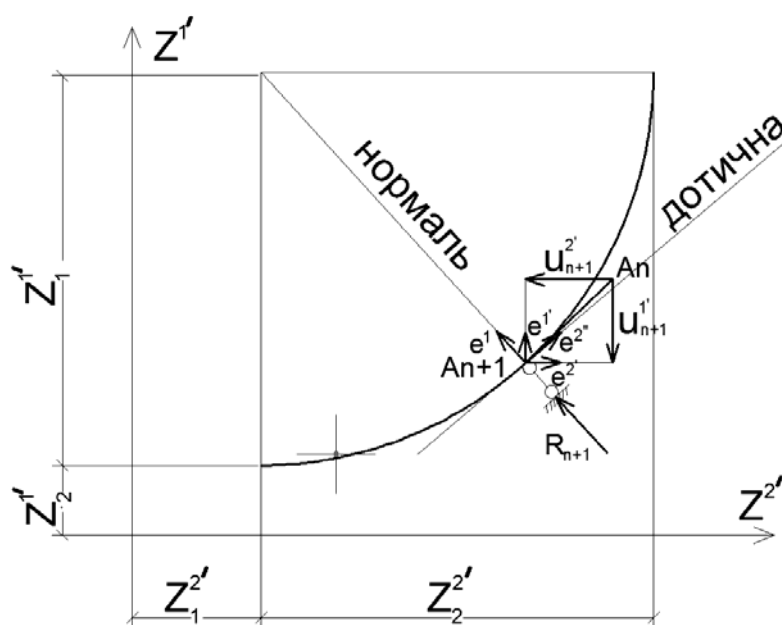


Рис. 7.4.

Точка A_{n+1} закріплюється в тому випадку, якщо вона буде знаходитися в середині перепони, якщо

$$A_{n+1} \in B, \quad U_{n+1}^1 = 0 \quad (7.59)$$

де B – область обмежена прямими

$$Z^1 = Z_2', \quad Z^2 = Z_1' \quad (7.60)$$

і кривою $f(Z^1, Z^2) = 0$.

Відкріплення точок, контактуючих з жорсткою перепоною відбувається при виконанні умови

$$\left. \begin{array}{l} R_n^1 < 0 \\ R_n^2 > 0 \end{array} \right\} U_{n+1}^1 \neq 0; \quad (7.61)$$

у випадку, коли

$$\left. \begin{array}{l} R_n^1 \geq 0 \\ R_n^2 \leq 0 \end{array} \right\} U_{n+1}^1 = 0 \quad (7.62)$$

вузол залишається закріплений.

Такий підхід дозволяє своєчасно відкріпляти вузли, користуючись інформацією про реакції, що виникають на даному кроці, а не на попередньому. Проте перерозподілення умов закріплення вузла призводить до повторного обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості на кожному кроці, що збільшує час розрахунку.

З метою його зменшення був апробований алгоритм без проведення пробної ітерації: по результатам попереднього кроку здійснюється закріплення, після чого процедура розв'язання продовжується в залежності за раніше описаним

алгоритмом розв'язання фізичних нелінійних задач. Після цього, вже по результатам кроку «n» аналізуються реакції в закріплених вузлах, і, якщо є необхідність, виконується закріплення. В цьому алгоритмі відбувається запізнювання корекції зміщення на крок. В наслідок чого в сусідніх закріплених вузлах виникає пара сил, дія якої є суттєвою для кроку, який розглядається. На наступному «n+1» кроці відкріплений вузол починає рухатися. Невідповідність моделі з реальними умовами руху точок деформуючо тіла вздовж границі жорсткої перепони усувається.

7.7. Особливості розв'язання задачі нестационарної теплопровідності при формозмінненні

В розділах 4 і 6 викладена методика визначення нестационарних температурних полів і пов'язаних з ними полів напружень, деформацій і переміщень в геометрично лінійній постановці. Це дозволяло розглядати задачі нестационарної теплопровідності і визначення НДС незалежно [67, 133]. У випадку дослідження процесів суттєвого формозміннення така можливість спрощення організації обчислювального процесу за рахунок його розподілення на два незалежних послідовних етапи відсутня, оскільки обидві задачі пов'язані між собою на кожному кроці по параметру навантаження. Розв'язання задачі теплопровідності відбувається в проміжній розрахунковій конфігурації з відповідним кроком за часом. Крім того, величини кроку повинні задовольняти умовам збіжності обох задач.

В якості контрольного прикладу розглянемо сталевий циліндричний зразок висотою $H=300$ мм, нагрітий в початковий момент часу $t=0$ до температури $T=1160^{\circ}$ С. Стиск зразка проходить з швидкістю $V=45$ мм/с. теплофізичні константи матеріалу зразка: питома теплоємність $c=0,166$ Ккал/м·с, коефіцієнт температуропровідності $\lambda=0,2$ м²/г. На деформоване тіло накладаються граничні умови теплообміну III-го роду, що найбільш відповідає реальним умовам

взаємодії з зовнішнім середовищем: на торцевих поверхнях коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_k=5000$ Ккал/м²·г·⁰С; температура зовнішнього середовища $T=200^0$ С; на бокових поверхнях коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_5=5000$ Ккал/м²·г·⁰С, температура навколишнього середовища $T=20^0$ С (рис.7.5, а). Стиск проходить до 50% початкової висоти зразка. Коефіцієнт тертя на торцях циліндра прийнятий рівним нулю. Поле температур, визначене в результаті розв'язання задачі теплопровідності, порівнюється з експериментальними і теоретичними результатами, приведені в роботі [100]. Сітка скінчених елементів нанесена на поперечний переріз заготовки таким чином, щоб сіткові координати, паралельні осі Z^2 , відповідали положенню термопар в тілі заготовки в експерименті (рис.7.5,б).

Виконане дослідження збіжності розв'язку МССЕ згущенням сітки в зоні висотою $b=10$ мм, оскільки найбільш значні зміни температури в процесі стиску проходять в цій зоні, близькій до торця зразка.

В таблиці 7.1 наведені результати дослідження збіжності розв'язку при трьох розбивках сіткової області: перший результат отриманий на висоті скінченого елемента $h_i=b$ ($N=1$), другий - $h_i=b/2$ ($N=2$), третій – при $h_i=b/4$ ($N=4$). Результати дослідження показали, що температура в точці 1 при $N=2$ і $N=4$ мають однакову величину. Також були проведені дослідження впливу кроку по часу; t – час осадки заготовки до 50% первинної висоти при постійній швидкості V_0 , Δt – величина кроку по часу, на які розбивається весь процес стиску зразка. Дослідження показали, що крок по часу $\Delta t=t/3$ взятий достатньо точно, оскільки подальші його зменшення в 2,5 і 5 раз мало впливають на результат. Порівняння температури в точці 1 після закінчення процесу стиску показало хорошу збіжності з даними експерименту, приведеними в роботі [100]: різниці температур складають біля 2%.

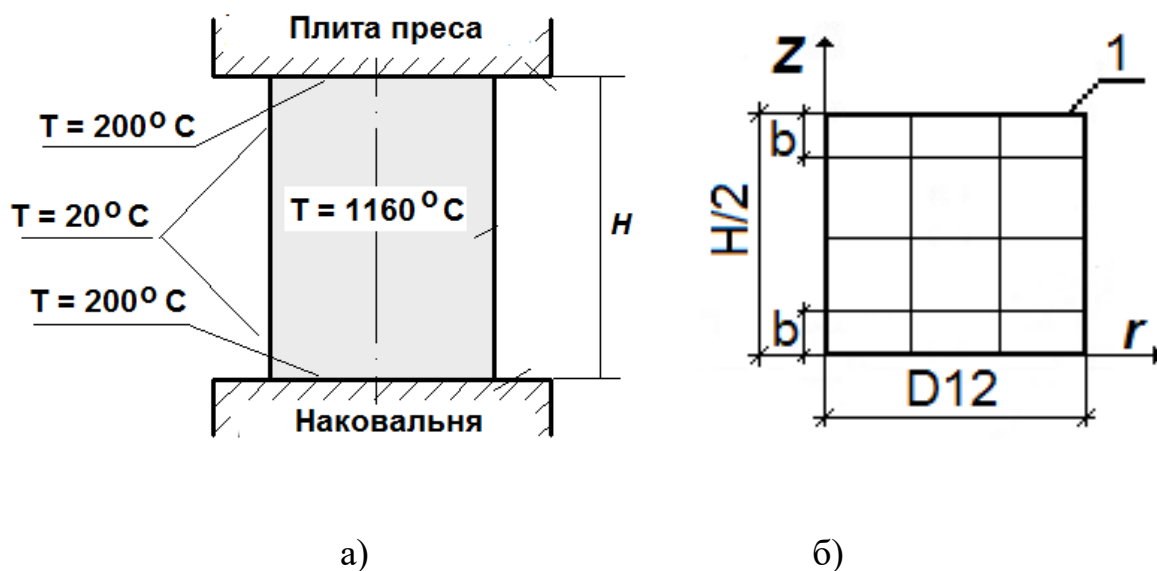


Рис.7.5.

Таблиця 7.1.

N			Експеримент, [100]
1	2	4	
958 ⁰	1022 ⁰	1020 ⁰	990 ⁰
Δt			
t/3	t/7.5	t/15	
1028 ⁰	1023 ⁰	1020 ⁰	

Слід відзначити, що представлені в даному розділі матеріали свідчать про суттєвий поступ в напрямку розвитку МССЕ на нові, досить складні класи задач. Це досягається шляхом максимального використання попередніх розробок при отриманні нових розрахункових співвідношень і при розробці узагальнених алгоритмів розв'язку одночасно фізично і геометрично нелінійних задач з змінними граничними умовами. Крім того, перехід до перемінної відлікової конфігурації на кожному кроці навантаження забезпечив можливість розв'язання нестационарної задачі теплопровідності при значному формозмінні.

РОЗДІЛ 8. АНАЛІЗ ДОСТОВІРНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФОРМОЗМІНЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ НА ОСНОВІ МССЕ

Загальна складність постановки задачі формозмінення і втрати стійкості при великих переміщеннях і великих незворотних деформаціях пластичності і повзучості потребує всебічного дослідження достовірності результатів шляхом розв'язання значної кількості контрольних прикладів. Вони мають охоплювати всі аспекти відносно геометричних параметрів об'єктів і їх структурної складності, видів навантаження і умов взаємодії з зовнішніми чинниками такими, наприклад, як моделювання наявності контактної тертя між заготовками і інструментом в операціях обробки металів тисненням.

8.1. Достовірність визначення критичних навантажень тонкостінних оболонок обертання.

Для дослідження достовірності результатів розв'язання фізично і геометрично нелінійних задач, при використанні одного СЕ по товщині оболонки було проведено їх порівняння з розв'язком, отриманим в просторовій постановці, на прикладі торосфичного сосууду (рис.8.1, опис об'єкта наведений в п.3.1). Відношення межі текучості τ_s до модуля пружності E складає 1:750. Результати розрахунку, отримані МССЕ, порівнювалися з результатами роботи [140]. На рис. 8.2 представлені криві, які показують отримані на основі МССЕ зростання максимальної деформації на тороїдальній частині сосууду при збільшенні інтенсивності внутрішнього тиску (пунктир) у порівнянні із експериментом (кружки) і результатами розрахунку, наведеними в роботі [140] (суцільна лінія). Спостерігається добре узгодження результатів.

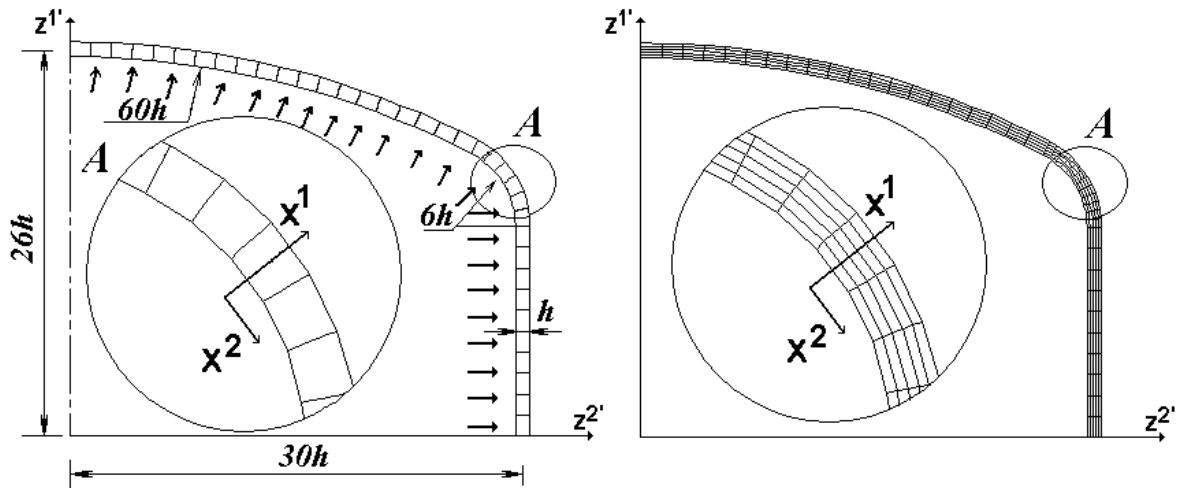


Рис. 8.1.

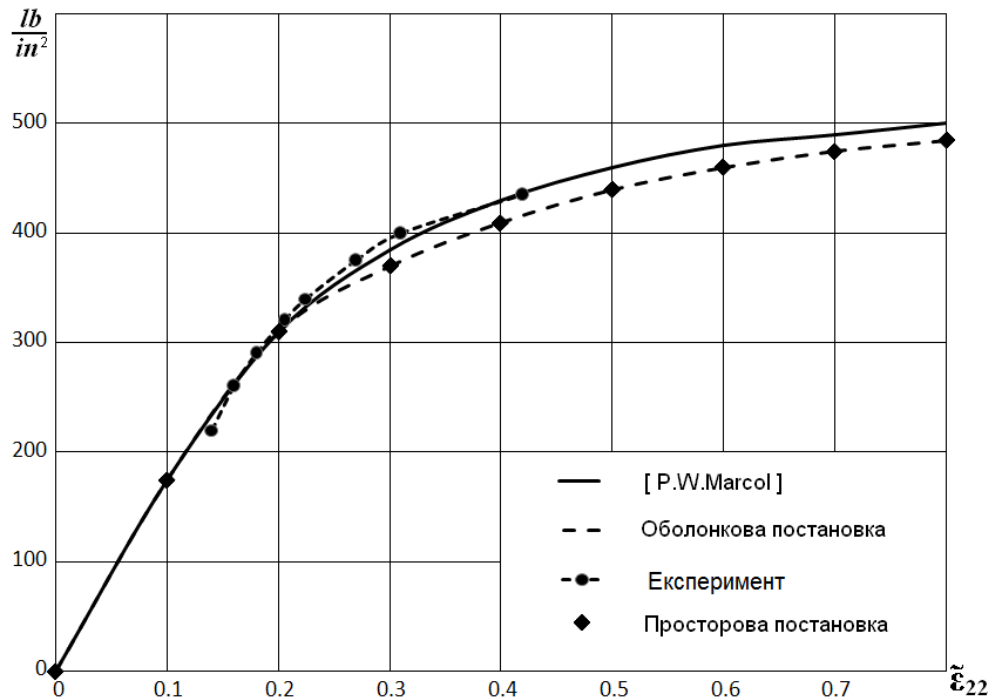


Рис. 8.2.

Обґрунтування достовірності визначення верхнього і нижнього критичного навантажень проведено на прикладі задачі втрати стійкості сферичної панелі (рис. 8.3) [127]. На рис. 8.3,а наведений графік залежності між параметром навантаження $q^* = qc^4/(Eh^4)$ і безрозмірною стрілою прогину $\zeta = u/h$ в центрі (h – товщина, $H=3h$) отриманий за розробленою методикою (суцільна лінія), який добре узгоджується із наведеним в роботі В.І. Феодосьєва [225] (ромби).

Результати дослідження збіжності результатів МССЕ при збільшенні кількості СЕ представлені на рис. 8.3,б. На ньому зображені криві, які характеризують збіжність верхнього P_v і нижнього P_n критичного навантаження в залежності від числа скінчених елементів в меридіональному напрямку. По товщині оболонки прийнятий один скінченний елемент. Відсоток похибки визначається відносно розв'язку, опублікованого в роботі [225].

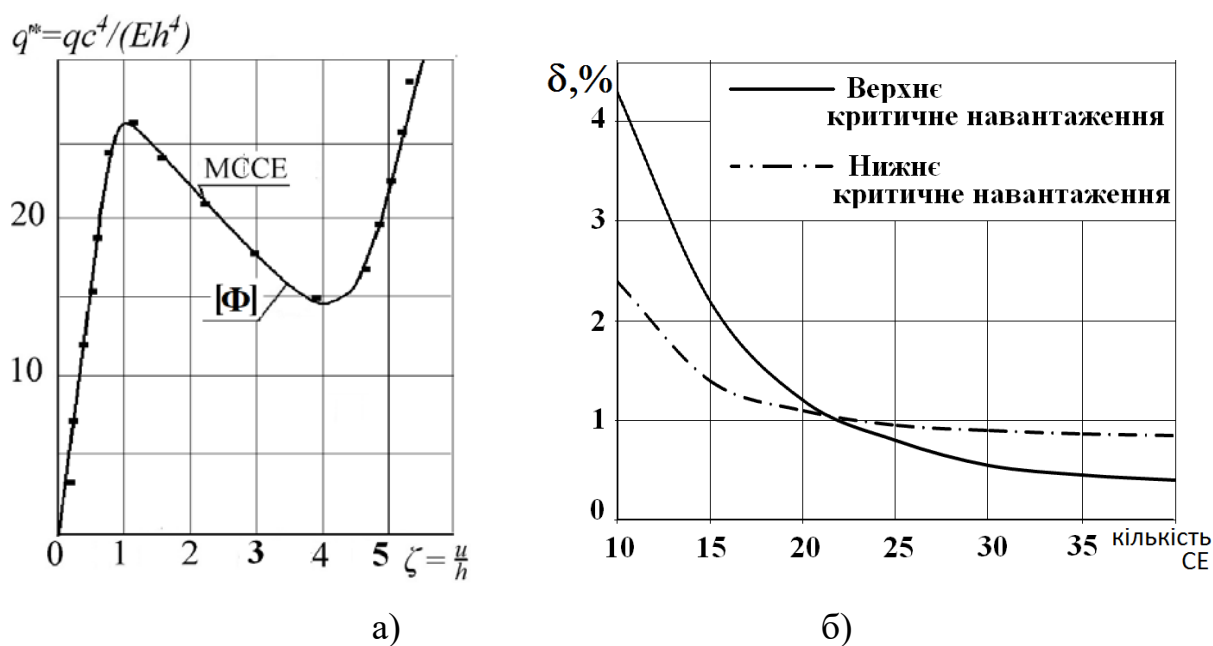


Рис. 8.3.

Слід відзначити хорошу узгодженість результатів, отриманих різними методами. Аналіз приведених графіків дозволяє встановити, що поступове згущення сіток в 2 рази від 10 до 20 СЕ змінює значення верхнього критичного навантаження на 3,1%, нижнього – в межах 0,2%.

Таким чином розроблені співвідношення і алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь дозволяє отримувати достовірні результати для геометрично-нелінійного деформування тонкостінних об'єктів із урахуванням втрати стійкості.

8.2. Визначення параметрів напружено-деформованого стану в процесі витяжки циліндричного стакану

Розроблені алгоритми були апробовані на задачі пружно-пластичного формозмінення круглої пластини, оскільки запізнювання зі закріпленням і відкріпленням точок в зонах контакту може надати найбільший вплив на визначення напружено-деформованого стану тонкостінних об'єктів, аніж масивних.

Деформування спочатку плоскої поверхні пластини здійснюється за допомогою матриці і пуансона. Пуансон, надаючи тиск на центральну частину, втягує її в матрицю. Розрахункова схема, відповідаючи початку процесу, надана на рис. 8.5. Напрямок осі Z^2 приймається вздовж верхньої поверхні матриці, вісь Z^1 направлена вгору по осі штамп. Вся пластина, в залежності від положення матриці і пуансона, розбивається на 5 ділянок. На кожній ділянці виконується певна умова контакту, що вкладена в корекції кінематичних граничних умов. Корекція виконується шляхом використання алгоритмів закріплення і відкріплення вузлів дискретної моделі.

Тиск на ділянки здійснюється в залежності від геометричної форми інструмента (рис. 8.4).

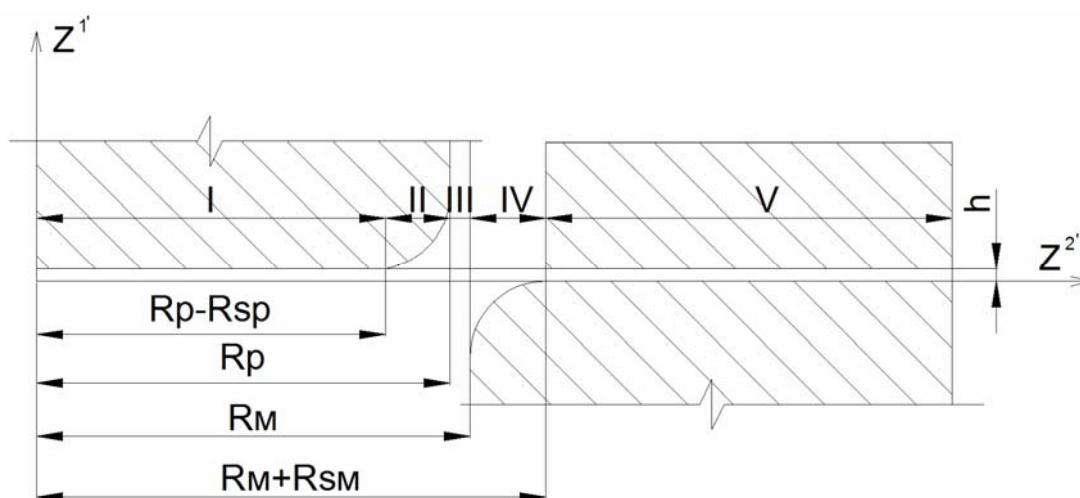


Рис. 8.4.

На ділянці I розглядається взаємодія пластини з плоскою ділянкою пуансона. З урахуванням вертикальних зміщень обчислюється параметр R_3 , характеризуючи положення пуансона на даному кроці

$$R_3 = h + (N-1)\Delta U_N \quad (8.1)$$

де h – товщина пластини, N – номер розглядаемого кроку «n», ΔU_N – величина заданих вертикальних зміщень на кроці «n».

Далі приводиться порівняння координат вузлів верхнього шару пластини, для яких виконується умова $Z^{2'} < R_p - r_{sp}$, з величиною R_3 . Якщо вузол виявляється в середині пуансона, тобто $Z^{1'} > R_3$, то він закріплюється від вертикальних зміщень $Z^{1'}_{n+1} = 0$.

На II ділянці вузли верхнього шару пластини контактують з пуансоном в зоні його радіуса округлення.

$$R_p - r_{sp} \leq z^{2'} \leq R_p \quad (8.2)$$

Координати точок, які належать границі радіуса округлення пуансона обчислюємо по формулі:

$$X^1 = R_3 - \sqrt{r_{sp}^2 - (r^{2'} - R_p + r_{sp})^2} + r_{sp} \quad (8.3)$$

Закріплення вузла, який належить до II ділянки, відбувається при виконанні умови

$$Z^1 > X^1 \quad (8.4)$$

III ділянка відповідає проміжку між матрицею та пуансоном. Закріплення і відкріплення в його межах не відбувається.

IV ділянка: вузли нижнього шару пластини контактують з округленою частиною нерухомої матриці. Координату радіуса округлення матриці в будь-який момент часу можна обчислити по формулі:

$$X^1 = -r_{sm} + \sqrt{r_{sm}^2 - (r_{sm} + R_m - Z^{2'})^2} \quad (8.5)$$

Умова закріплення точок нижньої основи пластини, знаходиться в межах

$$R_M \leq Z^{2'} \leq R_M + r_{SM} \quad (8.6)$$

має вигляд: якщо $Z^{1'} < X^1$, то $U^1_{n+1} = 0$

V ділянка. Перевірка умов закріплення виконується для точок пластин з координатами $Z^{2'} > R_M + r_{SM}$. Закріплення точок, які належать нижній основі, виконується по умові

$$Z^1 < r'_m \quad (8.7)$$

де r'_m – координата пласкої ділянки матриці.

При наявності притисного кільця на рух точок верхньої основи пластини також накладаються обмеження. Якщо виконується умова

$$Z^1 > r^1_{np} \quad (8.8)$$

де r^1_{np} – координата нижньої границі притисного кільця, то виконується закріплення.

Вибір ефективного алгоритму здійснюється на основі порівняння основних характеристик напружено-деформованого стану пластини в процесі деформування жорстким штампом.

Якісно картину напруженого стану пластини характеризують радіальні і окружні напруження, які виникають у верхньому і нижньому волокнах. Пунктирною лінією показані епюри напружень σ^{22} , σ^{33} , отримані при розв'язанні задачі без пробної ітерації, суцільною лінією – результати, отримані при розв'язанні на основі алгоритму з пробною ітерацією. Аналіз напружень як по нижній поверхні, так і по верхній показав хороший збіг результатів.

Порівняння розрахункового часу розв'язання задачі за алгоритмом з пробною ітерацією і без неї показало перевагу алгоритму без ітерації, час розрахунку якого в 1,5 разів менше, ніж для алгоритму з пробною ітерацією.

Таким чином, при розв'язанні задачі про витяжку циліндричного стакану, більш ефективним є використання алгоритму без пробної ітерації з точки зору отримання правильної картини напруженого стану і зниження витрат машинного часу.

Для підтвердження достовірності результатів розв'язання задачі пружно-пластичного формозмінення тонкостінних тіл обертання була розглянута задача про пружно-пластичне деформування круглої пластини жорстким штампом в циліндричний стакан рис.8.5.

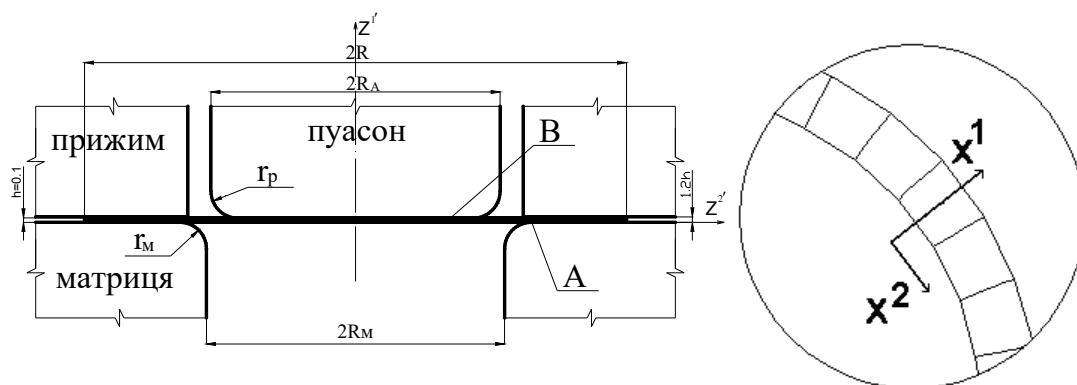


Рис. 8.5.

Витяжка виконується за допомогою матриці і пуасона, який давить на середню частину заготовки, втягуючи її в матрицю. Робочі кромки матриці і

пуасона скруглені дугами кіл, радіуси яких в декілька раз більші товщини заготовки рис.8.6.

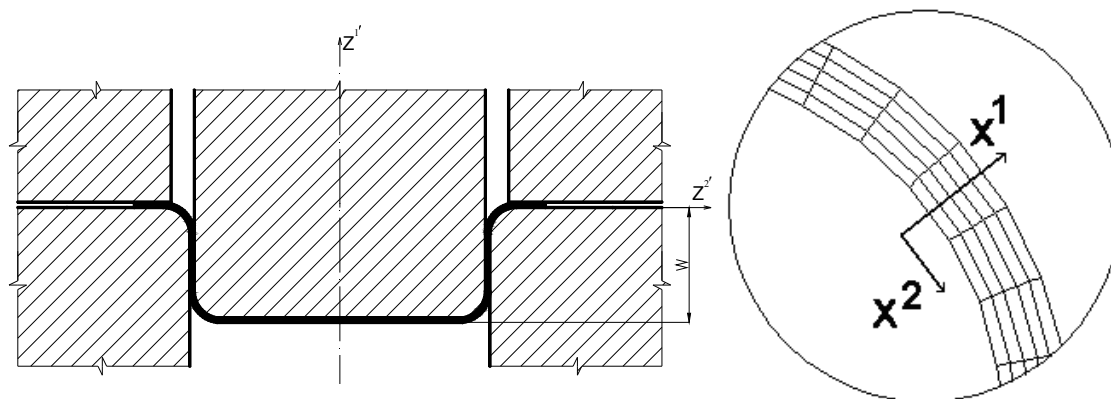


Рис.8.6.

Процес витяжки дуже складний. Моделювання даного процесу зв'язане з істотними складностями, оскільки для отримання задовільної картини напружено-деформованого стану необхідне одночасне врахування декількох факторів таких, як зміна форми заготовки, яке супроводжується зміною умов контакту з інструментом по мірі збільшення глибини витяжки, наявність зон пластичності і т.п.

При витяжці можливе формозмінення пластинки, як правило, обмежується її розривом, в тому місці, де діє найбільше по величині розтягуюче меридіальне напруження ($\sigma^{2'2'}_{\max}$) [170]. Для цього при вивченні процесу витяжки особливу увагу потрібно приділити дослідженню факторів, які впливають на величину цих напружень і зв'язаних з ним зуллілям витяжки. Останнє є важним моментом при підборці параметрів інструмента. Одним із таких факторів, дозволяє суттєво змінити картину напруженого стану розглянутого процесу, є збільшення або зменшення геометричних розмірів інструмента, наприклад радіус скруглення матриці (r_m) і пуасона (r_p), зміну діаметра витягуємого стакану (R_m) рис.8.5.

Результати, отримані при апробуванні розроблених алгоритмів, порівнювалися з результатами, приведені в роботі [163]. Крім цього, існують методики, в яких автори пропонують обчислювати основні параметри процесу

формозмінення круглих пластин по наближеним формулам [170]. При виведенні останніх використовувались вагомі спрощення як при виборі розрахункової схеми, так і при виведенні співвідношень на основі моментної теорії оболонок і т. п. З ними також були проведені порівняння результатів і оцінка якісної картини стану круглої пластини в процесі деформування її жорстким штампом. Розрахункова схема процесу витяжки показана на рис. 8.7.

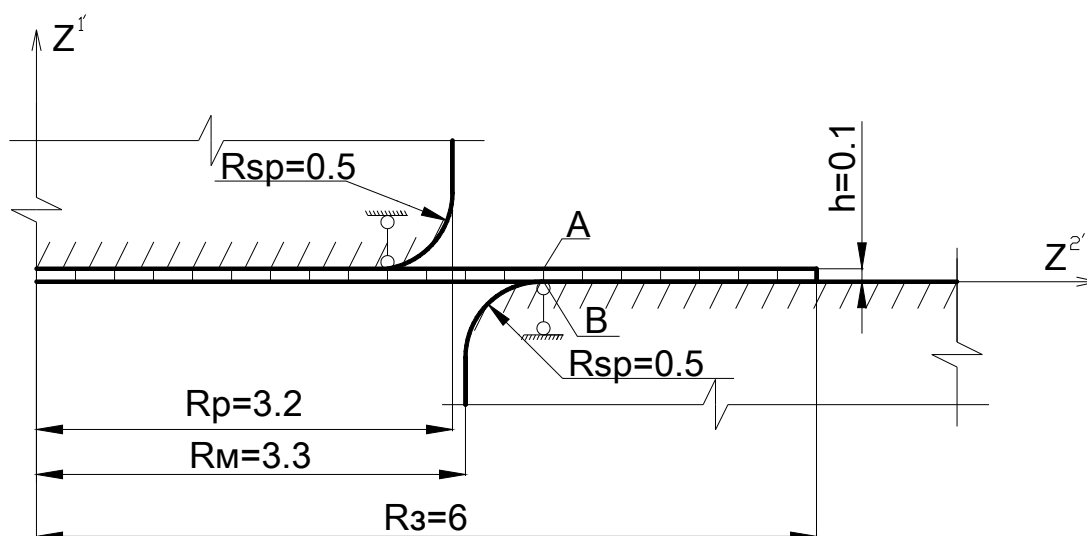


Рис. 8.7.

Геометричні розміри штампу, пластини, умова закріплення та інші дані розрахункової схеми повністю співпадають з умовами контрольного прикладу. Фізико-механічні характеристики матеріалу: модуль пружності $E=2000000$ м/см², коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Витяжка пластини здійснюється до глибини $6,1h$. По товщині пластини прийнятий один СЕ з дев'ятьма точками інтегрування.

На першому етапі для отримання стабільних результатів було досліджено вплив точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, характеристикою якої є число ε , величина кроку Δu , кількість розбивки на СЕ пластини по довжині, на основні параметри процесу витяжки силу витяжки P і максимальні розтягуючі і стискаючі меридіальні ($\sigma^{2'2'}$) і кругові ($\sigma^{3'3'}$) напруження. Результати досліджень приведені в таблиці 8.1. Встановлено, що результати, отримані при $\varepsilon=10^{-3}$, $N=80$, $\Delta u=0,005$, являються стійкими і подальша зміна ε , N , Δu не доцільна.

Таблиця.8.1.

	N			ε			Δu		
	20	40	80	0.01	0.001	0.0001	0.01	0.005	0.0025
P	33,96	32,10	30,90	29,74	30,90	31,35	32,87	30,90	30,86
(кН)	99%	3,9%	—	5,1%	1,4%	—	6,5%	0,1%	—
σ_{\max}^{22}	4,35	4,53	4,68	4,30	4,68	4,76	4,61	4,68	4,71
(МПа)	7,1%	3,2%	—	9,8%	1,8%	—	7,1%	0,6%	—
σ_{\max}^{33}	4,00	3,47	3,34	3,50	3,34	3,28	3,04	3,34	3,42
(МПа)	20,4%	1,1%	—	6,6%	1,8%	—	1,11%	2,4%	—

На рис. 8.8 представлені епюри кругових і меридіальних напружень при глибині витяжки, рівній $6,1h$, по товщині елемента (N), який в процесі деформування терпить найбільших змін напружено-деформованого стану.

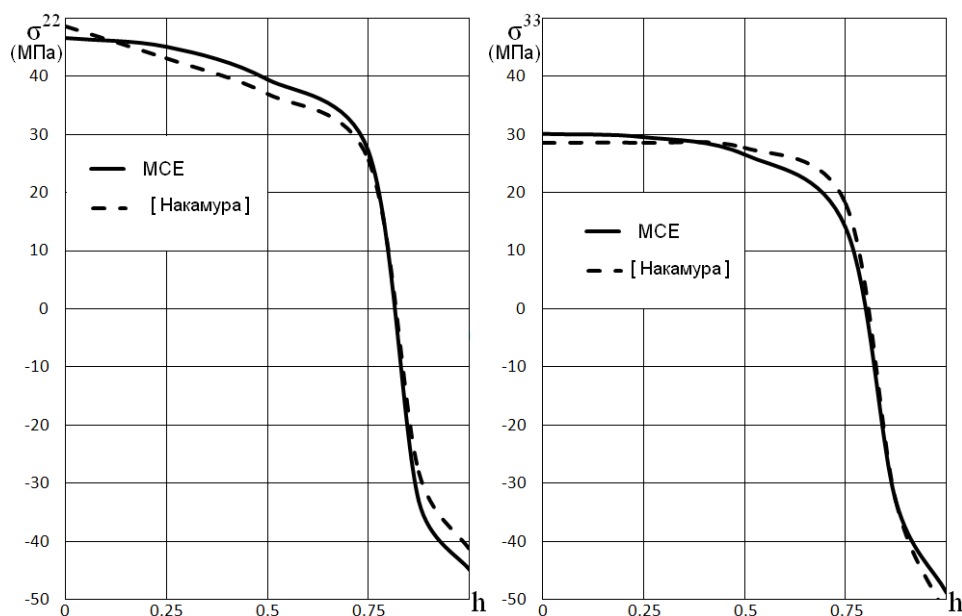


Рис. 8.8.

На рисунку цей результат представлений суцільною лінією, пунктирною лінією позначені результати, наведені в роботі [163]. При деформуванні пластини

до глибини $30h$ елемент B (рис. 8.7), розміщений спершу на горизонтальній частині матриці, переходить на вертикальну стінку. При цьому в ньому розвиваються значні пластичні деформації. Шляхи деформування точок A і B , належать відповідно верхньому і нижньому волокну (рис. 8.9). Співставлення напружень і шляхів деформування окремих точок показало їх добре узгодження із прийнятим за еталонний розв'язком роботи [163].

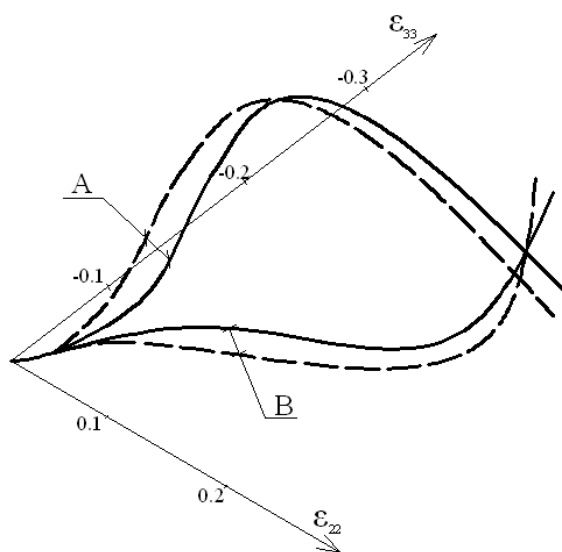


Рис. 8.9.

У відповідності з існуючими методиками по наближеним формулам були обчислені значення максимального меридіального напруження σ_{\max}^{22} при витяжці до глибини, рівній $6,1h$. Виявилось, що різниця σ_{\max}^{33} приведенного в контрольному прикладі, і результати, отримані у відповідності з розробленою методикою складає 1,1%. Ця різниця обґрунтовується використанням різних вихідних співвідношень.

В роботі [163] прийняті співвідношення теорії тонких оболонок, а при використанні одного СЕ по товщині МСЕ, як показано в роботі [193], еквівалентна теорія оболонок середньої товщини типу Рейсснера. Використання цієї теорії є більш обґрунтованим, оскільки в області контакту відношення товщин оболонки до радіусукруглення досягає в процесі формозмінення 1/5. Різниця в вибраних вихідних співвідношеннях можна обґрунтувати збільшенням в

контрольноту прикладі згинаючої складової напруження в області контакту з інструментом.

Крім цього, було проведено співставлення результатів, отриманих по методикам на основі МССЕ з величинами меридіальних максимальних напружень σ_{\max}^{22} обчислених по приблизним формулам [170]. З'ясувалося, що в цьому випадку результати розрахунку [170] суттєво занижені за рахунок згинаючої складової напружень таблиця 8.2.

Таблиця 8.2.

	σ^{22} (КГ/ММ ²)	σ^{22} (КГ/ММ ²)	$\sigma^{22}_{(МССЕ)}$ (КГ/ММ ²)
МССЕ	46,80	28,06	18,74
Накамура (МССЕ)	49,00	27,50	21,50
Попов А.Е.	25,68	20,23	5,45

Якісна картина напружено-деформованого стану добре узгоджується з експериментальними даними, приведенними автором роботи [141].

8.3. Достовірність моделювання формозмінення масивних тіл обертання

Для доведення достовірності розв'язку задач при скінчених переміщеннях і великих пластичних деформаціях для тіл обертання, проведено дослідження пружно-пластичного деформування суцільного циліндра між двома плоскими шорсткими плитами. Висота циліндра $H=0,8R_0=0,95$, початковий радіус $R_0=1,1906$ см. Механічні характеристики матеріалу: модуль пружності $E=7*10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$. Розрахункова і скінчено елементні схеми зображені на рис. 8.10.

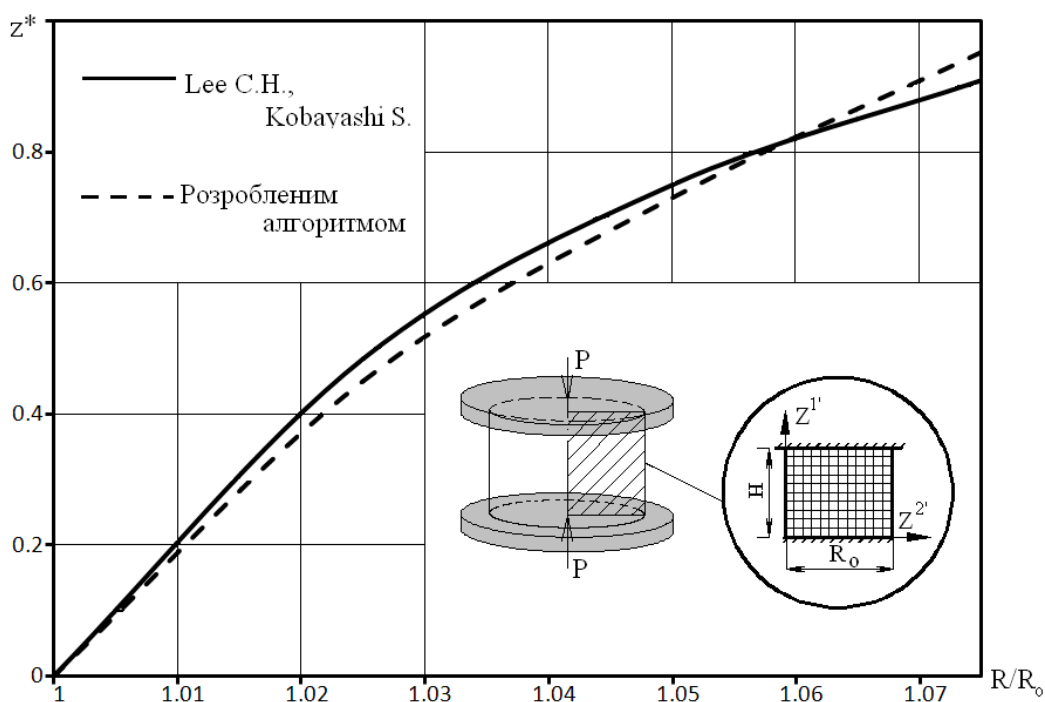


Рис. 8.10.

Результати розрахунку показані у вигляді епюр нормованого радіального зміщення в залежності від нормованого переміщення верхньої плити $z^* = \frac{H - z^1}{R_0}$ (рис. 8.10). Суцільна лінія позначена на графіку, приведена в роботі [116], пунктиром – отримані по розробленій методиці. Спостерігається добра збіжність результатів.

Дослідження ефективності розроблених алгоритмів показані на прикладі моделювання процесу осадки циліндричної заготовки плоскими плитами. Відношення модуля пружності матеріалу заготовки до границі текучості при чистому зсуві $E/\tau_s = 1,4 \cdot 10^4$. Радіус верхньої основи $R_v = 64,5$ см, нижньої - $R_n = 80,5$ см, висота $H = 280$ см (рис.8.11).

Результати досліджень приведені на рис.8.11 у вигляді графіків, які показують витрату машинного часу t в залежності від осьової координати Z^1 точки А. За одиницю прийнятий час розв'язання задачі в інтервали зміни H від 280 до 275 см. Потрібно відмітити високу ефективність розробленої методики.

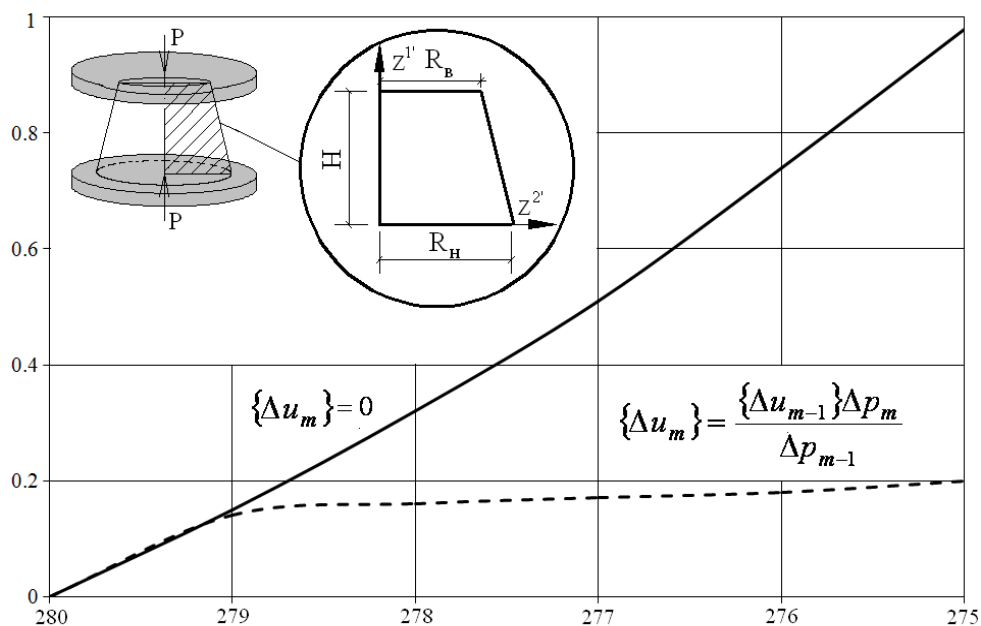


Рис. 8.11.

Ще одним способом модифікації алгоритму ґрунтується на регуляризації системи нелінійних рівнянь. Характерною особливістю процесів пружно-пластичного формозмінення є високий рівень пластичних деформацій. Доля пружних деформацій є малою величиною у порівнянні з повними деформаціями елемента, що приводить до швидкого накопичення похибки заокруглення при розв'язуванні нелінійних рівнянь і низької швидкості збіжності ітераційного процесу розв'язання задачі. При цьому накопичення похибки відбувається тим швидше, чим менша доля пружних деформацій у порівнянні з повними.

Існують методи, які дозволяють в часткових випадках подолати труднощі розв'язання задач розглянутого класу. Одним з таких методів є значне спрощення моделі тіла, зокрема, використання моделі жорстко-пластичного тіла, у відповідності з якою при розв'язанні нехтують пружними деформаціями.

В протипагу такому підходу в даній роботі використовується модель пружно-пластичного тіла, в якій регуляризація погано обумовленої системи нелінійних рівнянь здійснюється за рахунок штучного збільшення долі пружних деформацій. У відповідності із запропонованим методом величина пружних деформацій збільшується за рахунок зменшення модуля пружності E до межі

текучості τ_s . При цьому відбувається покращення обумовленості системи нелінійних рівнянь, приводить до отримання стійких результатів і значному збільшенню швидкості збіжності ітераційного процесу.

Як показали чисельні експерименти, для задач, де пружні деформації складають 0,1% від повних, цей спосіб дає добрий ефект, оскільки, навіть, при збільшенні долі пружних деформацій в десятки раз, остання залишається малою величиною і не надає суттєвого впливу на напружено-деформований стан об'єкта.

На рис.8.12 приведені графіки, що відображають залежність відносного часу розрахунку t від осової координати точки А, побудовані при різних значеннях E і фіксованій величині межі текучості. За одиницю відносного часу t прийнято час розв'язання задачі в інтервалі зміни Z^1 від 280 см до 140 см. Зміна модуля пружності в інтервалі E ($E/\tau_s=1,4*10^4$) до $E/100$ ($E/\tau_s=1,4*10^2$) майже на порядок знижує час розрахунку, практично не впливаючи на картину напружено-деформованого стану.

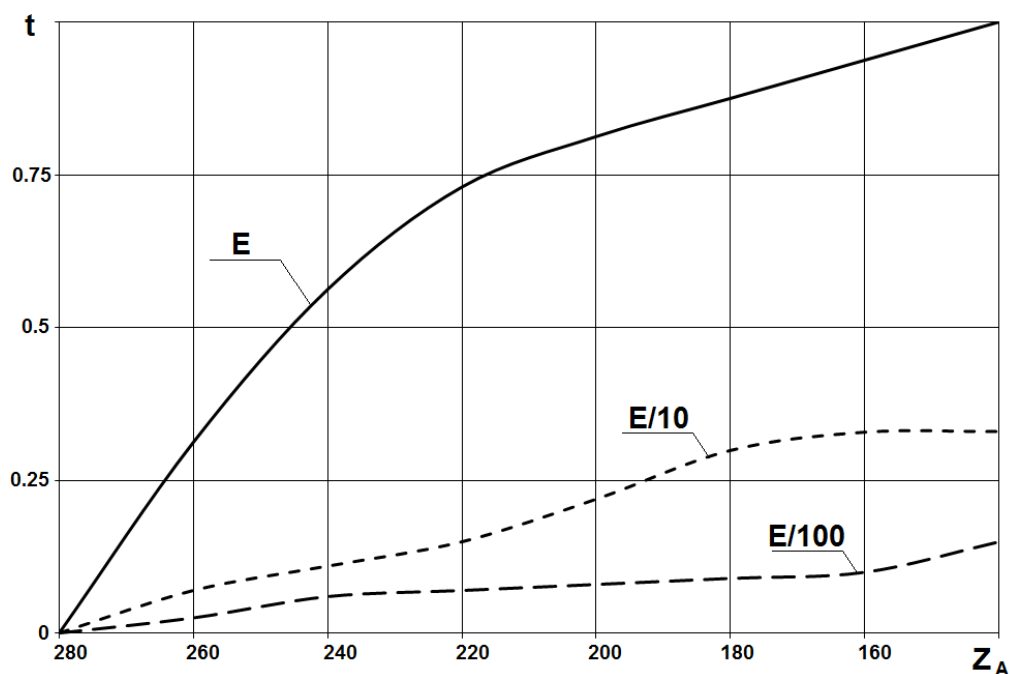


Рис 8.12.

Так, максимальні відмінності значень радіальних зміщень і осових напружень, обчислених при E і $E/10$ в інтервалі деформації $120 \text{ см} \leq Z^1 \leq 240 \text{ см}$, в

основному, не перевищують 1%, а при E і $E/100$ -3%. Дещо більшою є розбіжність для окружних напружень – 3% і 10% відповідно. Збіжність результатів пояснюється тим, що пружні деформації складають незначну частину повних і їх зміни, пов'язані зі зменшенням модуля пружності, мало відображаються на результатах розрахунку. Таким чином, варіюючи в певних межах модуль пружності, можна добитись суттєвого зменшення часу розрахунку для розглядуваного класу задач.

Подальше дослідження достовірності було проведено на контрольному прикладі осадки циліндричної заготовки в холодному стані між двома плоскими шорсткими плитами.

Розглянемо циліндричну заготовку висотою $H=1,905$ см, діаметром $D=1,25 \times H=2,3812$ см. Фізичні характеристики матеріалу: модуль пружності $E=700000$ кг/см², коефіцієнт Пуассона $\nu=0,33$, матеріал із зміцненням:

$$\tau'_3 = \tau_s^\circ + \tau_s''(\alpha) \quad (8.9)$$

τ_s° – початкове значення межі текучості при чистому зсуві, $\tau_s^\circ = 525$ кг/см², τ_s'' – кут нахилу кривої напруження-деформація $\tau_s'' = 404$ кг/см², α – параметр Одквіста.

На границі контакту інструмент-заготовка передбачається повне прилипання. Процес осадки циліндричної заготовки виконується до величини деформації по висоті 10%. Отримані в процесі розв'язання параметри напружено-деформованого стану заготовки порівнювались з результатами, наведеними в роботі [116]. Розрахункова схема об'єкту представлена на рис.8.13. Сітка скінчених елементів на меридіональний перетин заготовки нанесена рівномірно - 7x7 скінчених елементів. Виняток складає шар, шириною Δ , розташований вздовж бічної грані, на екваторі і вздовж границі контакту с жорсткою плитою. Цей граничний шар по бічній поверхні і по поверхні контакту з інструментом розбивається на 4 СЕ, висота яких $h_1 = \Delta/4$. По екватору для отримання стійких результатів потрібний лише один скінчений елемент.

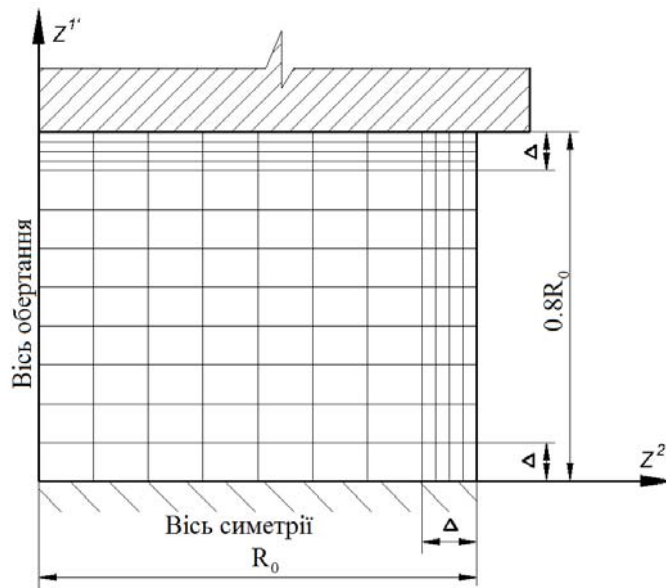


Рис.8.13.

Результати розв’язання наведені у вигляді графіків нормальних осьових ($\sigma^{1'1'}$) та радіальних ($\sigma^{2'2'}$) напружень (рис.8.14, а), а також зображення форми бічної поверхні при осадці заготовки на 10% (рис.8.14, б), де суцільною лінією позначені результати, наведенні в роботі [116], штрихпунктирна лінія відповідає розв’язку з оптимально обраними параметрами, які характеризують точність розв’язку ($\xi=0,001$ і кількість скінченних елементів).

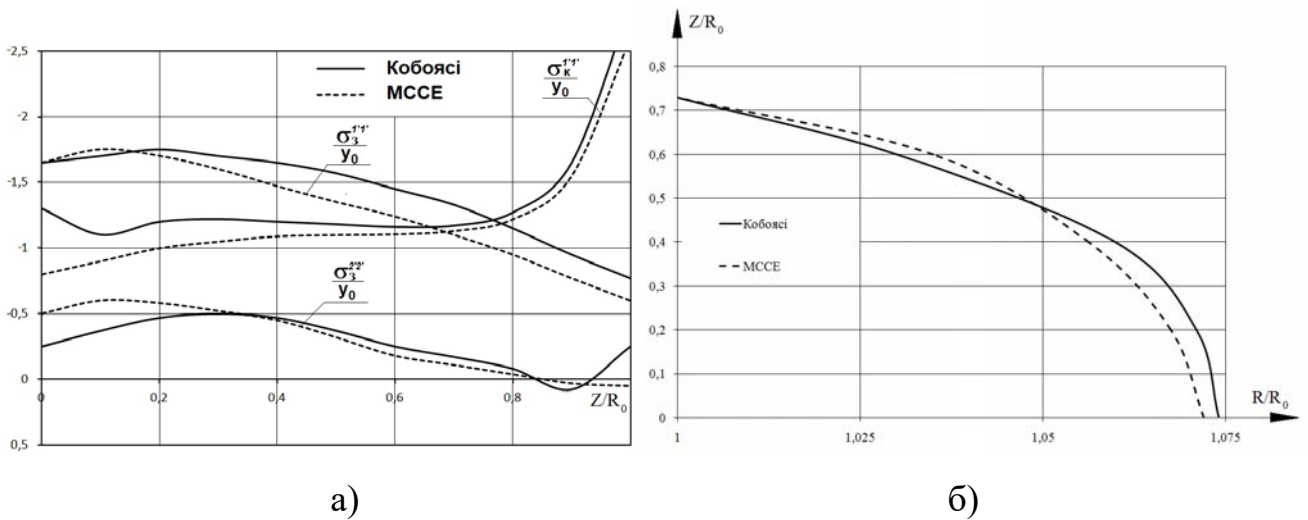


Рис.8.14.

Радіальні напруження узгоджуються досить добре, відмінність спостерігається тільки в точках, які лежать на осі симетрії. Відмінність осьових напружень від отриманих в роботі [116], становить для максимальних величин біля 10%. Епюра осьових напружень (σ^{11}) по поверхні контакту з інструментом наведена на рис. 8.14,а добре узгоджується з результатами роботи [116].

З метою перевірки методики розв'язання задачі повзучості в геометрично нелінійній постановці було розглянуто задачу про осадку з постійною швидкістю $V_0=0,167$ см/с циліндра висотою $H=25$ мм, діаметром $R_0=12.5$ мм до величини відносного стиснення по висоті 30% (рис. 8.10). . Матеріал заготовки – сплав Д16. Фізичні характеристики матеріалу в момент часу t прийняті у відповідності з графіком кривих деформаційного зміцнення сплаву при температурі $T^\circ=450^\circ\text{C}$. На границі контакту інструмент-заготовка передбачається повне «прилипання». Порівняння напружено-деформованого стану заготовки проведено зі теоретичними і експериментальними результатами, наведеними в роботах [137, 138, 191, 194].

З метою отримання стійкого результату були проведені дослідження впливу ξ і числа скінченних елементів на наступні параметри напружено-деформованого стану: величину деформуючого зусилля (P), прирощення координати точки вздовж осі $z^{2'}(\Delta U)$, нормальне напруження в заготовці на поверхні контакту з інструментом (σ^{11}) в точці А. Результати цього дослідження наведені в таблиці 8.3.

Величина ξ змінювалася в межах від 0,01 до 0,0001. Порівняння досліджуваних величин ΔU , σ^{11} , P показало, що подальше зменшення ξ недоцільно, оскільки результати розв'язків при $\xi=0,001$ і $\xi=0,0001$ відрізняються в межах 3%.

Для визначення оптимального варіанта нанесення розрахункової сітки на поперечний переріз заготовки був проведений ряд розрахунків із сітками 4x4, 6x6 та 9x9 СЕ, в результаті яких для подальших розрахунків була прийнята сітка 6x6 СЕ. Відміна результатів розв'язання з сіткою 9x9 СЕ незначна: похибка максимальної величини становить 3%, а час обчислення в 1,5 рази менше.

Таблиця 8.3.

	ε			N			E	E/10
	0.01	0.001	0.0001	30	56	110		
Δu_2 (см)	0,3085 14,55%	0,2774 3%	0,2693	0,3085 1,04%	0,3078 1,25%	0,3118	0,2774	0,2772 0,08%
σ (МПа)	52,18 2,92%	50,83 0,26%		50,70	52,18 12,3%			48,50 4,4%
P (кН)	33,59 0,88%	33,30 0	33,30		33,59 0,89%	33,51 0,63%	33,29	33,30

Для зменшення трудомісткості розв'язання задачі була проведена регуляризація матриці жорсткості скінченного елемента шляхом зменшення відношення модуля пружності E до межі повзучості τ_c . Дослідження показали, що при зменшенні модуля пружності на порядок похибка максимальних величин становить всього 2%, а скорочення часу обчислень відбувається більш ніж на порядок. Подальше зменшення модуля пружності не призводить до суттєвого покращення ефективності алгоритму. Результати досліджень впливу відношення модуля пружності до межі текучості представлені в тій же таблиці.

На рис.8.15 наведений графік зусилля деформування в процесі осадки циліндричної заготовки в гарячому стані. Ромбами («3») позначено результат, отриманий при $\xi = 0,0001$ та із сіткою 6×6 SE. Суцільні лінії відповідають теоретичному розв'язку («1») і експериментальним даним («2»).

Співставлення результатів показало краще узгодження із експериментальними даними, наведеними в роботі [137, 138], ніж із розв'язком, отриманим методом скінчених елементів в тій же роботі. Особливий інтерес при осадці заготовок становить форма бічної поверхні: там розташована зона розтягуючих напружень ($\sigma^{3'}$), існування якої пояснює наявність утворення тріщин на бічній поверхні осаджуваних заготовок. Ці результати, представлені на рис. 8.16, також добре узгоджуються із згаданими розв'язком і експериментом.

Окрім доброго узгодження результатів розв'язання задач гарячої осадки циліндричної заготовки була виявлена ефективність розв'язання задач по розробленій методиці: час обчислень в 2,5 рази менше, у порівнянні з часом розв'язання задач по методиці, яка описана в роботі [137, 138, 191].

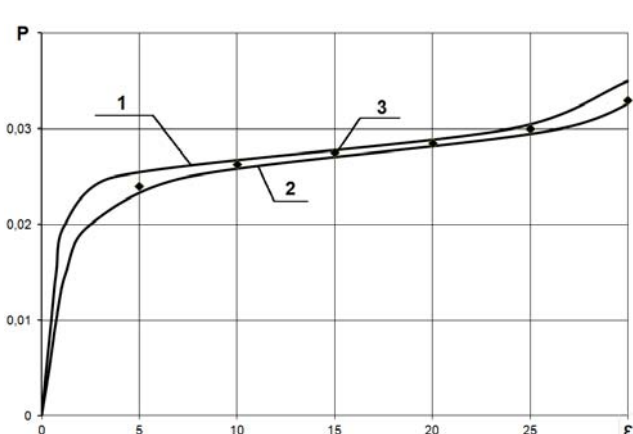


Рис.8.15.



Рис.8.16.

Таким чином, розроблена методика, яка базується на розрахункових співвідношеннях МССЕ і запропонованому алгоритмі розв'язання систем нелінійних рівнянь для опису фізично- і геометрично нелінійного деформування з урахуванням деформацій пластичності і повзучості дозволяє отримувати достовірні результати для широкого класу об'єктів і процесів деформування.

8.4. Алгоритм урахування контактної тертя в задачах формозмінення

Контактне тертя, яке виникає між двома деформованими тілами або між заготовкою і інструментом при обробці металів тиском, є фактором, який суттєво впливає на розподіл деформацій по об'єму тіл, величину зусилля деформування і т.д. Вихідні фізичні співвідношення та підходи до визначення напружено-деформованого стану в системах контактуючих тіл сталої форми без урахування формозмінення були розглянуті у п.5.4. Там же були наведені результати

апробації запропонованих алгоритмів у випадку пружного деформування. В загальному випадку реалізація алгоритмів, що враховують наявність сил тертя, призводить до збільшення витрат машинного часу, тому поряд з отриманням достовірних результатів при виборі ефективного алгоритму, слід враховувати фактор зменшення часу обчислень.

Слід відзначити, що розрахункові дані, отримані при ідеалізуванні граничних умов, таких як ковзання без врахування тертя взаємодіючих поверхонь [54, 175, 222, 231, 232] або, навпаки, прийняття допущення про жорстке зчеплення в зонах контакту [116, 138, 139, 175, 232, 239], суттєво відрізняються від експериментальних даних. Так, на рис. 8.17 представлена форма бічної поверхні при деформуванні циліндричного зразка жорсткими шорсткими плитами. Суцільною і пунктирною лінією показані відповідно експериментальні і теоретичні результати, представлені Кобаясі Н. в роботі [116].

Для моделювання контактної взаємодії деформованих в процесах формозмінення об'єктів розроблено три алгоритми розв'язання задачі пластичності при наявності тертя, які ґрунтуються на запропонованих раніше підходах..

I алгоритм. Взаємодія контактуючих поверхонь моделюється за допомогою додаткового шару скінчених елементів. Його жорсткість на зсув повинна бути достатньо високою, щоб забезпечити умову контакту у випадку відсутності зміщень між заготовкою і інструментом. Тому товщина шару приймається вельми невеликою у порівнянні з розмірами деформованого тіла. В процесі деформування у кожному скінченому елементі, який належить шару, здійснюється корекція дотичних напружень, якщо їх величина перевищує напруження тертя. В протилежному випадку напруження залишається без змін. Тобто, якщо

$$\begin{aligned} \sigma^{12} > \tau, \quad \text{то } \sigma_{12} &= 0, \\ \sigma^{12} > \tau, \quad \text{то } \sigma^{12} &= \sigma^{12} \end{aligned} \quad (8.10)$$

де σ^{12} – дотичні напруження в скінченному елементі додаткового шару; τ – напруження тертя в елементі, обчислені за формулою (5.39).

Достовірність результатів, отриманих при використанні алгоритму I, була підтверджена розв'язанням задачі про деформування циліндра шорсткими плитами (рис.8.17). Коефіцієнт тертя приймається в цьому випадку у відповідності з реальними умовами взаємодіючих поверхонь. Форма бічної поверхні, позначена кружечками, добре співпадає з формою бічної поверхні, отриманої експериментальним шляхом.

Розроблений алгоритм добре узгоджується з алгоритмом розв'язання задачі пластичності при великих деформаціях, повністю задовольняє граничним умовам задачі з урахуванням сил тертя і є достатньо загальним, оскільки дозволяє відобразити взаємодію не тільки з абсолютно жорсткою матрицю, але й між двома сумісно деформованими об'єктами.

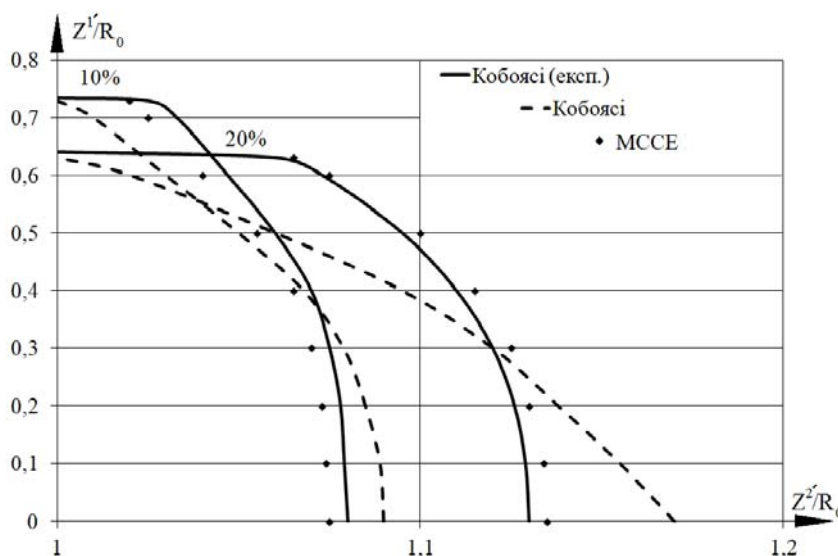


Рис. 8.17.

II алгоритм. При невеликих значеннях коефіцієнта тертя $f_{\text{тр}}$ використання I алгоритму призводить до значного збільшення кількості ітерацій. З метою їх зменшення був розроблений алгоритм, який враховує, що в задачах формозмінення напрямком переміщення контактуючих поверхонь, як правило, є відомим заздалегідь. В цьому випадку, апроксимуючий шар формується зі

спеціальних скінченних елементів, які забезпечують дорівнювання нулю дотичних напружень, а на наступній ітерації ці ж напруження приймаються такими, що дорівнюють напруженням тертя. На кожному кроці по параметру контролюється переміщення вузлів на контактуючих поверхнях.

Якщо напрямок переміщення розглянутого вузла на кроці «n» не збігається з напрямком передбачуваного руху поверхонь взаємодіючих тіл, то на наступному кроці «n+1» вузол закріплюється, тобто

$$U_n^i < 0 \Rightarrow U_{n+1}^i = 0 \quad (8.11)$$

При цьому спеціальні скінченні елементи в цій області замінюються на звичайні, жорсткість яких на зсув, як відмічалось раніше, достатньо висока.

Для підтвердження достовірності отриманих результатів було проведено співставлення розроблених алгоритмів на прикладі осадки циліндричної заготовки між плоскими плитами з урахуванням сил тертя між інструментом і заготовкою. Механічні характеристики матеріалу: $E=1400000$ кг/см² – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона - $\nu=0,33$, межа плинності при чистому зсуві – $\tau=100$ кг/ см². Геометричні розміри заготовки і розрахункова схема наведені на рис. 8.18.

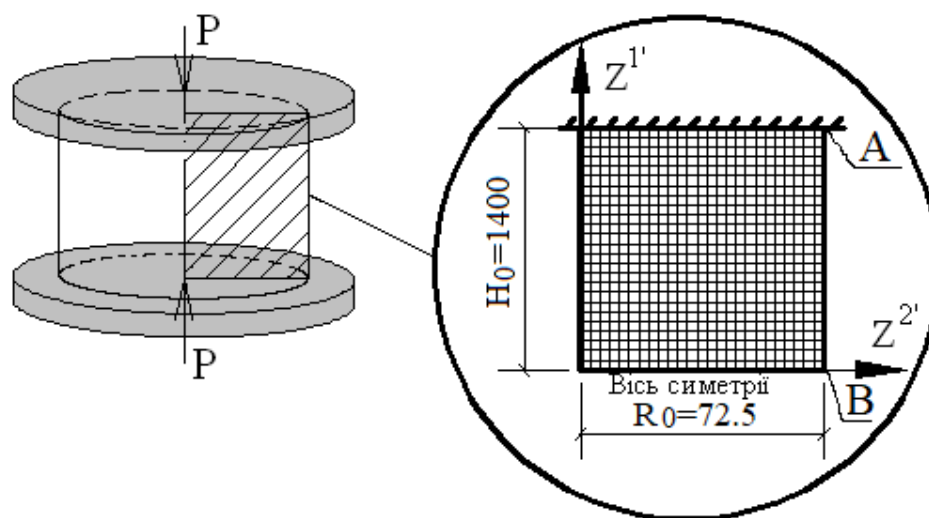


Рис. 8.18.

Порівняння розв'язання задачі обома алгоритмами показало хорошу узгодженість результатів. Так, відміна максимальних значень радіальних переміщень, отриманих при $f_{mp}=0,1$, становить біляу 5%. Аналіз витрат машинного часу для розв'язання задачі показав, що при $f_{mp}=0,1$ час рахунку I алгоритмом в 3 рази більше, чим при розв'язання із використанням алгоритму II, а зі зменшенням коефіцієнта тертя до 0,...0,05 час обчислень збільшується в 5 разів. Це дозволило зробити висновок про ефективність алгоритму II у порівнянні з алгоритмом I при розв'язанні задач такого класу.

III алгоритм. Для окремого випадку взаємодії заготовки з абсолютно жорстким інструментом може бути застосована модифікація алгоритму II, яка дозволяє виключити додатковий шар елементів за рахунок переходу від напружень до поверхневих сил, прикладеним у вузлах сіткової області, тобто до використання закону тертя у формі (5.40). Зміщення вузлів під дією сили тертя контролюється також як і в алгоритмі II напрямком руху заготовки: вузол, переміщення якого не збігається з напрямком передбачуваного руху, закріплюється, згідно до (8.11). Співставлення результатів розв'язання задачі осадки циліндричної заготовки алгоритмами II і III показало їх добру збіжність. На рис.8.17 представлена епюра радіальних переміщень точок поверхонь заготовки при осадці її до висоти 110 см. Суцільною лінією показано результат розв'язку по алгоритму II, кружечки відповідають результатам, отриманим при використанні алгоритму III. Ті ж позначення прийняті і на графіку, де представлені радіальні переміщення точок A і B в процесі деформування. Співставлення осьових і окружних напружень в торці заготовки також свідчить про достовірність результатів, отриманих при розв'язанні обома алгоритмами.

Таким чином, на основі аналізу результатів розв'язання перелічених задач зроблено наступні висновки. При розв'язанні задач пружно-пластичного формозмінення більш оптимальним з точки зору затрат машинного часу при отриманні стійких результатів є алгоритм розв'язку системи нелінійних рівнянь, заснованих на інтегруванні по параметру зміщення методом Ньютона-

Канторовича. Застосування модифікацій цього алгоритму, пов'язаних з екстраполяцією вектора прирощення переміщень і змін величини модуля пружності призвело, як показав аналіз результатів, до скорочення часу рахунку більш ніж на два порядки.

Для вирішення контактних задач пластичності з урахуванням тертя і без нього розроблені алгоритми, які дозволяють моделювати процеси взаємодії дотичних об'єктів при значному зміщенні одної поверхні відносно другої. При цьому отримані результати ілюструють достовірність і ефективність розроблених алгоритмів

Розроблена методика чисельного моделювання процесів пружно-пластичного формозмінення тіл обертання в нестационарному температурному полі з урахуванням контакту взаємодіючих поверхонь у вигляді комплексу програм, забезпечують високий рівень автоматизації всіх етапів виконання розрахунку. Аналіз результатів розв'язання контрольних прикладів показав достовірність, універсальність і ефективність використання методики і розробленого комплексу моделювання процесів деформування тонкостінних і масивних об'єктів, що супроводжуються істотним формозміненням за рахунок великих деформацій пластичності і повзучості.

РОЗДІЛ 9. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

Для ілюстрації можливостей розробленої в розділах 7 і 8 методики розв'язання геометрично нелінійних вісесиметричних задач проведено визначення величини критичного навантаження для несучих корпусів дозаправочного балону і рятувального апарату та виконано дослідження стійкості і закритичної поведінки сферичної панелі з підкріплюючим шаром і пружними граничними умовами. В якості прикладів математичного моделювання операцій обробки металів тисненням розглянуті процеси витяжки циліндричного стакану і осадки циліндричної заготовки

9.1. Визначення рівня критичних навантажень глибоководних апаратів

Одним з основних параметрів, що визначають рівень експлуатаційних і екстремальних навантажень при проектуванні занурюваних апаратів приймаються величини тисків, які відповідають виникненню деформацій пластичності P_T і втрати несучої здатності P_K .

Як приклад застосування розроблених методик до визначення напружено-деформованого стану складених оболонок постійної і змінної товщини розглянемо два типи підводних апаратів, що відрізняються конструктивними особливостями і функціональним призначенням – дозаправочний балон і рятувальний апарат.

Дозаправочний балон приставляє собою торосферичний посуд, постійної товщини навантажений зовнішнім тиском інтенсивністю q [69, 131]. Конструкція запроєктована для занурення на великі глибини і представляє собою циліндр, з'єднаний з двома сферичними кришками тороїдальними ділянками позитивної

гаусової кривизни. Радіус серединної поверхні сферичних оболонок $R_1=200\text{см}$, радіус циліндра $R_2=100\text{см}$, радіус тороїдальних ділянок $R_3=15\text{см}$, загальна довжина об'єкта $2Z_c=400\text{см}$. Товщина оболонки h змінюється в діапазоні від 2 до 4см. Модуль пружності $E=205939.65\text{МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Для визначення залежності критичної сили від межі текучості матеріалу розглянуті значення величин межі текучості при чистому зсуві $\tau_s=3000\text{кг/см}^2$ а також 6000 і 9000 кг/см^2 .

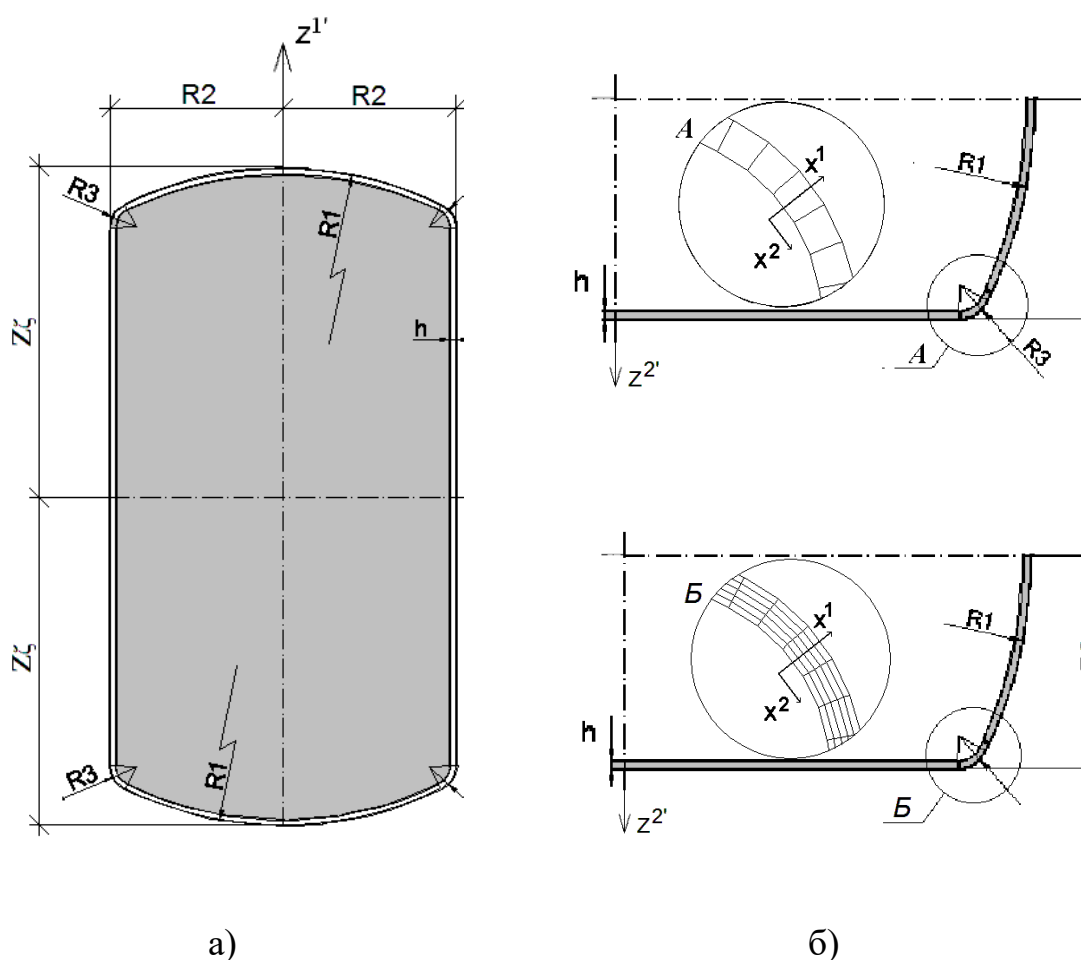


Рис. 9.1.

Розрахункова схема об'єкта і можливі варіанти скінченно елементної дискретизації при оболонковій і просторовій апроксимації представлені на рис.9.1.

При розрахунках збільшувалася як кількість СЕ в меридіональному перерізі об'єкта так і кількість точок інтегрування до досягнення збіжності основних параметрів НДС в межах 1%. Особливу увагу приділено тороїдальній ділянці, де відношення товщини до радіусу становить $2/15$, що є граничним значенням застосовності теорії оболонок середньої товщини.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити наступні висновки. Товщина оболонки і межа пластичності матеріалу при чистому зсуві суттєво впливають на величину P_K і P_T в прийнятому діапазоні зміни параметрів. Залежність критичних навантажень і тисків, відповідних утворенню пластичних деформацій, від h близька до лінійної. Так, максимальна відмінність розрахункових величин P_K і P_T від значень, розрахованих за допомогою лінійної інтерполяції на ділянці від $h=2$ до $h=4$ см, складає 5-6%. Зі збільшенням товщини оболонки спостерігається тенденція до зростання відношення P_K / P_T при фіксованому значенні τ_s . У той же час збільшення τ_s призводить до зменшення даного відношення (таблиця.9.1). Дані таблиці.9.1 свідчать про те, що розглянута конструкція після утворення пластичних деформацій здатна сприймати значні навантаження (що в 1,5-2 рази перевищують P_T) до моменту втрати стійкості.

В таблиці.9.1 наведені також відношення показників зміни P_K і P_T , що відповідають збільшенню межі текучості при чистому зсуві в 2 і 3 рази. Тут P_K (3000) і P_T (3000) позначають критичні навантаження і тиск, що характеризують момент утворення пластичних деформацій, при $\tau_s = 3000 \text{ кгс} / \text{см}^2$. Очевидно, що збільшення τ_s не призводить до пропорційного зростання P_K і P_T . Характер зміни величин P_K, P_T і P_K / P_T пояснюється впливом геометричної нелінійності, яке проявляється тим сильніше, чим тонша оболонка і вище межа текучості матеріалу. Про кількісний вплив великих переміщень на процес деформування даної конструкції дозоправочного балону можна судити на підставі результатів, наведених в продовженні таблиці.9.1, де P_K^I і P_T^I - інтенсивність зовнішнього

тиску, визначена без урахування геометричної не лінійності (в лінійній постановці).

Таблиця.9.1.

$(\tau_s/E)*10^3$	h=2см			h=4см		
	$\frac{P_K}{P_{K(3000)}}$	$\frac{P_T}{P_{T(3000)}}$	$\frac{P_K}{P_T}$	$\frac{P_K}{P_{K(3000)}}$	$\frac{P_T}{P_{T(3000)}}$	$\frac{P_K}{P_T}$
1/7	1,00	1,00	1,80	1,00	1,00	1,95
2/7	1,70	1,96	1,57	1,77	1,97	1,75
3/7	2,17	2,74	1,46	2,38	2,86	1,63

Таблиця.9.1 (продовження)

h=2см		h=4см	
$\frac{P_K}{P_K^L}$	$\frac{P_T}{P_T^L}$	$\frac{P_K}{P_K^L}$	$\frac{P_T}{P_T^L}$
0,79	0,96	0,83	0,97
0,67	0,9	0,74	0,95
0,59	0,88	0,67	0,93

Перш за все необхідно зазначити, що зміна початкової форми конструкції під дією зовнішнього тиску негативно впливає як на величину P_K , так і на P_T . Отже, врахування геометричної нелінійності в цьому набуває принципового значення в порівнянні з об'єктами, що знаходяться під дією внутрішнього тиску. Залежність P_T від формозмінення значно менше, ніж від критичних навантажень. Це цілком закономірно, оскільки момент виникнення пластичних деформацій відбувається при відносно невеликих переміщеннях оболонки.

На рис.9.2,а і 9.2,б показані графіки, що відображають величину наведеного нормального переміщення w/h в центрі сферичної ділянки в залежності від

значення зовнішнього тиску для оболонок товщиною 2 і 4см при значеннях $\tau_s = 3000$ і 9000 кг/см². Суцільною лінією зображені криві, що відповідають розрахункам при сумісному впливі пластичного деформування і великих переміщень. Пунктирною лінією позначено результати розв'язання геометрично нелінійної задачі, штрих пунктирною – фізично-нелінійної. Точками на кривих відзначені навантаження, що відповідають початку розвитку пластичних деформацій, кружечками – критичні навантаження.

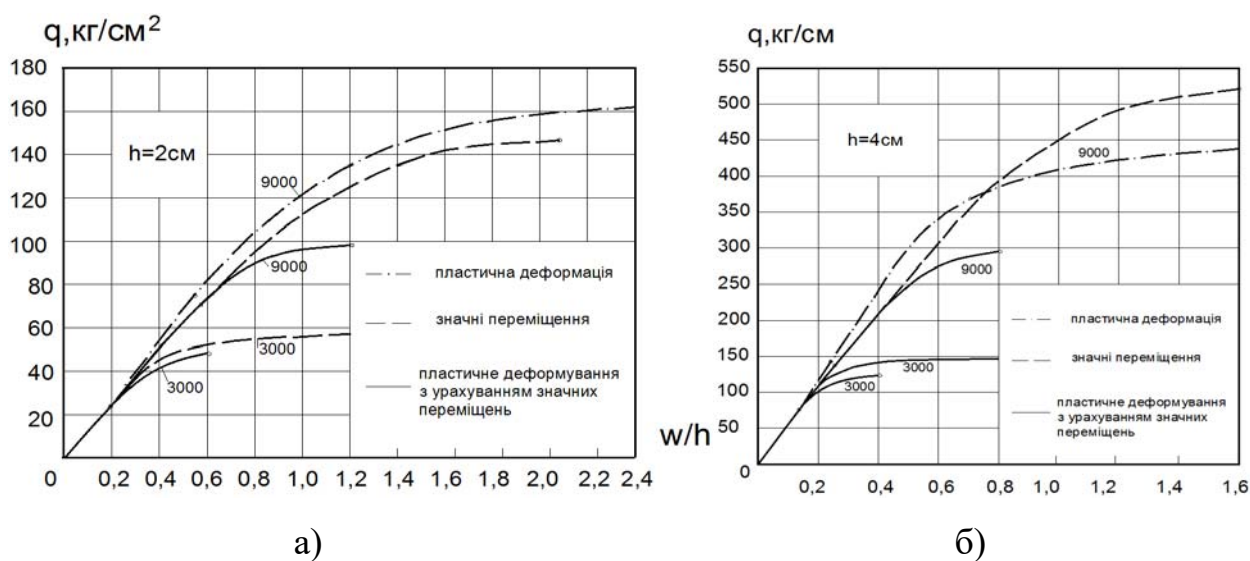


Рис.9.2.

Представлені результати свідчать про істотні залежності деформування конструкції від товщини оболонки і механічних характеристик матеріалу. При цьому слід зазначити, що пластичне деформування починається фактично при одних і тих же значеннях приведенного зміщення $(w/h)T$ як у випадку врахування великих переміщень, так і в геометрично лінійній постановці. Тому збільшення τ_s викликає пропорційну зміну $(w/h)T$ не залежно від товщини оболонки.

Дещо інша справа з переміщеннями $(w/h)K$, що характеризують деформативність конструкції в момент втрати стійкості. В цьому випадку

зростання τ_s в 3 рази збільшує $(w/h)K$ всього в 2 рази (у прийнятому діапазоні зміни h).

Як і для навантажень спостерігається зміна величини відношення $(w/h)K / (w/h)T$ в залежності від значення τ_s . Так, у оболонки товщиною $h=2\text{см}$ $(w/h)K / (w/h)T$ становить 3,16 і 2,11 при $\tau_s = 3000$ і 9000 кг/см^2 відповідно. Відносне зменшення $(w/h)K / (w/h)T$ зі збільшенням τ_s притаманне і для оболонки товщиною $h=4\text{см}$ (3,82 і 2,41 при $\tau_s = 3000$ і 9000 кг/см^2). Однак абсолютне значення $(w/h)K / (w/h)T$ зі зростанням товщини збільшується. Ці дані повністю узгоджуються із результатами, представленими в таблиці 9.1.

Врахування обох видів нелінійності значно підвищує деформативність оболонки, особливо при тисках, що значно перевищують P_T . Зокрема, $(w/h)K$ приблизно в 1,7-1,4 ($\tau_s = 9000 \text{ кг/см}^2$) і в 2,0-1,7 ($\tau_s = 3000 \text{ кг/см}^2$) рази більше значень наведених переміщень, обчислених з урахуванням тільки фізичної чи тільки геометричної нелінійності, при одних і тих же навантаженнях, рівних P_k .

Відмінністю в постановці задачі обумовлено і розбіжність картини напруженого стану, одержуваної при одних і тих же навантаженнях. Як приклад розглянемо оболонку ($h=2\text{см}$, $\tau_s = 9000 \text{ кг/см}^2$) під дією зовнішнього тиску інтенсивністю $97,26 \text{ кг/см}^2$, що відповідає P_k . Результати розрахунку у вигляді епюр меридіональних $\tilde{\sigma}_{(e)}^{22}$ і $\tilde{\sigma}_{(3)}^{22}$ і кільцевих $\tilde{\sigma}_{(e)}^{23}, \tilde{\sigma}_{(3)}^{23}$ напружень, що відображають напружений стан внутрішньої і зовнішньої поверхні дозоправочного балону, представлені на рис.9.3 і 9.4. Умовні позначення прийнято згідно рис. 9.2.

З наведених графіків випливає, що вплив пластичного деформування призводить до зменшення меридіональних напружень $\tilde{\sigma}_{(e)}^{22}$ на внутрішній поверхні тороїдальної ділянки (рис.9.3,а). З іншого боку врахування геометричної нелінійності збільшує $\tilde{\sigma}_{(3)}^{22}$ (рис.9.4,б), тобто обидва фактори призводять до

протилежних результатів, але взаємно не компенсуються, оскільки проявляються в різних точках конструкції.

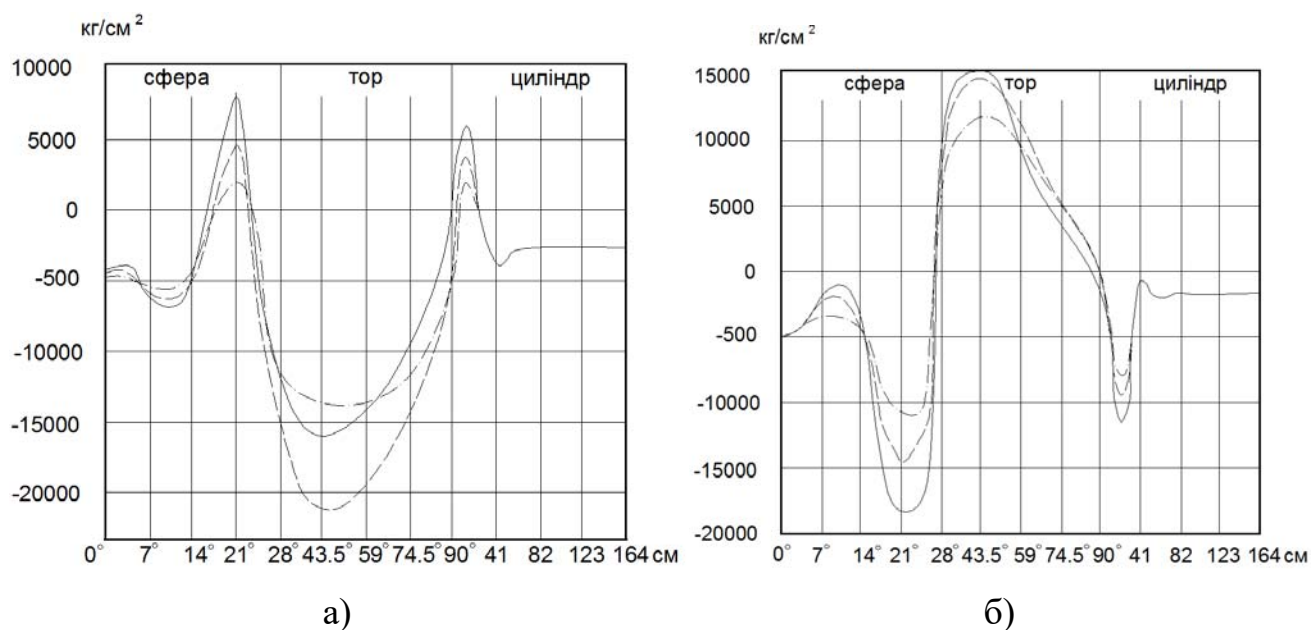


Рис.9.3.

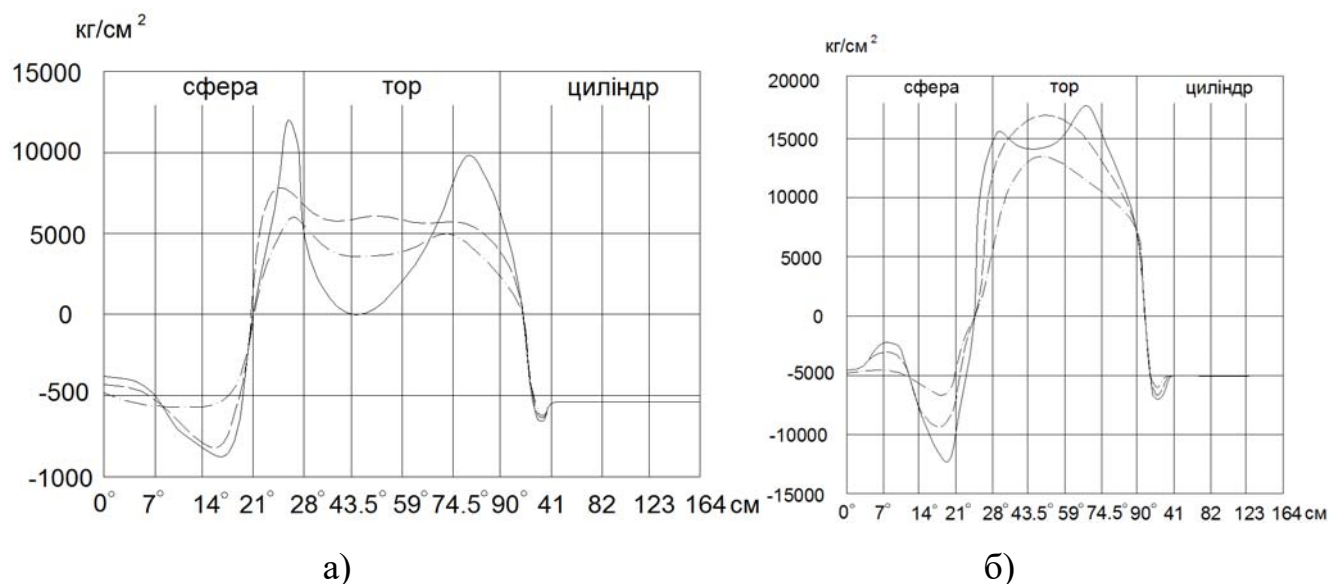


Рис.9.4.

Розподіл кільцевих напружень на тороїдальній ділянці відрізняється подобою епюр, побудованих на підставі відокремленого врахування геометричної та фізичної нелінійності. При сумісному впливі обох видів нелінійності

відбувається значний перерозподіл напружень, що супроводжується утворенням локальних екстремумів в областях, розташованих біля границі тороїдальної оболонки.

На сферичній і циліндричній частинах дозоправочного балону одночасне врахування великих переміщень і пластичного деформування призводить до значного зростання напружень в зонах моментного стану.

Розподіл інтенсивності дотичних напружень по внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки, а також характер розвитку зон пластичності по товщині представлені на рис.9.5. Умовні позначення прийняті відповідно до рис.9.2. На рис.9.5, одинарним штрихуванням показана зона пластичності, визначена в геометрично нелінійній постановці, подвійним-зони пластичних деформацій, отримані з урахуванням впливу значних переміщень.

Наведені графіки переконливо свідчать про необхідність при розрахунку подібного роду конструкцій брати до уваги обидва види нелінійності. Так, інтенсивність дотичних напружень обчислена на підставі припущення про пружну роботу матеріалу, значно перевищує величину τ_s , що допускається до використовуваних марок сталі і в реальності не може мати місця. У той же час розподіл інтенсивності дотичних напружень і розвиток зон пластичності, отриманий, без врахування значних переміщень, спотворює реальну картину і може слугувати підставою для невірних висновків про умови роботи окремих конструктивних елементів за проектного дозоправочного балону.

Наприклад, відповідно до даних такого розрахунку сферична оболонка знаходиться при розглянутому навантаженні в пружній стадії роботи матеріалу, зона пластичності носить поверхневий характер і лише стикається з лінією стику сферичної і тороїдальної ділянок конструкції. Проте, картина пластичного деформування, одержувана з урахуванням геометричної нелінійності, значно відрізняється, причому в бік погіршення умов роботи конструкції. Так, пластичні деформації в цьому випадку розвинулися на всю товщину тороїдальної ділянки, що призвело до виникнення пластичного шарніра, перетнули лінію стику і навіть утворили нову зону пластичності на зовнішній поверхні сферичного елемента.

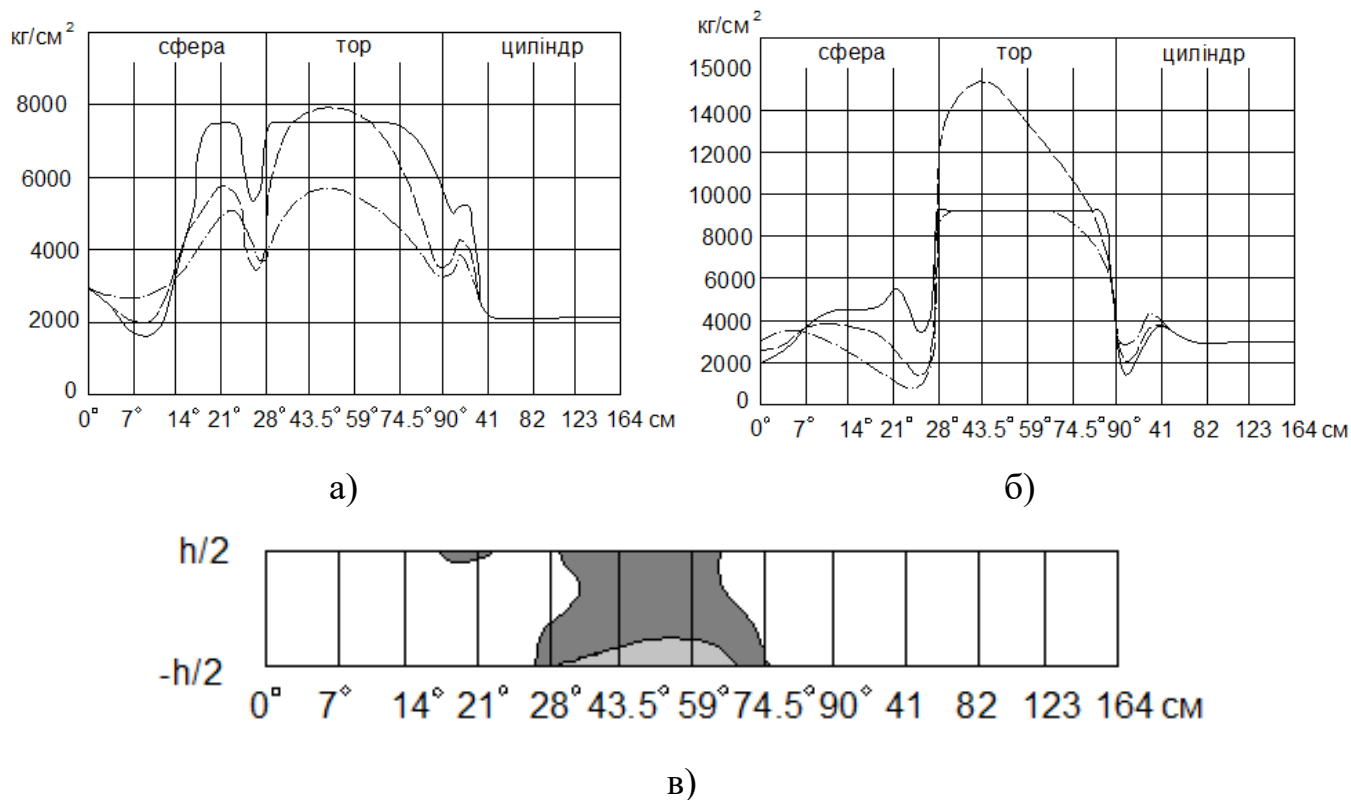


Рис.9.5.

Підсумовуючи сказане раніше можна сформулювати такі основні висновки щодо розрахунку розглянутої конструкції занурюваного дозাপравочного балону:

1. У прийнятому діапазоні зміни товщини оболонки і характеристик матеріалу при визначенні критичних навантажень необхідно враховувати як фізичну так і геометричну нелінійність.

2. Навантаження, що відповідає виникненню пластичних деформацій, в більшій частині прийнятого діапазону зміни параметрів можна оцінювати на підставі лінійного розрахунку. Проте для товщини порядку 2 см і $\tau_s = 9000 \text{ кг/см}^2$ необхідно враховувати великі переміщення.

Другий тип глибоководного апарату призначений для виконання рятувальних операцій і передбачає занурення на більші глибини. Конструкція рятувального апарату (рис.9.6) являє собою систему, складену з трьох сферичних оболонок постійного радіусу, центри яких розташовані один від одного на відстані $z_c = 200 \text{ см}$.

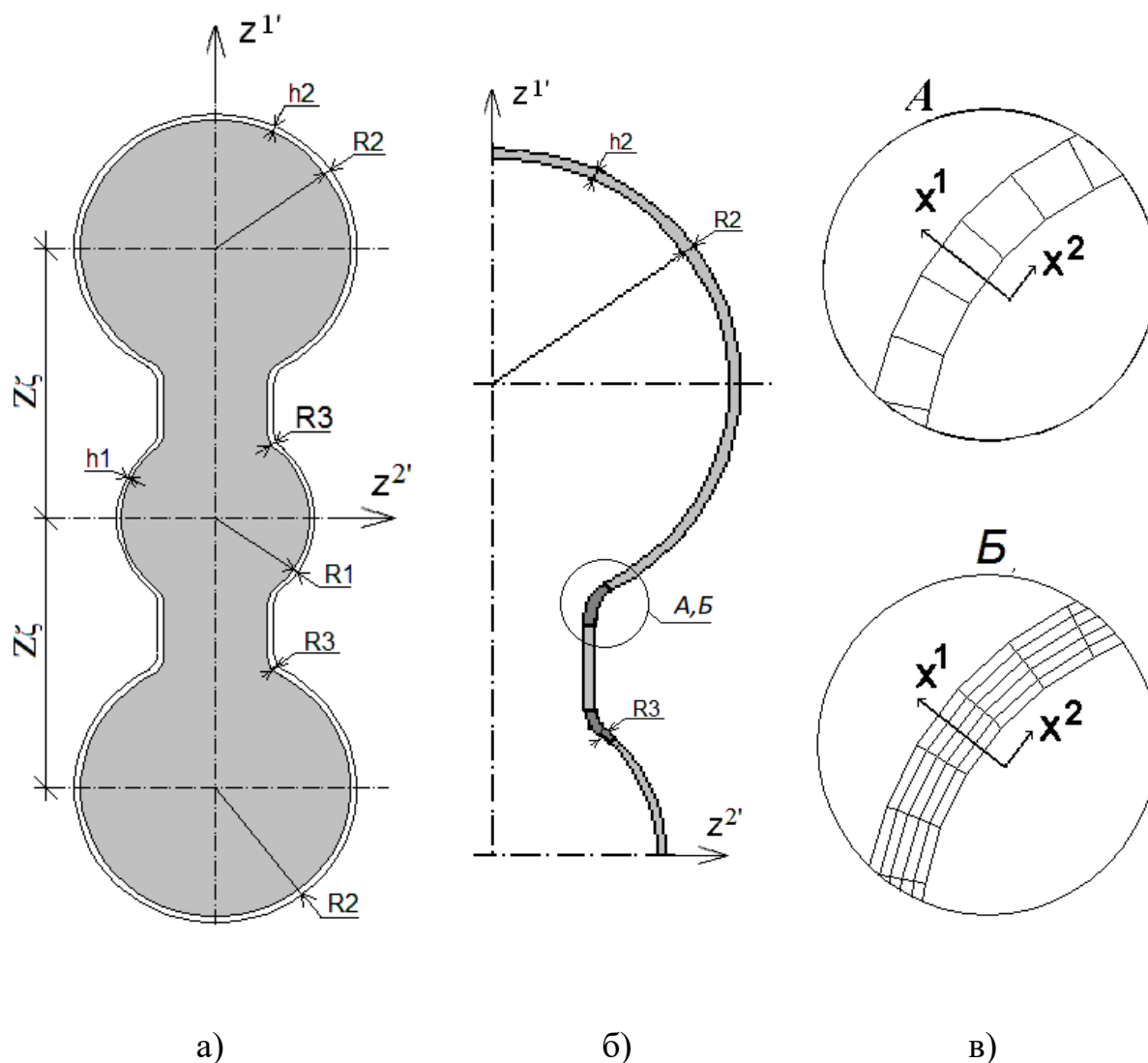


Рис.9.6.

Радіус серединної поверхні центральної сфери $R_1 = 70\text{см}$, радіуси двох периферійних $R_2 = 100\text{см}$. Сфери з'єднані між собою двома циліндричними оболонками змінної товщини, радіуси серединної поверхні яких становить 50 см. Стик циліндрів і сфер виконано за допомогою елементів тороїдальної оболонки радіусом $R_3 = 15\text{см}$. Товщина центральної сфери та прилеглих до неї тороїдальних елементів h_1 , товщина периферійних сфер і тороїдальних ділянок h_2 становить $1,5h_1$. Товщина циліндричних оболонок лінійно змінюється вздовж утворюючої від h_1 до h_2 . Модуль пружності $E = 205939.65\text{МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Були розглянуті оболонки товщиною h_1 від 1 до 3 см із фізично і геометрично нелінійною постановкою при трьох значеннях межі текучості - $\tau_s = 3000, 6000$ і 9000 кг/см².

Оболонка апроксимувалась 70 СЕ в меридіональному напрямку (40 - на периферійній сферичній ділянці, по 5 - на тороїдальних, 10 - на циліндричній і 10 - на ділянці центральної сфери) і одним по товщині.

Результати розрахунку представлені на рис.9.7 у вигляді кривих, що відображають залежність P_K і P_T від товщини h_1 . Умовні позначення ті ж що і на рис.9.2.

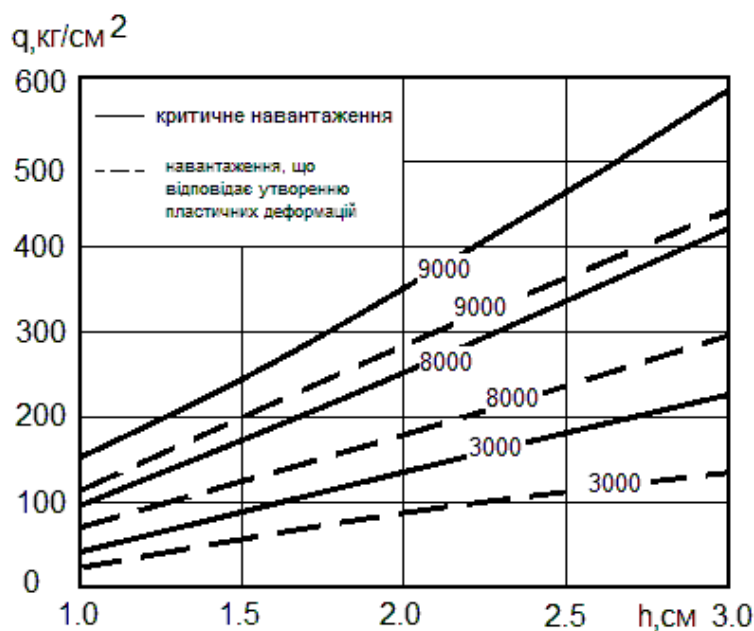


Рис.9.7.

В цілому вигляд кривих і якісний характер залежності співвідношень $P_K / P_K(3000)$, $P_T / P_T(3000)$, P_K / P_T , P_K / P_K^L , P_T / P_T^L , від h_1 і τ_s подібні до приведеним раніше для першої конструкції дозправочного балона. Однак кількісні показники свідчать про значно менший вплив врахування геометричної нелінійності на результати розрахунку рятувального апарату в прийнятому діапазоні зміни параметрів. Так як, відношення $P_K / P_K(3000)$

($h_1 = 1\text{см}$, $\tau_s = 9000\text{ кг/см}^2$) складає 2.71, що дозволяє зробити висновок про близьку до пропорційної залежності критичного навантаження від величини τ_s .
Мінімальне значення $P_K / P_K^I = 0,84$.

Слід відзначити також зменшення відношення P_K / P_T , максимальне значення якого не перевищує 1,44.

Таким чином, для конструкції рятувального апарату справедливі такі положення:

1. У прийнятому інтервалі зміни h_1 і τ_s навантаження, що відповідають виникненню пластичних деформацій, можна визначати на основі лінійного рішення.

2. Критичні навантаження, в основному, допускається обчислювати без урахування великих переміщень. Для оболонок з товщиною і характеристиками матеріалу близькими до $h_1 = 1\text{см}$ і $\tau_s = 9000\text{ кг/см}^2$ необхідно враховувати геометричну нелінійність, оскільки похибка конструкції в цьому випадку становить приблизно 20%.

9.2. Вплив параметрів підкріплюючого шару і пружного затиснення на стійкість і закритичну поведінку сферичної панелі

Область застосування сферичних оболонок в техніці дуже широка і різноманітна, особливо в таких галузях як суднобудування, авіа- і ракетобудування. Стійкість сферичних панелей, навантажених зовнішнім тиском, є однією з актуальних завдань теорії стійкості тіла, що деформується. Огляд робіт, присвячених даній проблемі, міститься в монографіях [39, 42, 99]. Досить докладно вивчена залежність поведінки оболонок і величин критичних навантажень від таких факторів, як змінна товщина, под'ємність, граничні умови, вид навантаження і т.п.

В реальних конструкціях сферичні сегменти нерідко знаходяться в контакті з різного роду ізоляційними, антикорозійними, «жертвними» шарами і матеріалами заповнення, наявність яких може істотно змінити поведінку оболонки в процесі навантаження. Крім того, дійсні граничні умови можуть не збігатися з шарнірним і вільним обпиранням або жорстким закріпленням, а по конструктивним або технологічним уявам відповідати пружному зацімленню. Особливо часто це відбувається в тих випадках, коли необхідно забезпечити герметичність в зоні обпирання оболонки за допомогою різних прокладок або обойм з еластичних матеріалів.

Розрахунку оболонок з заповнювачем (підкріплювальним шаром) присвячено значну кількість публікацій, аналіз яких можна знайти в роботах [87, 91, 215]. Вивчено вплив на точність розв'язку формулювання умов контакту, виду рівнянь, що описують поведінку матеріалу заповнювача і т.п. Однак, дослідження з цього питання виконуються, як правило, в геометрично лінійній постановці.

У тих випадках, коли враховується геометрична нелінійність, розрахункова схема, в основному, базується на апроксимації поведінки контактуючого матеріалу пружною основою, як це зроблено в роботі [56]. Таким же чином апроксимується і фактичне поведінка пружного закладення [12, 65]. Як зазначено в роботі [87] даний підхід може забезпечити лише якісну сторону розрахунку навіть в лінійній постановці.

Методика, заснована на використанні МССЕ до вирішення поставленої задачі, дозволяє розглянути оболонку у взаємодії з підкріплювальним шаром і матеріалом закладення як масивне неоднорідне тіло, без необґрунтованого введення спрощуючих гіпотез.

Розглянемо сферичну панель, розрахункова схема якої представлена на рис. 9.9. Товщина оболонки $h = 0.1$ см, стріла підйому $H = 0.4$ см, радіус прольоту $a = 6$ см, модуль пружності $E = 2 * 10^6$ кг / см. Нехай внутрішня поверхня панелі спирається на шар матеріалу товщиною h_1 , і жорстко з ним з'єднана, а торцева частина всієї конструкції закріплена від зсувів. Коефіцієнти Пуассона оболонки і

матеріалу підкріплення збігаються і становлять 0.3, а відношення модулів пружності характеризується величиною $K_1 = \frac{E_1}{E} * 10^3$, де E_1 - модуль пружності матеріалу підкріплення.

Проведені в розділі 7 дослідження збіжності МСЕ при розрахунку жорстко затисненої сферичної панелі дозволяють зробити висновок, що використання 20 скінченних елементів в меридіональному напрямку є достатнім для отримання стійких результатів. Розв'язок задачі при пружній рівновазі неоднорідного циліндра, який можна розглядати як підкріплену оболонку, показав, що стійкі результати забезпечуються використанням всього одного елемента по товщині підкріплюючого шару.

Однак, при розв'язанні нелінійних задач питання про призначення оптимального числа СЕ по товщині підкріплюючого шару в залежності від співвідношення товщини оболонки і підкріплення $K_2 = h_1 / h$ потребує спеціального дослідження. На підставі розв'язання серії задач виявлено, що використання двох СЕ при $K_2 = 10 \div 25$ і трьох при $K_2 = 30 \div 40$ є достатнім для отримання стійких результатів. Так, згущення; сітки в два рази (відповідно при чотирьох і шести СЕ) змінює результат в межах 0,5-0,9%.

Процес деформування затисненої сферичної панелі відрізняється нелінійним зв'язком напружень і деформацій з інтенсивністю тиску. Крива "навантаження-прогин" характеризується наявністю двох біфуркаційних точок, що відповідають значенням верхнього і нижнього критичних навантажень.

Послідовно змінюючи параметри K_1 і K_2 , визначимо їх вплив на характер кривої "навантаження-прогин" і величину верхнього P_b і нижнього P_n критичних навантажень.

На рис. 9.8 суцільні лінії відображають залежність верхнього критичного навантаження від величини коефіцієнта K_1 , який змінювався в межах $0 \leq K_1 \leq 1.5$. Криві побудовані для значень $K_1 = 10, 15, 20, 25, 30, 40$. Штрихпунктирною лінією позначене верхнє критичне навантаження для непідкріпленої сферичної панелі.

Пунктирною лінією обмежена область S зміни параметрів K_1 і K_2 , в межах якої панель втрачає стійкість і має, як і невідкріплена, дві біфуркаційні точки.

За межами цієї області вид кривої "навантаження-прогин" змінюється і відповідає однозначному зв'язку між параметрами навантаження і переміщення. На рис. 9.9 показані графіки $q^* = (\omega^*)$ при різних значеннях коефіцієнтів K_1 і K_2 , що відповідають точкам на кордоні області S . Слід зазначити відсутність нестійких ділянок.

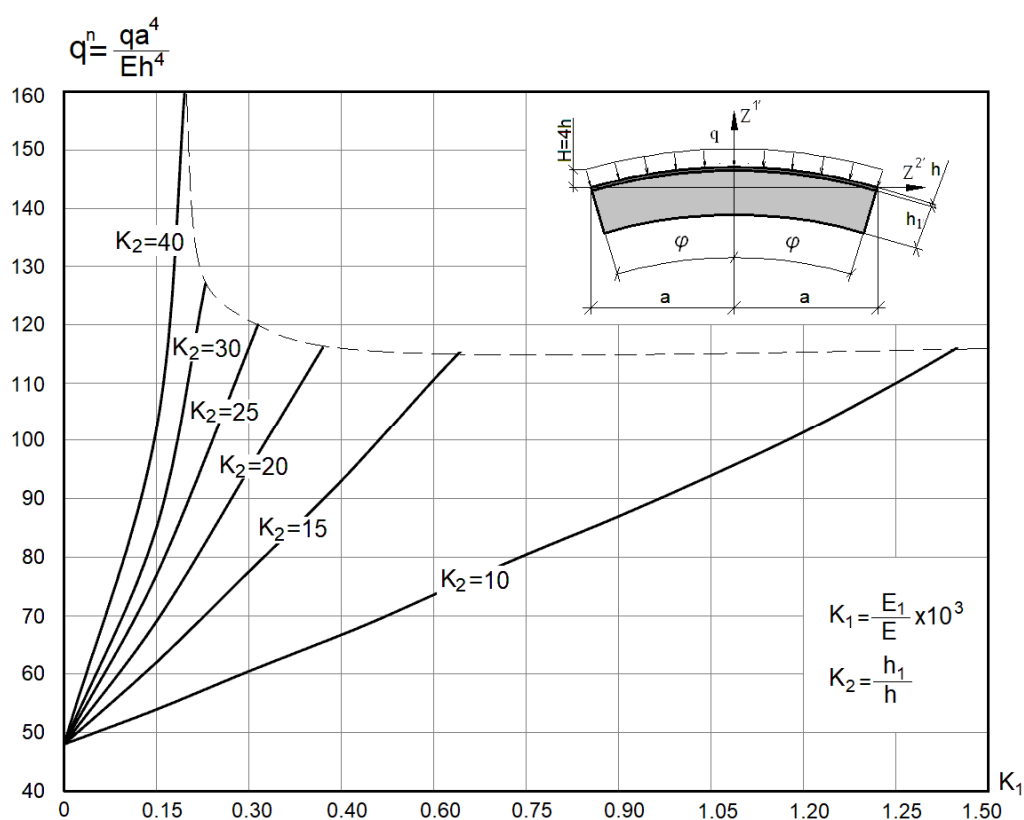


Рис. 9.8

Особливістю поведінки підкріплених оболонок в розглянутому діапазоні зміни параметрів K_1 і K_2 є те, що в конструкціях з підкріплювальним шаром товщиною до $20h$ ефект втрати стійкості зникає при одному і тому ж критичному навантаженні. В оболонках з підкріплювальним шаром товщиною $30-40h$ втрата стійкості припиняється при одному і тому ж значенні коефіцієнта K_1 . Мабуть, в межах зміни коефіцієнту K_2 ($20 < K_2 < 30$) при заданій величині прольоту і

стрілі підйому оболонки) відбувається якісна зміна картини деформування неоднорідної конструкції. До $K_2 = 20$ вона працює як двошарова оболонка, а, починаючи з $K_2 = 30$ - як оболонка на нелінійно- пружній основі.

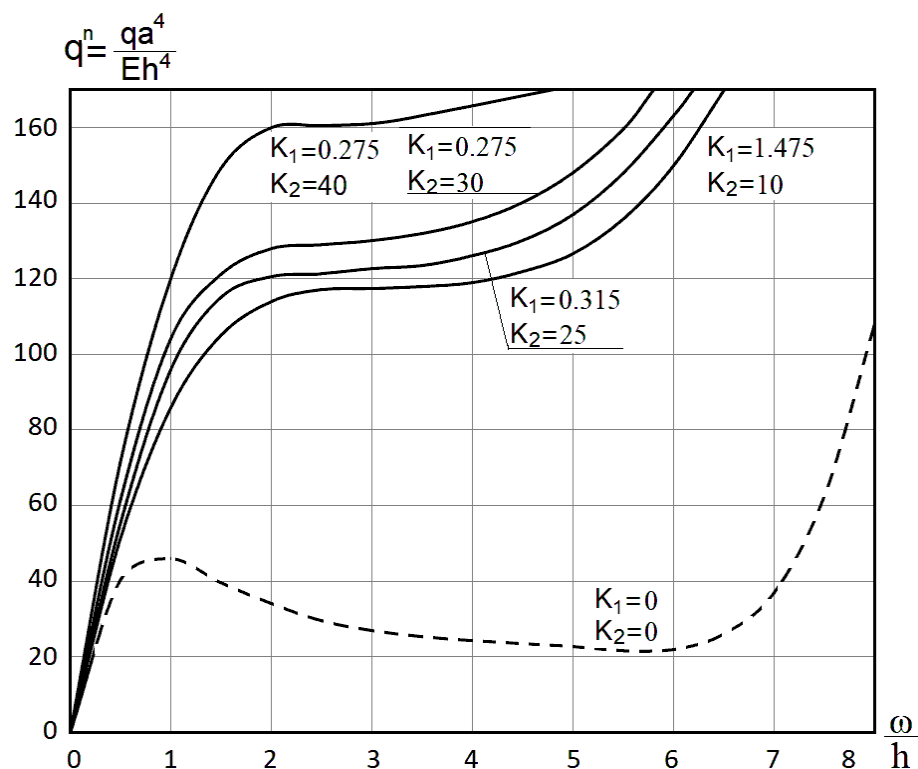


Рис.9.9

Подібна інформація має важливе значення в тих випадках, коли необхідно запроектувати конструкцію, в якій можливість появи "хлопка" особливо небажана, а товщина підкріплюючого шару може варіюватися в межах від $30h$ і вище. При цьому тільки збільшення модуля пружності матеріалу підкріплення може змінити характер деформування панелі.

При фіксованій товщині, залежність величини верхньої критичного навантаження від модуля пружності підкріплюючого шару близька до лінійної. Значення, визначені за лінійною інтерполяцією між точками, відповідними, і точками, розташованими на межі області S , відрізняються від дійсних не більше ніж на 10%. Аналогічну властивість встановлено і для нижніх критичних

навантажень. Однак весь процес деформування можна відтворити за допомогою лінійної інтерполяції.

Дослідження стійкості підкріплених оболонок в розглянутій постановці пов'язане з вирішенням складної задачі нелінійного деформування неоднорідних масивних тіл. Значно простіше визначати критичні навантаження для невідкріплених панелей. У зв'язку з цим виникає проблема оцінки точності розв'язку, отриманого без урахування впливу підкріплюючого шару.

Одним з методів аналізу такого спрощення розрахункової схеми є екстраполяція лінійного розв'язку для конструкції з неоднорідного матеріалу, отримати який в порівнянні з нелінійним досить просто. Слід застерегти, що такий підхід може призвести до неправильних висновків. У табл. 9.2 представлені результати порівняння розв'язків підкріплених і не підкріплених оболонок в лінійної і нелінійної постановці.

Таблиця 9.2.

K_2	K_1	$\alpha^л$	$\alpha^н$
40	70	1,14	1,45
	140	1,28	2,01
	210	1,41	2,65
	275	1,53	3,32
10	375	1,02	1,30
	750	1,08	1,65
	1125	1,14	2,02
	1475	1,20	2,40

Коефіцієнти $\alpha^л$ і $\alpha^н$ визначені за наступними формулами

$$\alpha^л = \frac{Q_n}{Q_n} \quad \alpha^н = \frac{P_\epsilon^n}{P_\epsilon^н} \quad (9.1)$$

де Q_n інтенсивність зовнішнього тиску, обчисленого в лінійній постановці, якому відповідав би одиничне зміщення в центрі підкріпленої панелі, Q_n теж саме в непідкріпленої панелі; P_6^n - верхнє критичне навантаження, визначене в нелінійній постановці для підкріпленої панелі, P_6^H - теж саме для непідкріпленої панелі.

Аналізуючи дані табл. 9.2 можна відзначити, що в лінійній постановці максимальна розбіжність розв'язку для підкріплених і непідкріплених панелей складає близько 50% в прийнятому діапазоні зміни параметрів K_1 і K_2 . У той же час при розв'язанні нелінійної задачі результати можуть відрізнятись не більше ніж в 3 рази. Нижня межа впливу підкріплення в лінійній і нелінійній постановці становить відповідно 2% і 30%. Це свідчить про те, що при дослідженні стійкості конструкцій з урахуванням зміни форми роль підкріплення істотно зростає, причому вона не може бути правильно оцінена на основі лінійного розв'язку.

Вплив граничних умов будемо досліджувати на прикладі панелі, основні геометричні та фізичні параметри якої (H , h , ϕ , a , E , ν) прийняті такими ж, як і в попередній задачі. Залежно від виду закріплення розглянуто три види закріплення оболонки (рис. 9.10):

- 1) жорстко затиснена по контуру;
- 2) пружно затиснена;
- 3) вільно оперта.

Пружне затиснення виконано шляхом закладення торців панелі на глибину $2h$ в еластичні кільцеву обойму з розмірами поперечного перерізу $3h \times 3h$. На трьох зовнішніх сторонах повіреного перетину обойми переміщення відсутні, а по лінії контакту збігалися з переміщеннями оболонки. Коефіцієнти Пуассона обойми і оболонки рівні між собою, а відношення модулів пружності визначається параметром $K_1 = \frac{E_1}{E} * 10^3$, де E_1 - модуль пружності матеріалу обойми. Дослідження збіжності дозволили встановити, що 5 SE по товщині обойми є достатнім для отримання стійких результатів. На рис.9.10 суцільною

лінією зображена крива, яка відображає залежність верхнього критичного навантаження пружно затисненої панелі P_y^6 від величини параметра K_1 . Штрихпунктирною і пунктирною лініями позначені значення верхніх критичних навантажень відповідно жорстко затисненої P_3^6 і вільно опертої P_3^6 оболонок.

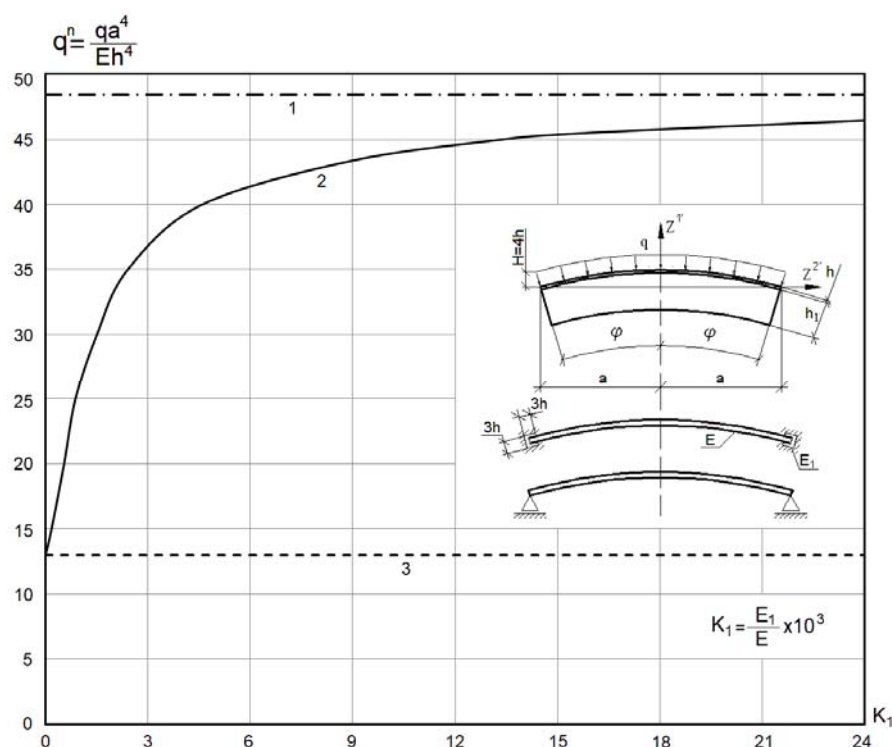


Рис.9.10

Аналізуючи наведені результати можна відзначити, що значення P_y^6 істотно залежить від модуля пружності матеріалу обойми і особливо різко зростає при збільшенні K_1 від 0 до 3 так, при $K_1 = 0,5$ P_y^6 перевершує майже в 2 рази величину P_c^6 , а при $K_1 = 3$ становить вже $3/4 P_3^6$. Подальшому підвищенню K_1 відповідає асимптотичне наближення P_y^6 до P_3^6 . Слід підкреслити нелінійний характер залежності верхнього критичного навантаження від величини модуля пружності матеріалу обойми в розглянутому діапазоні зміни параметра K_1 . Сказане вище справедливо і по відношенню до нижніх критичних навантажень.

Типи кривих "навантаження-прогин", побудованих при фіксованих значеннях K_1 , представлені суцільними лініями на рис.9.11. По виду вони займають практично проміжне положення між графіками $q^* = (\omega^*)$ для схем № 1 і № 3.

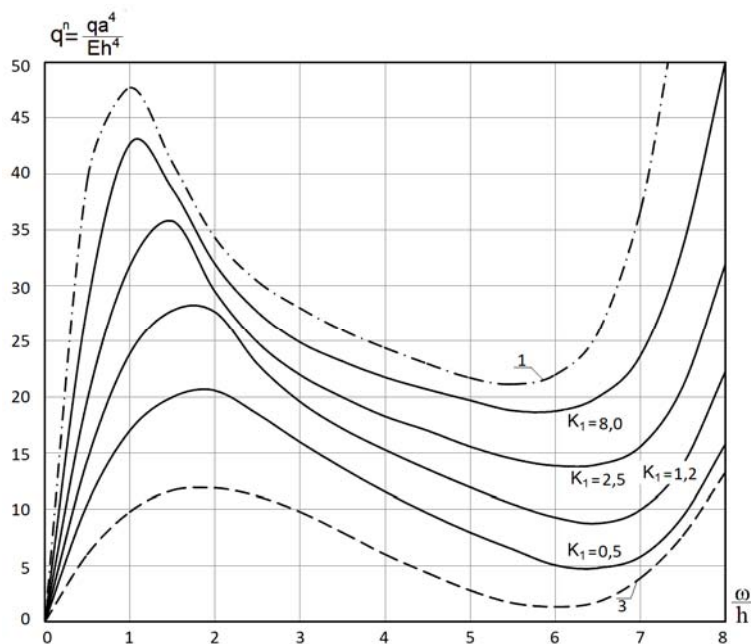


Рис.9.11

Незначне збільшення прогину (в межах 5-7%), що відповідає нижній критичному навантаженні, спостерігається в порівнянні з вільно опертих краєм тільки в області початкових значень модуля пружності опори до величини $K_1=3$. Цю відмінність можна віднести за рахунок піддатливості обойми.

Таким чином, розв'язки, відповідні розрахунковим схемам, заснованим на традиційному кінематичному поданні граничних умов, не дозволяють виділити область, в межах якої перебували б усі параметри, що характеризують напружено-деформований стан сферичних панелей.

9.3 Дослідження процесів обробки металів тисненням

Процеси обробки металів тисненням відзначаються суттєвим формозміненням заготовок під дією пуассонів, штампів і інших інструментів нерідко в умовах нерівномірного нагріву. Крім того, суттєвий вплив на перебіг зміни їх напружено-деформованого стану визначають умови взаємодії з контактуючими тілами.

Подальше удосконалення різноматіних технологічних процесів обробки металів тисненням значною мірою залежить від повноти і достовірності інформації про особливості зміни картини НДС заготовок в процесі деформування. В зв'язку з цим зростає актуальність розробки методів дослідження пластичного формозмінення з урахуванням геометричної нелінійності при великих фізично-нелінійних деформаціях, контактною взаємодії та умов теплообміну на граничних поверхнях.

9.3.1 Аналіз напружено-деформованого стану і зусиль витяжки при змінні геометричних параметрів інструменту

Процес витяжки відбувається за допомогою матриці, прижиму і пуассона, який тисне на середню частину заготовки у вигляді круглої пластини. Глибина витяжки циліндричної деталі, як правило, обмежується її розривом в тому місці, де локалізується найбільші меридіональні напруження розтягу (σ_{22}), рис.9.12.

Мета дослідження полягає у вивченні характеру зміни меридіональних і окружних напружень, що виникають у вісесиметричній заготовці в процесі її деформування, аналізу зусиль витяжки P , умов контакту з матрицею і пуасоном, які змінюються в процесі деформування, дослідження впливу зміни радіуса заокруглення матриці і пуасона на її напружено-деформований стан.

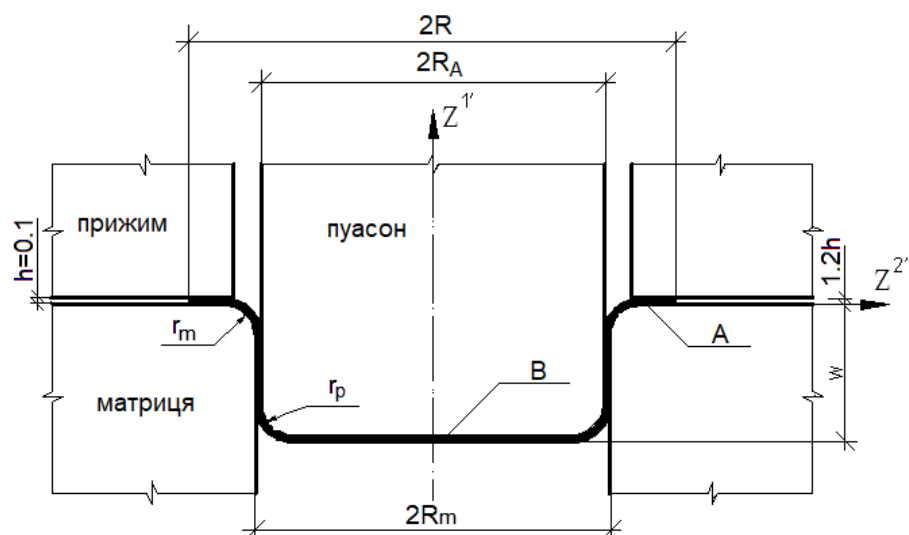


Рис. 9.12

Механічні характеристики матеріалу заготовки відповідають сталі типу Ст.10, відношення радіусу отвору матриці R_m до початкового радіусу круглої пластини R становить 0,583, відношення товщини пластини h до R становить 0,004. Зажим між прижимом і матрицею дорівнює 1,2. Радіуси скруглення r матриці і пуасона однакові і становлять $5h$. Оскільки витяжка реалізується із застосуванням мастила, тертям можна знехтувати. Розв'язок задачі виконується у вісесиметричній постановці, тому що наявність прижиму виключає можливість складкоутворення і локальну втрату стійкості. На підставі досліджень достовірності результатів, проведених в розділі 8 на тестовому прикладі, було встановлено, що по товщині пластини (заготовки) достатньо використовувати один універсальний СЕ. По довжині пластини вздовж радіусу використовується 80 СЕ, що забезпечує для апроксимації заокруглень матриці і пуасона приблизно 10 СЕ.

Моделювання процесу витяжки проводилось до глибини W , при якій досягаються максимальні значення зусиль витяжки P . Як правило, максимальні значення P фіксується після того, як відбувається обхват матеріалом заготовки заокруглених кромки матриці пуасона. При цьому відбувається поступове закріплення точок, які входять в контакт зі заокругленими кромками матриці і пуасона, а також із горизонтальною площиною прижима. На рис.9.13 схематично

показана зміна умов контакту заготовки з інструментом на різних етапах деформування.

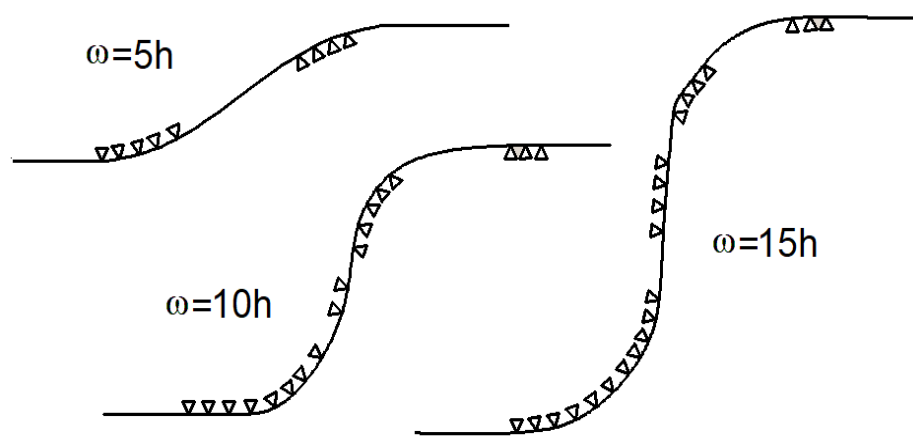


Рис. 9.13

Дослідження впливу величини скруглення матриці та пуасона r на основні параметри напруженого стану заготовки проводилося в діапазоні зміни r від $5h$ до $9h$. Графіки зміни зусилля витяжки P при деформуванні заготовки представлені на рис.9.14.

Максимальні зусилля P в усіх трьох випадках відповідають моменту появи вертикальної стінки стакану. Виявилось, що величина P_{\max} змінюється при збільшенні радіусу скруглення r на 7,5% при $r=7h$ і на 14% при $r=9h$ порівняно із значення $P_{\max} = 5h$

На рис.9.15 представлені графіки зміни меридіональних напружень, їх згинної та мембранної складових в залежності від величини радіусу скруглення r . Встановлено, що зростання меридіональних напружень σ_{22} при зменшенні r від 9 до $5h$ відбувається тільки за рахунок збільшення складових згину σ_{22} . Мембранна складова σ_{22} залишається практично незмінною при всіх досліджуваних значеннях радіусу r .

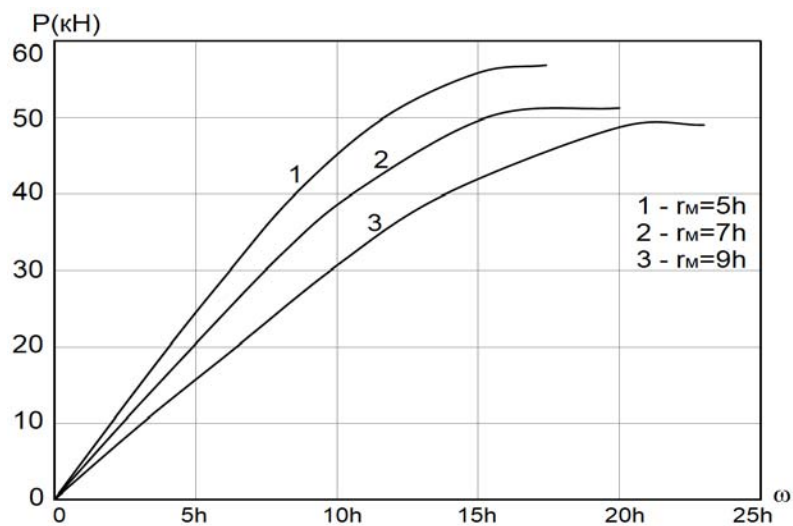


Рис.9.14

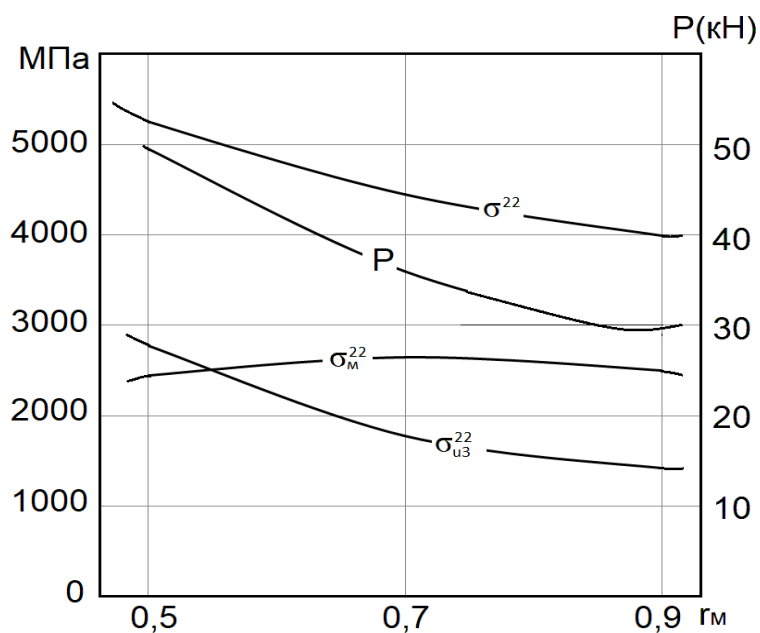


Рис. 9.15

Таким чином проведені чисельні дослідження дозволили зробити висновок, що зміна геометрії інструмента незначною мірою впливає на величину зусилля витяжки P_{\max} , проте суттєво впливає на величину максимальних меридіональних напружень.

9.3.2 Моделювання осадки заготовки з урахуванням впливу температури інструменту

Значний вплив на напружено-деформований стан заготовок, що осаджуються, має температура преса, яка, як правило, в декілька разів менше температурі оброблюваної деталі. Від температури преса та від швидкості відведення тепла з торців оброблюваних заготовок залежить характер зміни фізико-механічних характеристик матеріалу, і отже, зміни напружено-деформованого стану об'єкту.

Розглянемо описану раніше в розділі 8 циліндричну заготовку, нагріту до температури $T_0 = 1200^{\circ}\text{C}$. Передбачається, що тертя на поверхні контакту заготовка-інструмент відсутнє.

Теплофізичні характеристики матеріалів заготовок: коефіцієнт теплоємності $c = 0,245 \text{ ккал} / \text{кг} * \text{с}$ коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0.058 \text{ ккал} / \text{см}^{\circ}\text{C}$, питома вага матеріалу $\gamma = 7850 \text{ кг} / \text{см}^2$. Оскільки процес гарячої осадки циліндричної заготовки моделюється при зовнішніх умовах, максимально наближених до реальних на деформоване тіло накладаються два процеси теплопередачі: через контактну поверхню інструменту додеформованого тіла ($\lambda_T = 5000 \text{ ккал} / \text{м}^2\text{ч}^{\circ}\text{C}$) і через бічні поверхні заготовки за рахунок випромінювання і конвекції ($\lambda_T = 150 \text{ ккал} / \text{м}^2\text{ч}^{\circ}\text{C}$). Температура зовнішнього середовища $T_{\text{ср.}} = 20^{\circ}\text{C}$. Дослідження впливу температури матеріалу плити пресу проводилося при трьох значеннях $T_1 = 100^{\circ}\text{C}$, $T_2 = 300^{\circ}\text{C}$, $T_3 = 500^{\circ}\text{C}$.

На рис. 9.16 наведені ізолінії розподілення температури в меридіональному перерізі заготовки при рівні осадки $H/H_0 = 0.53$ і $T_1 = 100^{\circ}\text{C}$ та $T_3 = 500^{\circ}\text{C}$. Очевидно, що збільшення температури преса вирівнює розподілення температури по висоті заготовки в приграничній зоні.

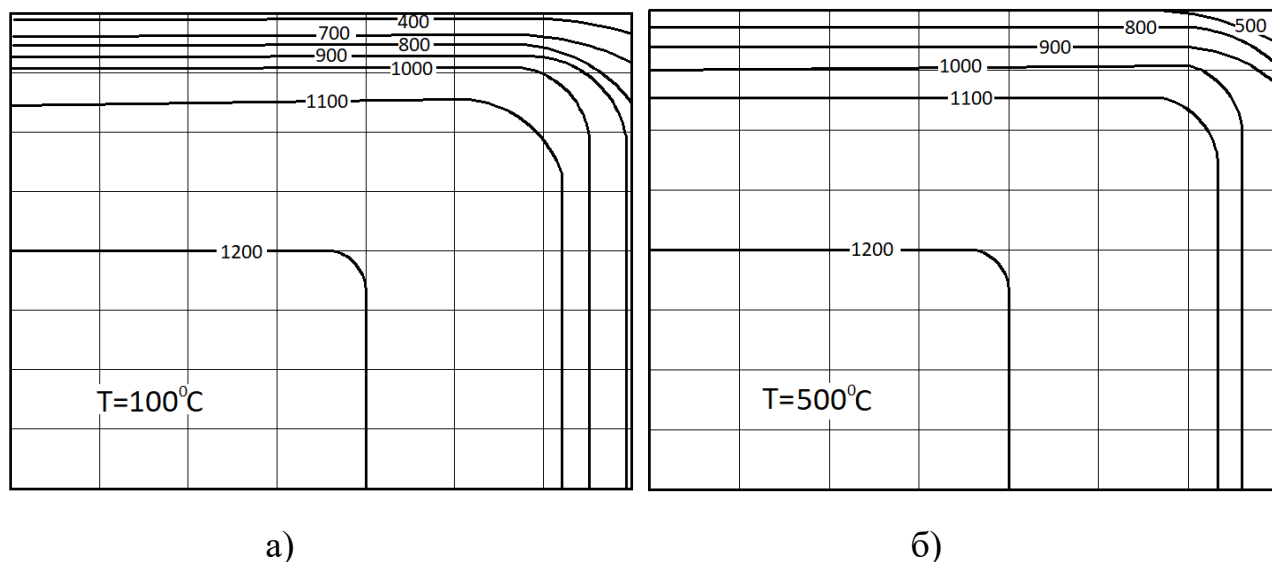


Рис. 9.16

Виявилось, що збільшення температури інструменту практично не спричиняє впливу на характер зміни зусилля деформування заготовки. Це пояснюється тим, що охолодженню піддається тільки поверхневий шар, об'єм якого в порівнянні з усім деформованим тілом становить 5%.

Стискаючі окружні напруження, що виникають у верхній частині бокової поверхні заготовки при її охолодженні, призводять до збільшення кривизни поперечного перерізу. При цьому форма бічної поверхні наближається до бочкоподібної.

Зміна температури плити преса суттєво впливає на розподіл і рівень окружних напружень $\sigma^{3'3'}$ по перерізу заготовки. Аналіз результатів, представлених на рис.9.17-9.19 у вигляді ізолінії $\sigma^{3'3'}$ за поперечним перерізом показав, що зменшення температури преса призводить до зростання напружень $\sigma^{3'3'}$ як в зоні стискаючих напружень, так і в зонах розтягуючих напружень. При цьому виявилось, що на розміри зон розтягуючих напружень зменшення температури по контактній поверхні не має практично ніякого впливу.

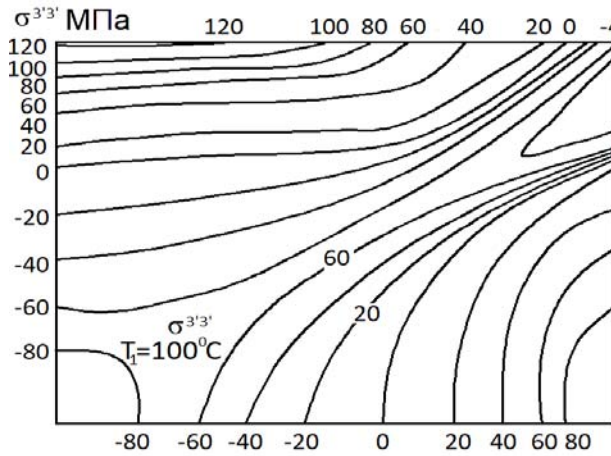


Рис.9.17

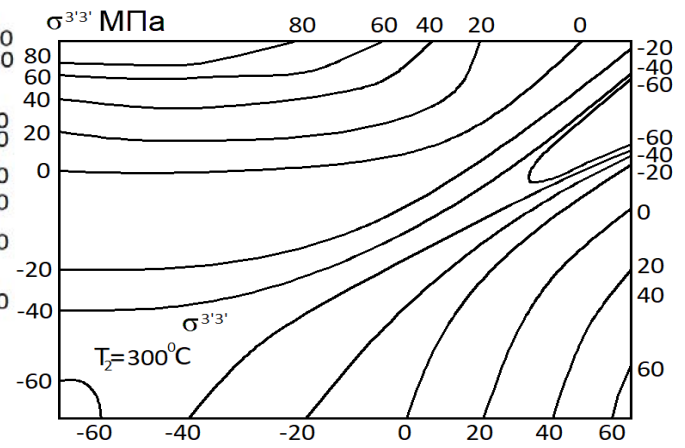


Рис. 9.18

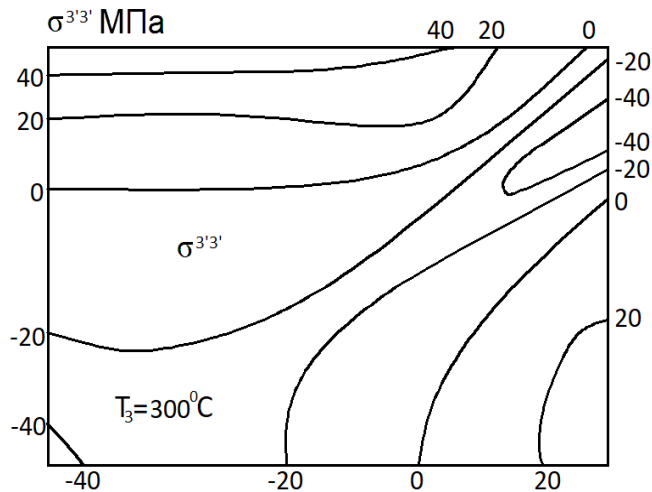


Рис. 9.19

На рис.9.20 представлена еюра колових напружень по боковій поверхні деформованої заготовки до $H/H_0 = 0.53$ при різній температурі плити преса. Стискаючі окружні напруження, що виникають у верхній частині заготовки при її охолодженні, призводять до збільшення конусності поперечного перерізу і, отже, до виникнення і зростання розтягуючи напружень в центральній частині. При цьому форма бічної поверхні наближається також, як при терті, до бочкоподібної.

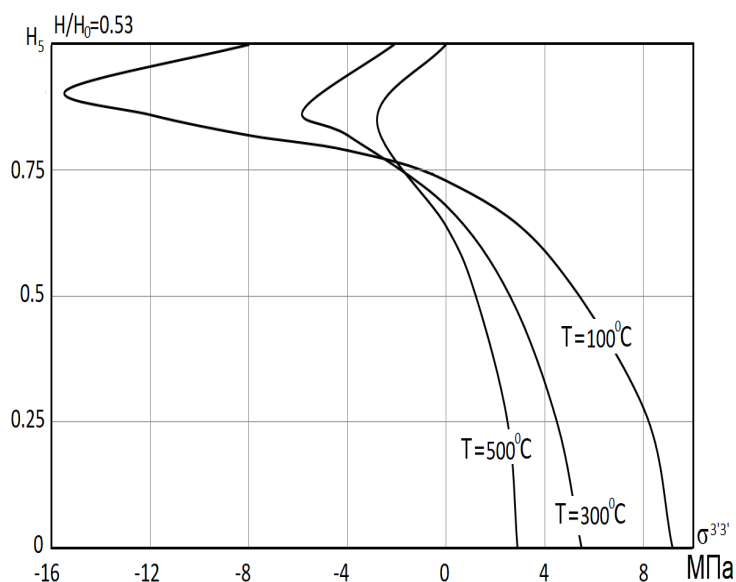


Рис. 9.20

Таким чином, чисельні дослідження процесу осадки циліндричної заготовки показали, що зміна умов теплообміну призводить до більш нерівномірного характеру розподілу напружень по поперечному перетину заготовки, розширенню зони розтягуючих окружних напружень, зростанню величини останніх, що може позначитися на якості виробів, що виготовляються.

Наведені вище результати розрахунків реальних технологічних процесів дають підставу зробити висновок, що розроблена методика дозволяє проводити дослідження деформування, стійкості, закритичної поведінки і формозмінення широкого класу оболонкових, масивних і комбінованих вісесиметричних конструкцій з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності при силовому і нестационарному температурному навантаженні.

РОЗДІЛ 10. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ МАГІСТРАЛЬНИХ ТРІЩИН ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ З УРАХУВАННЯМ ФОРМОЗМІНЕННЯ

В багатьох випадках втрата несучої здатності відповідальних елементів конструкцій відбувається внаслідок розвитку магістральних тріщин. Можливості методики дослідження процесів руйнування зазначеного класу об'єктів значною мірою обумовлені ефективністю скінченноелементної схеми отримання розрахункових співвідношень, методики обчислення параметрів механіки руйнування і алгоритму визначення траєкторії магістральної тріщини

Просторовий характер задач механіки руйнування призводить до необхідності використання СЕ, які базуються на співвідношеннях теорії пружності навіть при оцінці тріщиностійкості тонкостінних оболонкових об'єктів, не кажучи вже про тіла складної структури. Саме в цих випадках особливо наочно проявляється доцільність застосування універсальних СЕ, розроблених на основі МССЕ при формуванні загальної дискретної моделі конструкції

В роботах [22, 23, 248] присвячених розробці ефективних енергетичних підходів до визначення параметрів лінійної та нелінійної механіки руйнування переконливо доведена перевага метода реакцій порівняно з існуючими. тому подальше узагальнення і розвиток модифікованого метода реакцій на нові класи задач механіки руйнування, пов'язані з розробкою методів математичного моделювання процесів розвитку магістральних тріщин при термосиловому навантаженні та формозміненні є достатньо обґрунтованим і перспективним.

Визначення параметрів локального руйнування для тріщин є важливою, але частковою задачею механіки руйнування. На практиці частіше зустрічаються випадки, коли відома незначна початкова тріщина невеликої довжини і необхідно визначити умови руйнування конструкції, тобто критичну довжину тріщини при заданому навантаженні. При цьому, від правильності обчислення траєкторії розвитку тріщини значною мірою залежить достовірність усього розрахунку,

оскільки обчислення параметрів руйнування вздовж траєкторії, що не збігається із реальною, може привести до хибної оцінки несучої здатності конструкції в цілому.

Питання моделювання розвитку тріщини за допомогою МСЕ розглянуто, зокрема, в роботі авторів [19]. В даній роботі за основу прийнята орієнтація на використання універсальних СЕ, що дозволяє оптимізувати дискретні моделі МСЕ при розрахунку тіл складної структури. Визначення параметрів механіки руйнування реалізується модифікованим методом реакцій, ефективність якого при змішаному руйнування продемонстрована в роботах [22, 23, 71, 74, 248].

10.1 Алгоритм визначення траєкторії магістральної тріщини на основі модифікованого методу реакцій

Для визначення траєкторії розвитку початкової тріщини (рис. 10.1) на основі МСЕ використовується покроковий алгоритм [130]:

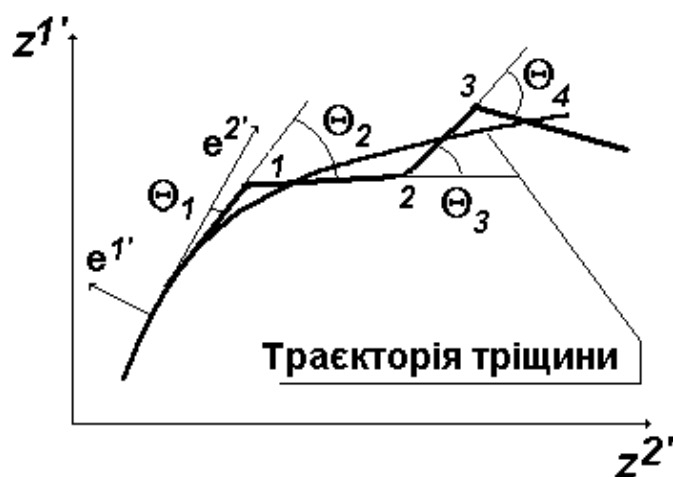


Рис. 10.1.

В цьому випадку на кожному кроці прирощення довжини тріщини обчислюються значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_I і K_{II} , які дозволяють визначити напрямок розвитку тріщини:

$$\Theta_i = f(K_{Ii}, K_{IIi}). \quad (10.1)$$

Вважаючи далі, що тріщина подовжиться вздовж отриманого напрямку на деякий відрізок Δl , одержимо точку I , що несуттєво відхилилася від дійсної траєкторії, внаслідок того, що подовження відбулося не по дійсній траєкторії, а по дотичній до неї. Обчисливши для точки I КІН K_I і K_{II} і, використовуючи умову (10.1), визначимо новий кут Θ_2 , що поверне траєкторію таким чином, щоб наблизити її до дійсної. Повторюючи дану операцію n разів, одержимо ламану траєкторію розвитку тріщини, що обумовлено використанням покрокового алгоритму, який ґрунтується на відповідних диференціальних залежностях розвитку тріщини. Для одержання дійсної траєкторії проводиться згладжування отриманої ламаної лінії. При зміні кроку Δl можна знайти таке його мінімальне значення, подальше зменшення якого не призведе до зміни одержуваної траєкторії. Оскільки отримана траєкторія має вигляд ламаної лінії, то після її вирівнювання варто провести K -тарировку (обчислення значень КІН уздовж траєкторії тріщини) [15; 66].

Відповідно до критерію локального руйнування, запропонованого Ердоганом і Сі в статті [245], розвиток тріщини при несиметричному навантаженні відбувається в напрямку, перпендикулярному дії максимальних розтягуючих напружень. Розподілення напружень при вершині гострої тріщини в цьому випадку можна визначити за формулами:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \sin \theta + K_{II} \cos \theta). \quad (10.2)$$

Напрямок поширення тріщини можна визначити, використовуючи умову $\partial\sigma_\theta/\partial\theta = 0$ або $\tau_{r\theta} = 0$, звідки одержати рівняння для визначення Θ_i :

$$K_I \sin \Theta_i + K_{II} (3 \cos \Theta_i - 1) = 0. \quad (10.3)$$

Вираз (10.1) в цьому випадку матиме вигляд:

$$\Theta_i = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda_K^2}}{4\lambda_K} \right),$$

де

$$\lambda_K = \frac{K_{II}}{K_I}. \quad (10.4)$$

Визначення КІН в наведених формулах може бути здійснено як із використанням прямих так і енергетичних методів. Прямі методи ґрунтуються на використанні скінченоелементних результатів визначення параметрів НДС в околі вершини тріщини. Відповідна методика і результати її апробації наведені в [14, 19, 22, 157].

Енергетичний метод передбачає визначення КІН на основі величин інтеграла Черепанова – Райса [190, 290] - J – інтеграла:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$

де Γ – контур інтегрування; $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}$ – питома потенційна енергія деформування в точках контура, σ_{ij} – напруження; u_i – переміщення, n_j – нормаль до контура Γ в точках визначення переміщень і напружень.

Безпосередня релаксація наведеної формули в термінах величин напружень і деформацій отримала назву «метод напружень» для обчислення J – інтеграла. В дискретній моделі величини напружень і деформацій можуть бути подані через величини вузлових реакцій і переміщень. Такий підхід отримав назву «метод реакцій». Обидва підходи передбачають процедуру обчислення J – інтеграла по контуру інтегрування навколо вершини тріщини. Реалізація цих методик і результати їх апробації описані в роботах [14, 19, 22].

Зв'язок КІН з величиною J за умов лінійного деформування визначається за формулою [157, 190]:

$$J = kK_I^2/E,$$

де $k = 1$ за умов плоского напруженого стану і $k = 1 - \nu^2$ для плоскої деформації, E – модуль Юнга.

Зауважимо, що досвід проведення досліджень збіжності і достовірності розв'язків при використанні обидвох методів засвідчив, що при побудові дискретних моделей тіл з тріщинами в околі вершини тріщини доцільно використовувати СЕ сітки із квадратними скінченними елементами із характерним розміром СЕ, що дорівнює 1/10 довжини тріщини [14, 19, 22].

Для обчислення величин J – інтеграла при змішаному руйнуванні із використанням подання J – інтеграла за величинами вузлових реакцій і переміщень розглянемо контур $CABDD'B'A'C'$, що охоплює вершину тріщини і має розрив на поверхні тріщини (рис. 10.2,а).

Цей контур може бути поданий як сума двох П – подібних частин замкнених контурів, що розташовані по обидві сторони від тріщини відповідно (рис. 10.2, а):

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'} \quad (10.5)$$

З іншого боку величини J – інтеграла по кожному з замкнених контурів $CABDVSC$ і $C'A'B'D'V'S'C'$ можуть бути подані як суми J – інтеграла по їх П – подібним частинам і лініям, що проходять вздовж поверхні тріщини. При цьому, згідно із фундаментальною властивістю інваріантності J – інтеграла, його значення по замкненому контуру повинно дорівнювати нулю:

$$J_{O(CABDVSC)} = J_{CABD} + J_{CSVD} = 0,$$

$$J_{O(C'A'B'D'V'S'C')} = J_{C'A'B'D'} + J_{C'S'V'D'} = 0. \quad (10.6)$$

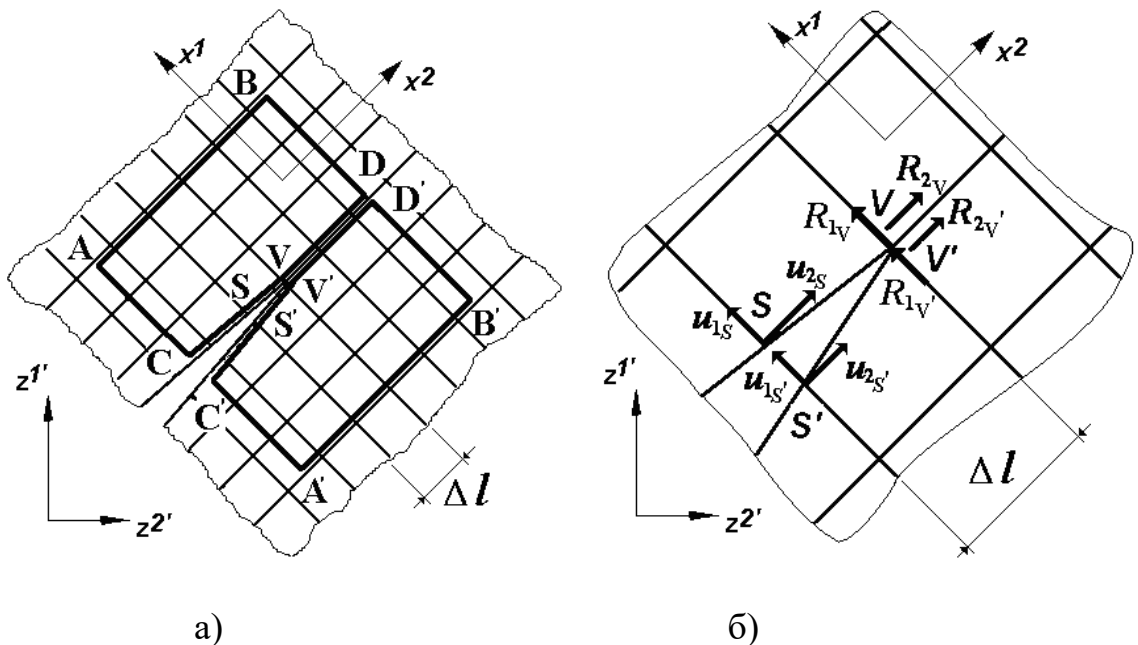


Рис. 10.2.

Відповідно J – інтеграл по контуру $CABDD'B'A'C'$ буде дорівнювати взятій з протилежним знаком сумі J – інтегралів по лініям $CSVD$ і $C'S'V'D'$:

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'} = -J_{CSVD} - J_{C'S'V'D'}. \quad (10.7)$$

Враховуючи виконання умов рівноваги вузлів отримаємо, що J – інтеграл по лінії дорівнює добутку реакцій вузла V вершини тріщини на переміщення вузла S перед вершиною тріщини:

$$J_{CSVD} = \frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta x_2},$$

$$J_{C'S'V'D'} = \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta x_2}, \quad (10.8)$$

де $\{R\}_V = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_V^T$ і $\{R\}_{V'} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_{V'}^T$ – вектори сумарних вузлових реакцій СЕ, що розташовані з кожного боку від вершини тріщини по напрямках місцевої системи координат СЕ; $\{u\}_S = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_S$, $\{u\}_{S'} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{S'}$ – вектори вузлових переміщень, рис. 10.2,б.

При цьому, зважаючи на виконання умов рівноваги у вершині тріщини:

$$\{R\}_V = -\{R\}_{V'}. \quad (10.9)$$

Підставивши ці рівняння у вираз для J – інтеграла по контуру, одержимо:

$$J_{CABDD'B'A'C'} = -\frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta x_2} - \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta x_2} = \frac{\{R\}_{V'}}{2\Delta x_2} (\{u\}_S - \{u\}_{S'}) =$$

$$= \frac{1}{2\Delta x_2} \left(\begin{Bmatrix} R_{V'_1} & R_{V'_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{S_1} - u_{S'_1} \\ u_{S_2} - u_{S'_2} \end{Bmatrix} \right). \quad (10.10)$$

Таким чином, вираз J – інтеграла має два добутки реакцій і переміщень по напрямках x_1 і x_2 , які відповідатимуть J_I і J_{II} .

$$J = J_I + J_{II} = \frac{1}{2\Delta x_2} \left(R_{V_1'} (u_{S_1} - u_{S_1'}) + R_{V_2'} (u_{S_2} - u_{S_2'}) \right). \quad (10.11)$$

В подальшому процедуру обчислення J – інтеграла за формулою (10.11) яка, містить величини переміщень і реакцій лише в найближчих від вершини тріщини вузлах, будемо називати модифікований метод реакцій [248].

Для обґрунтування ефективності модифікованого методу реакцій в задачах змішаного руйнування проведено його порівняння з методами DAST і еквівалентного об'ємного інтегрування, доповнених процедурою декомпозиції [261, 262]. З цією метою були розглянуті тестові задачі про деформування нескінченної пластини з горизонтальною і похилою тріщиною в умовах нормального відриву і поперечного зсуву, а також при змішаному руйнуванні (рис. 10.3).

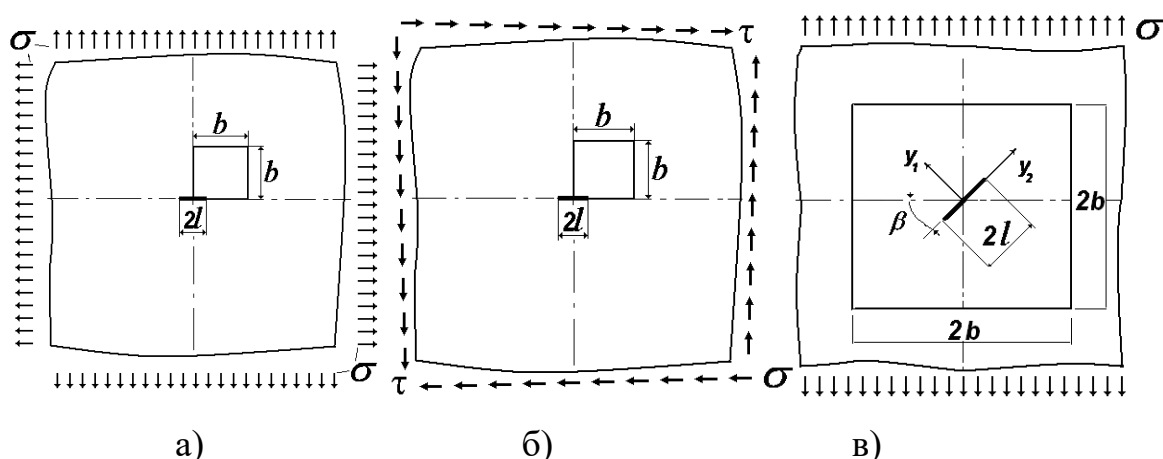


Рис. 10.3

Проведені дослідження показали, що величина похибки результатів, отриманих на дискретних моделях одного порядку, становить в

середньому близько 10% для вказаних методів, а для модифікованого методу реакцій – близько 1%. Причому, в останньому випадку однакові результати були отримані при використанні всіх трьох типів скінченних елементів – загального, модифікованого і універсального.

Таким чином, вираз (10.11) дозволяє отримувати більш точні величини J_I і J_{II} при змішаному руйнуванні без застосування додаткової обробки результатів скінчено-елементного розв'язання задачі.

10.2. Достовірність результатів визначення траєкторії магістральних тріщин

На першому етапі розглянемо задачу про визначення прямолінійної траєкторії розвитку похилої початкової тріщини в пластині, що знаходиться під дією одновісного розтягу (рис. 10.4).

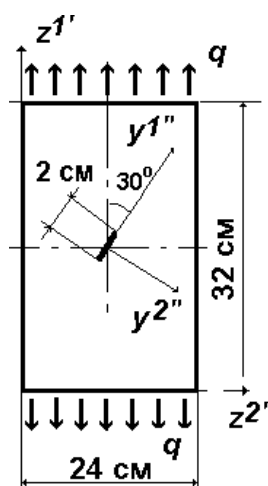


Рис. 10.4

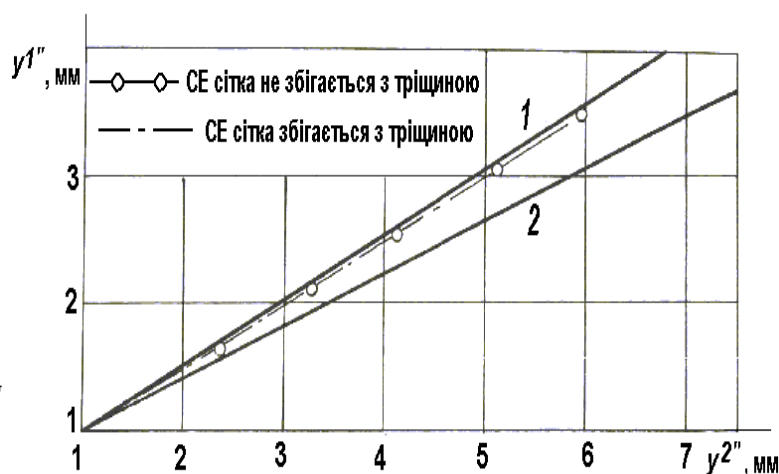


Рис. 10.5.

На рис. 10.5 наведені траєкторії розвитку похилої тріщини в системі координат $y^{i''}$, отримані шляхом розрахунку ([199], суцільна лінія 1), експериментально ([90], суцільна лінія 2), а також отримані за описаною методикою (штрих пунктирна лінія). Обчислена на основі формули (10.4)

траєкторія добре узгоджується з експериментальними і розрахунковими результатами інших авторів.

На другому етапі була досліджена точність визначення КІН K_I і K_{II} вздовж отриманої траєкторії розвитку тріщини. На рис.10.6 наведена залежність K_I і K_{II} від відношення проекції тріщини на вісь z^2 до ширини пластини. Наведені величини K_I і K_{II} визначені за формулами:

$$\tilde{K}_I = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}, \quad \tilde{K}_{II} = \frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}, \quad (10.12)$$

де σ – розтягуюче навантаження, a – проекція тріщини на вісь z^2 .

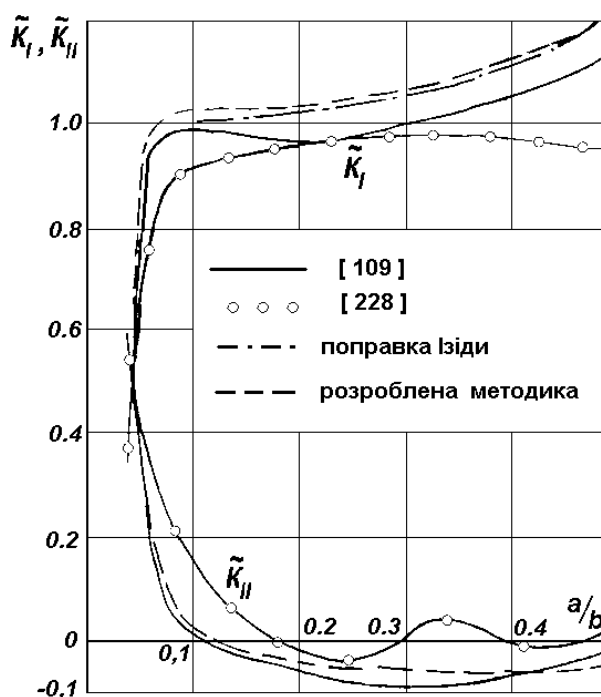


Рис. 10.6.

Суцільною лінією на графіку показані результати, що отримані в роботі [90], кружками – дані роботи [199], штрихпунктиром – поправка Ізіді (значення K_I для обмеженої пластини з горизонтальною тріщиною), пунктиром – значення

K_I и K_{II} , отримані із використанням модифікованого методу реакцій.

Отже, розподілення \tilde{K}_I , добре узгоджується з наведеними розв'язками з похибкою в межах 5%. Але отримані значення є дещо ближчими до значень графіку \tilde{K}_I для пластини з горизонтальною тріщиною (поправка Ізиди). Відхилення даних, викладених в роботі [90], від поправки Ізиди спостерігається при відношенні $a/\delta > 0,2$, де, навпаки, узгодження повинно було б бути кращим. Це обумовлено тим, що тріщина під час зростання прямує до розташування, перпендикулярного до дії розтягуючого навантаження, довжина тріщини наближується до розміру її проекції на вісь z^2 , а конфігурація – до горизонтальної тріщини.

Дослідження достовірності моделювання розвитку криволінійної магістральної тріщини проведене на тестовому прикладі про визначення траєкторії тріщини, що розвивається, від малого надрізу, глибиною 0,254 см і K -тарировки уздовж неї в зразку коритоподібної форми (рис. 10.7).

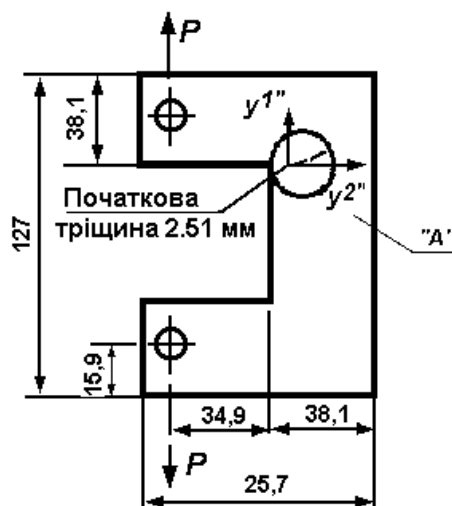


Рис. 10.7

Отримані траєкторії тріщини показано на рис. 10.8,*a* суцільною лінією в системі координат з центром у кінчику початкової тріщини. Точками на рис. 10.8,*a* показані результати досліджень, що наведені в роботі [266]. Результати

практично збігаються між собою, а також збігаються з експериментальними даними, отриманими Джераммом [270]. На рис. 10.8,б наведені графіки КІН, що побудовані по довжині тріщини: величини K_I на порядок більше, ніж K_{II} .

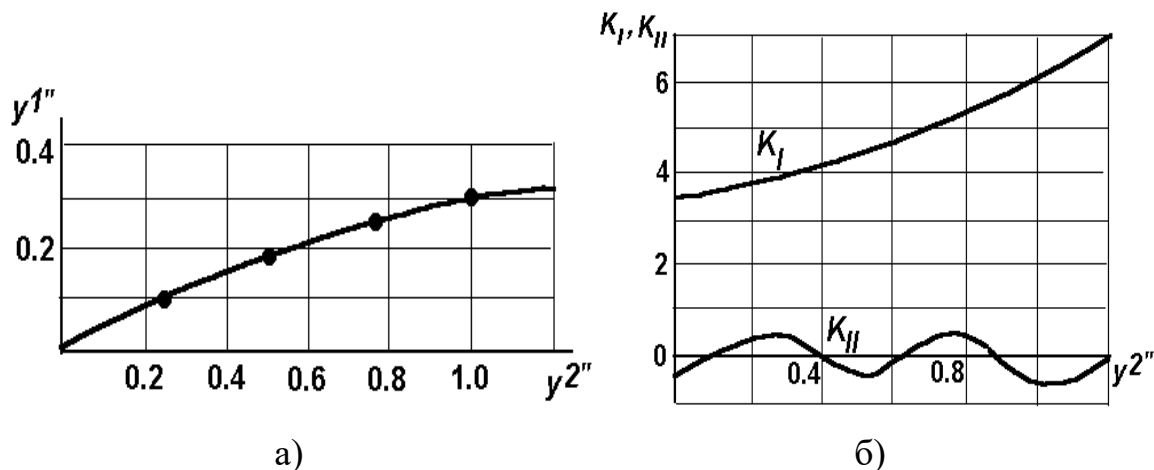


Рис. 10.8.

На рис. 10.9 наведена крива залежності приведеної величини

$$\tilde{K} = \frac{\sqrt{EG_{\max}}}{P/B\sqrt{W}}, \quad (10.13)$$

від відносної глибини тріщини $\frac{a}{W}$. У виразі для \tilde{K} застосовані такі позначення: P – прикладена сила; B – товщина пластинки; $W = 3,81$ см – ширина зразка; a – горизонтальна проекція довжини тріщини;

$$G_{\max} = \frac{(1+\nu)(1+k)}{4E} \sqrt{(K_I^4 + 6K_I^2 K_{II}^2 + K_{II}^4)}. \quad (10.14)$$

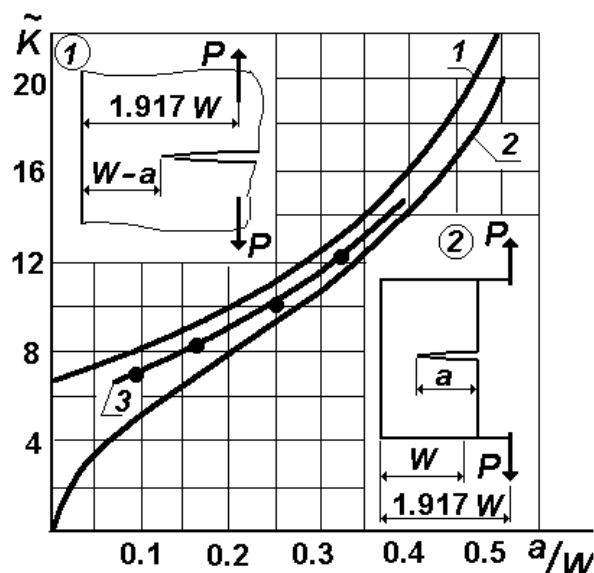


Рис. 10.9.

На рис. 10.9 також наведені результати розрахунку двох тестових задач Париса і Сі [173], один з яких є задачею про напівнескінченний розріз у краю напівплощини (крива 1), а інший – задача про полосу з боковим надрізом, подібним до нижньої сторони тріщини конструкції (крива 2). Отримані результати (крива 3) лежать в межах результатів двох зазначених тестових прикладів, що є логічним і додатково підтверджує достовірність отриманих результатів.

Отже, розроблені підходи до розв'язання задач механіки руйнування дозволяють з високим ступенем точності визначати параметри механіки руйнування та проводити визначення траєкторії криволінійних тріщин.

10.3. Обґрунтування ефективності використання модифікованого методу реакцій у нелінійних задачах механіки руйнування

З метою обґрунтування ефективності і достовірності використання модифікованого методу реакцій для обчислення J -інтеграла, в умовах плоскої деформації з урахуванням геометричної нелінійності, було розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з

тріщиною скінченної довжини $2l=2$ см (рис. 10.10,а), дискретна модель якої наведена на рис. 10.10,б.

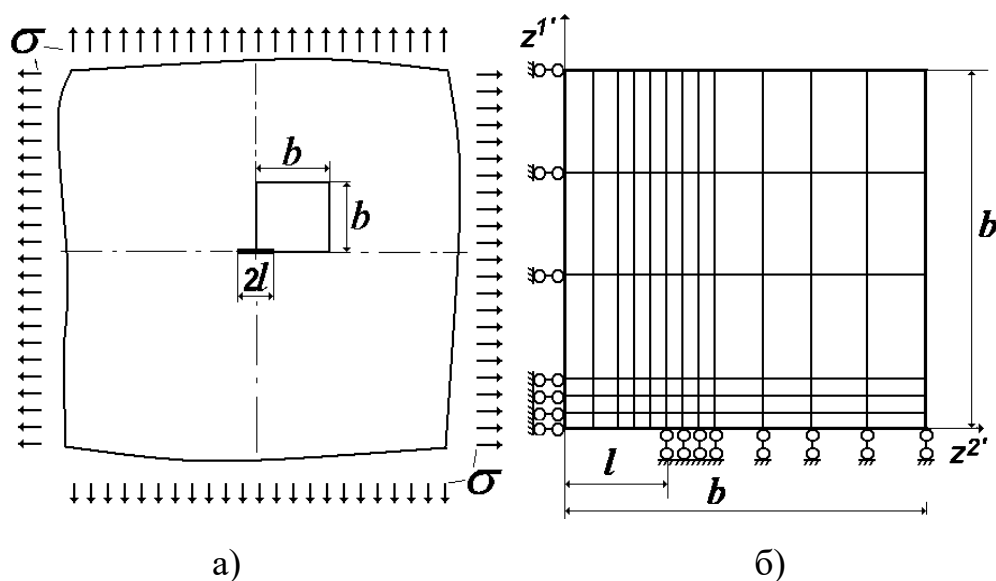


Рис. 10.10.

Вихідні дані: розтягуюче зусилля $q = 100 \text{ кг} / \text{см}^2$; модуль пружності $E = 10^n \text{ кг} / \text{см}^2$ змінюється в інтервалі значень показника ступеня n від 3 до 4, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.333$ [128].

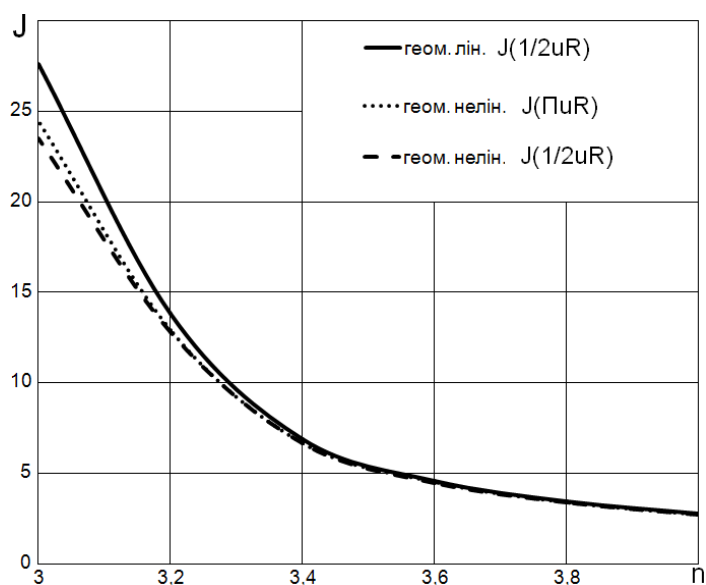


Рис. 10.11.

Наведені на рис. 10.11 графіки дозволяють зробити висновок, що модифікований варіант (результат позначений на графіку « $J(1/2uR)$ ») і основний варіант метода реакцій (результат позначений як « $J(\Pi uR)$ ») практично співпадають.

Для доведення високої ефективності модифікованого варіанту методу реакцій при розв'язанні задач з урахуванням фізичного та геометрично нелінійного деформування, було розглянуто тестовий приклад про деформування прямокутної пластини з боковою тріщиною рис. 10.12.

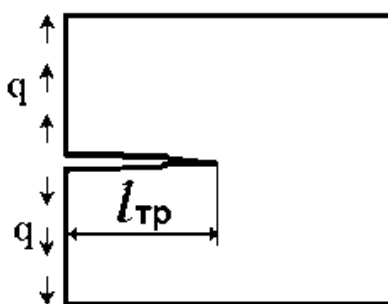


Рис. 10.12.

Матеріал об'єкту – сталь 12Х2МФА, фізико-механічні характеристики якої $E = 2.05 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$ [91д]. Закон пластичного деформування має наступний вигляд :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_m} = 1 + 0.645 (\bar{\varepsilon}_p)^{0.388}, \quad (10.15)$$

де $\sigma_m = 637$ МПа - межа текучості; $\bar{\sigma}$ - інтенсивність нормальних напружень; $\bar{\varepsilon}_p$ - інтенсивність деформацій.

Розвиток деформацій пластичності та залежності J –інтеграла при збільшенні навантаження показані на рис. 10.13,а і 10.14,а для плоскої деформації та на рис. 10.13,б і 10.14,б для плоско напруженого стану відповідно.

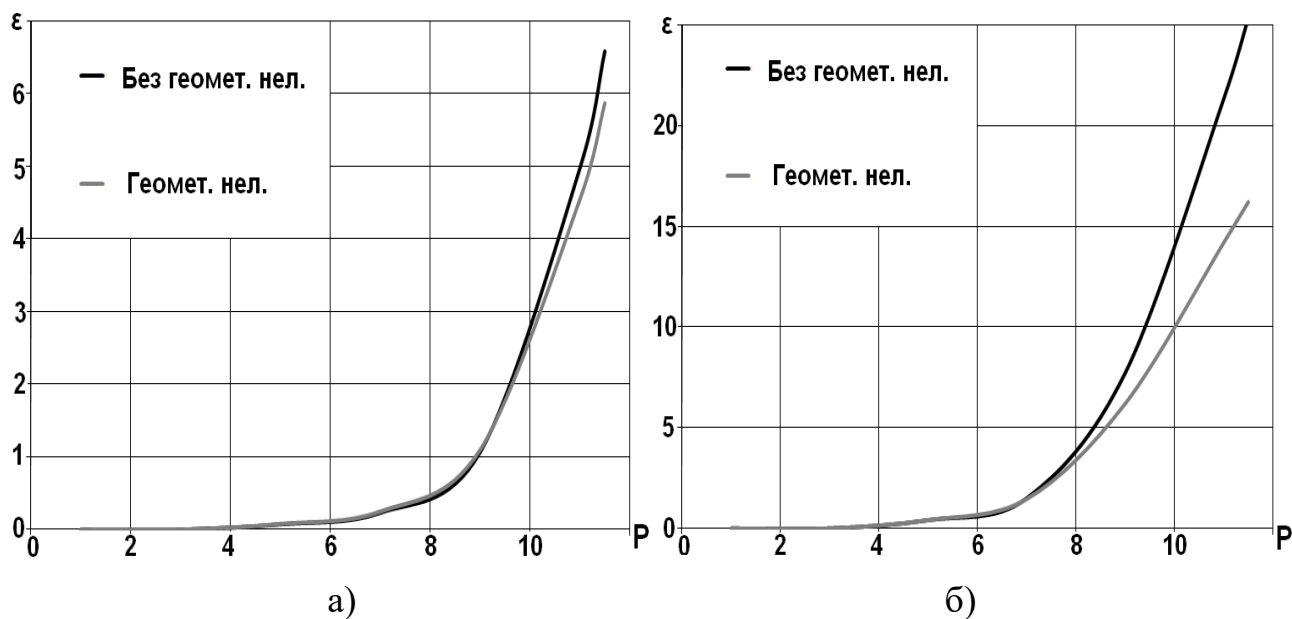


Рис. 10.13.

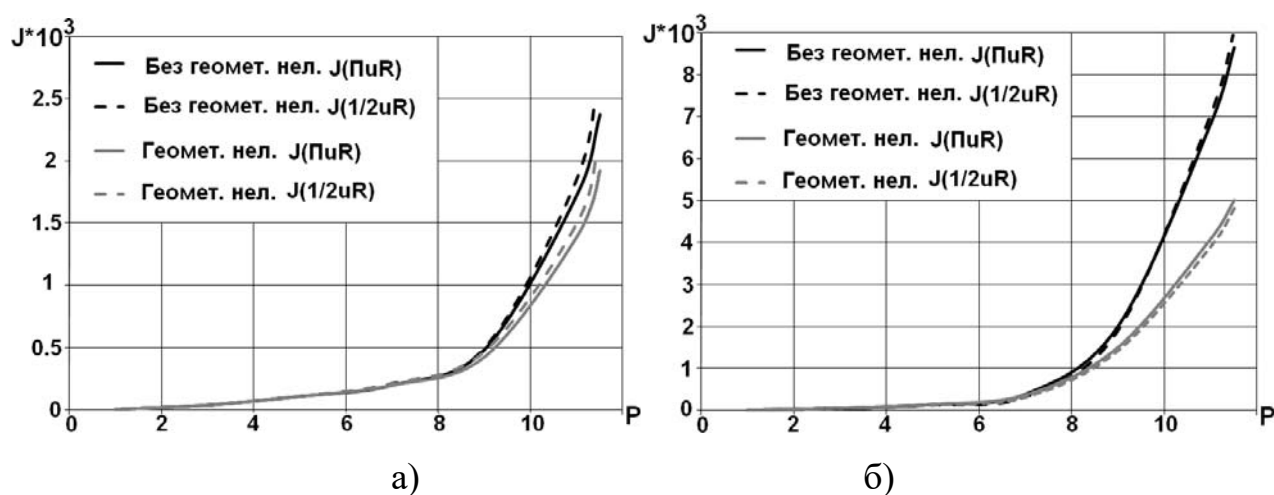


Рис. 10.14.

Наведені результати показують, що як для плоско деформованого так і для плоско напруженого станів розв'язки задач в пружно-пластичній постановці отримані модифікованим методом реакцій (за формулами (10.11), на рисунку позначені « $J(1/2uR)$ ») і основним методом реакцій (на рисунку позначені « $J(\Pi uR)$ ») практично збігаються між собою. Аналогічний результати отримані і у випадку урахування геометричної нелінійності.

10.4. Достовірність результатів визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень при термосиловому навантаженні

Для обґрунтування достовірності результатів визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) на основі модифікованого методу реакцій розглянута в плоскій постановці задача про деформування в нерівномірному температурному полі нескінченного товстостінного циліндра з поздовжньою тріщиною. Поперечний перетин циліндра показаний на рис.10.15,а, а на рис.10.15,б представлена сіткова модель перетину, ідентична використаній в монографії [14] для визначення КІН через величини J^* .

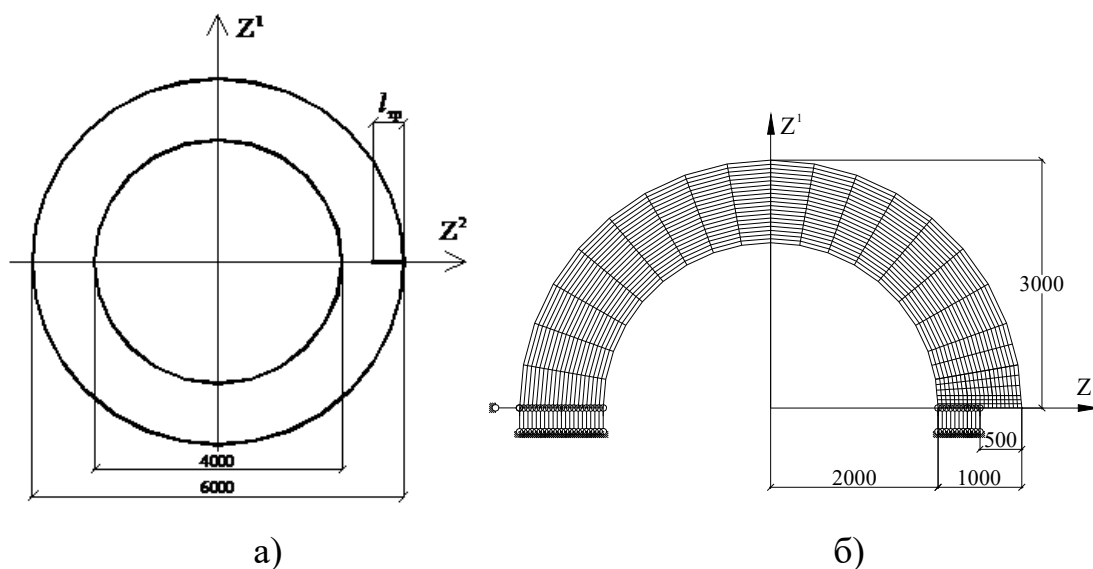


Рис.10.15

Матеріал циліндра виготовлений зі сталі 38ХНЗМФА, для якої модуль пружності $E=210\text{МПа}$, коефіцієнт Пуасона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\alpha=13,5 \cdot 10^{-6} \text{град}^{-1}$. Радіальний розподіл температури описується логарифмічним законом:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r}{r_2}} \quad (10.16)$$

де T, r - температура та радіус поточної точки; T_1, r_1, T_2, r_2 - температури та радіуси відповідно внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра. $T_1 = 100 \text{ град}$, $T_2 = 0$, $r_1 = 2 \text{ м}$, $r_2 = 3 \text{ м}$. Довжина тріщини $l_{mp} = 0.5 \text{ м}$.

Обчислення КІН проводилось прямим та енергетичним методами. Значення КІН, обчислене методом піддатливості для сітки із розмірами СЕ в околі вершини тріщини $l_{el} = \frac{l_{mp}}{20}$, було прийнятим за еталонне. Як можна побачити із результатів (табл.10.1) три методи дають майже однакові значення КІН.

Таблиця 10.1.

$\frac{l_{mp}}{l_{el}}$	Прямий метод $K_I(u)$ (МПа $\sqrt{м}$)				Модифікований метод реакцій		Метод піддатливості
	по обл. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	по 1 т. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	$K_I(J^*)$	$\delta(\%)$	$K_I(G)$
10	248	4.4	234.7	1.2	235.4	0.9	235.9
20	238.4	0.4	231.6	2.5	237.4	0.1	237.6

Наступною тестовою задачею була прямокутна пластина з боковим надрізом жорстко затиснена по краям, що рівномірно охолоджується на величину перепаду температур $\Delta T = 100 \text{ град}$ (рис.10.16,а).

Фізико-механічні властивості аналогічні попередній тестовій задачі. Із врахуванням симетрії дискретні моделі розроблені для половини пластини. На рис.10.16,б показана дискретна модель в якій розміри СЕ в околі вершини

тріщини складають відповідно $l_{el} = \frac{l_{mp}}{10}$ та $l_{el} = \frac{l_{mp}}{20}$.

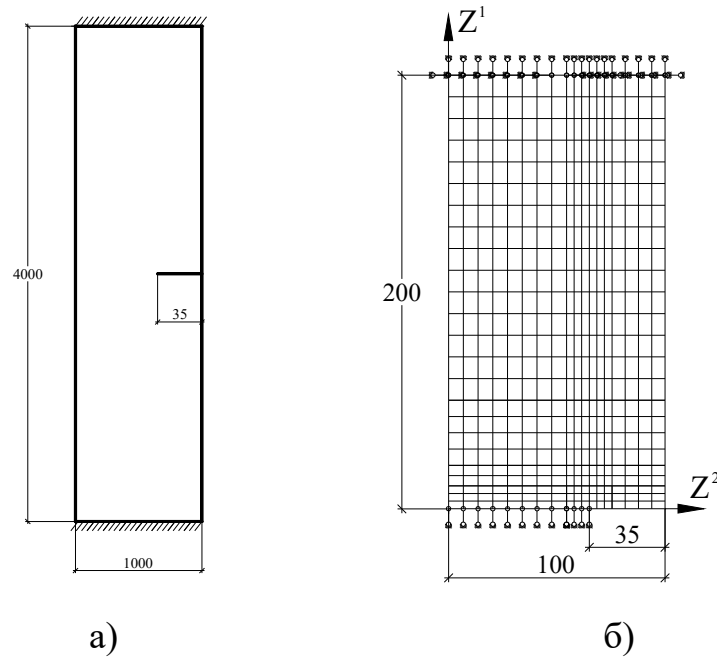


Рис. 10.16

Результати розрахунку показали, що як і в попередній задачі, метод піддатливості та модифікований метод реакцій дають практично однаковий результат (табл.10.2). У вузлі, що є найближчим від вершини тріщини, та енергетичним методом – за величиною J -інтеграла. Отримані результати відрізняються від еталонних в межах 3%.

Таблиця 10.2

l_{mp}/l_{el}	Прямий метод $K_I(u)$ ($МПа\sqrt{м}$)				Модифікований метод реакцій		Метод піддатливості
	по обл. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	по 1 т. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	$K_I(J^*)$	$\delta(\%)$	$K_I(G)$
10	519.8	4.8	515.8	5.6	543.4	0.5	543.1
20	520.6	4.7	533.4	2.4	546.2	0	546.3

Отримані в останніх двох тестових задачах результати добре узгоджуються із результатами наведеними в монографії Є.М. Морозова, де було застосовано SE базу ANSYS.

Отримані результати показують високу ефективність розробленої методики визначення КІН в тілах з тріщинами під дією температурного навантаження. Енергетичний метод визначення КІН виявився більш ефективним порівняно із прямим методом.

Дослідження ефективності використання модифікованого методу реакцій до вирішення задач механіки руйнування вісесиметричних тіл було проведено на прикладі про розтяг суцільного циліндра діаметром $D=2$ см і висотою $3D=6$ см з кільцевою тріщиною глибиною $L=0,1; 0,3; 0,5$ см (рис. 10.17). Коефіцієнт Пуассона $\nu=0$, модуль пружності $E=1$.

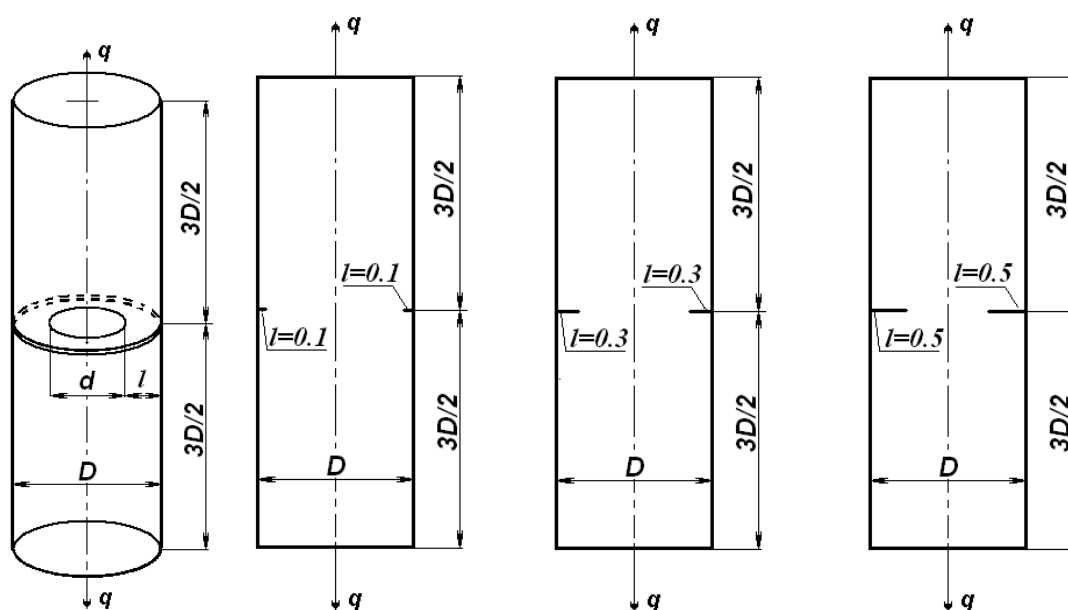


Рис. 10.17.

Дослідження збіжності результатів проведено із застосуванням скінчено елементних моделей із кількістю невідомих: 1512 і 2376 (рис. 10.18). Як правило, при розв'язанні задач механіки руйнування виникає необхідність обчислювати коефіцієнт інтенсивності напружень для однієї тієї ж конструкції з тріщинами

різної довжини. Тому необхідно визначити, який вплив на точність обчислення КІН вносить довжина тріщини.

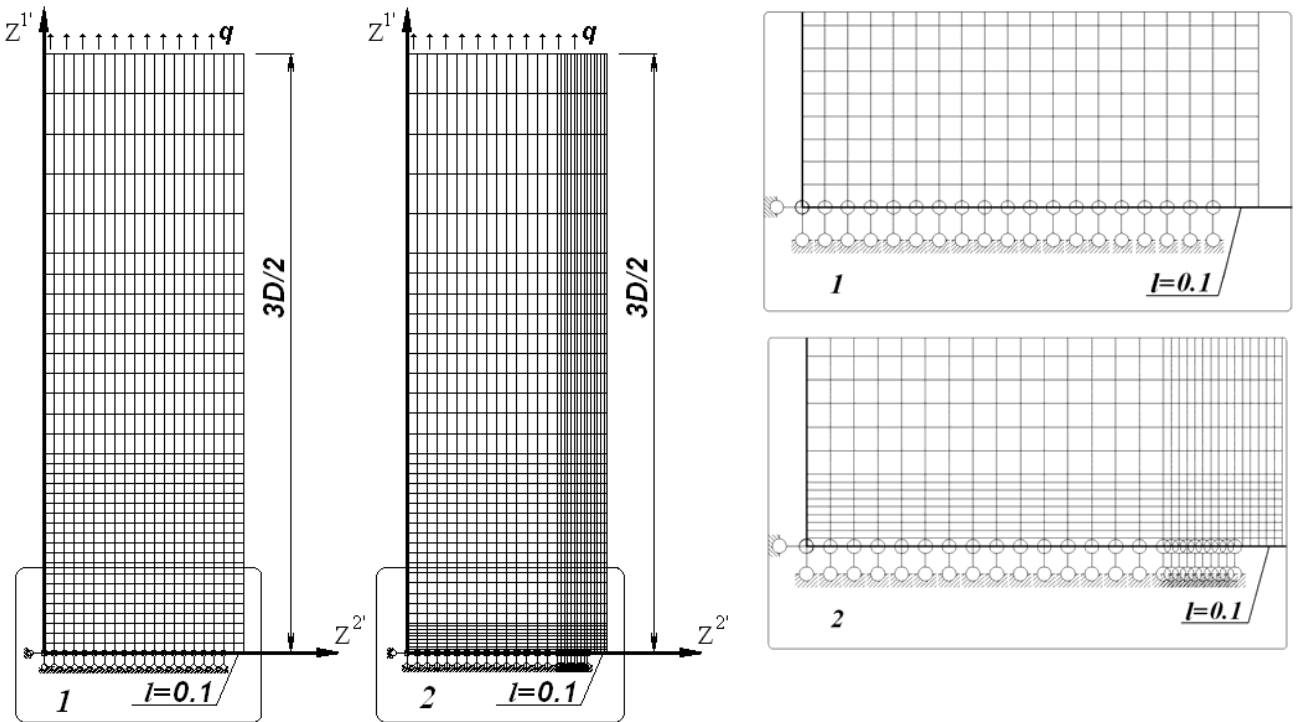


Рис. 10.18.

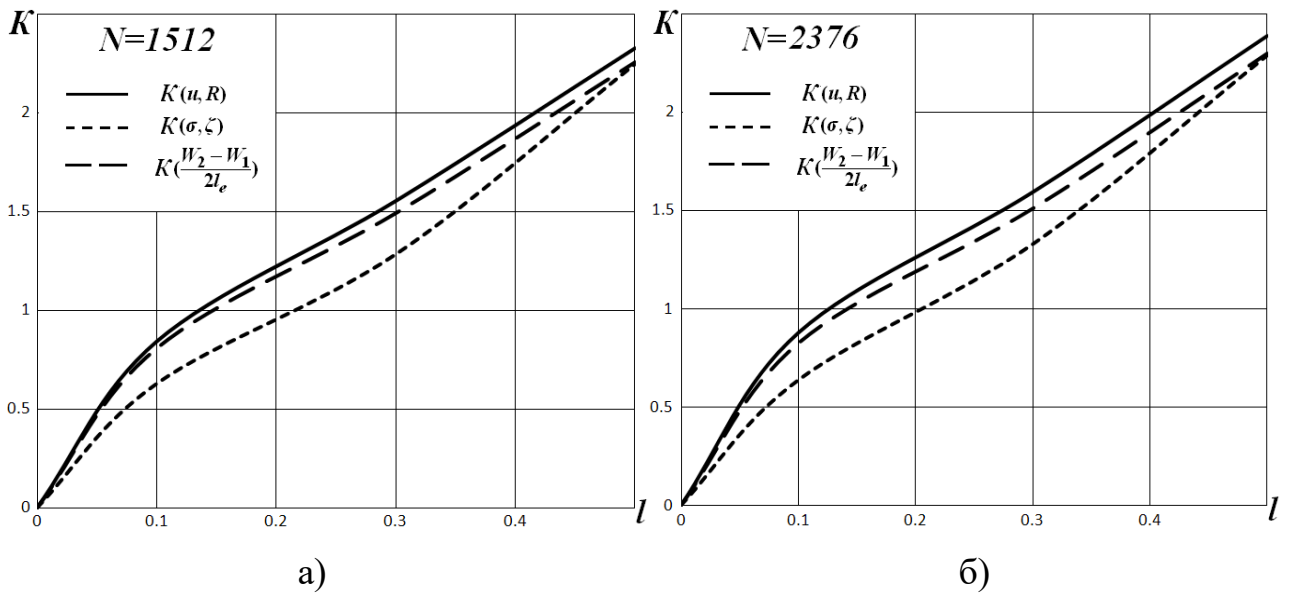


Рис. 10.19.

Для більш детального аналізу збіжності результатів було досліджено розподілення коефіцієнта інтенсивності напружень вздовж радіусів циліндра з

різними довжинами тріщин (рис. 10.19) для трьох досліджуваних методів. В якості еталонного приймалися значення методу піддатливості.

Визначення КІН із використанням модифікованого методу реакцій дозволяє достовірно обчислювати цей параметр механіки руйнування не тільки для плоских-деформованих тіл, а й для тіл обертання.

Таким чином, розроблена методика дозволяє з високим ступенем точності проводити обчислення параметрів механіки руйнування і моделювання траєкторії розвитку тріщини.

10.5. Визначення характеру руйнування і несучої здатності з'єднувального вузла занурюваного контейнеру

Прогнозування несучої здатності високо напружених об'єктів із матеріалів типу скла є складною задачею. Основні труднощі, які стоять на шляху її розв'язання, пов'язані з високою крихкістю скляних елементів комбінованих конструкцій, до яких відносяться занурювані контейнери для дослідження морських глибин. Враховуючи відсутність пластичних деформацій в склоелементах, їх низьку міцність на розтяг і високу чутливість до концентраторів напружень, отримує особливе значення коректне обчислення критичних навантажень. Це призводить до необхідності більш детального розгляду характеру розподілення і рівня напружень, а також процесу розвитку магістральних тріщин, оскільки основною вимогою при експлуатації контейнерів є забезпечення їх герметичності.

В якості об'єкта складної структури розглянуто конструкцію занурюваного контейнера, який складається із скляної оболонки із металевими кришками (рис.10.20,а). Розрахункова схема з розбивкою на фрагменти і одним зі варіантів дискретної моделі представлена на рис.10.20,б і рис.10.20,в.

Конструктивні параметри з'єднання такі: глибина затиснення скляної оболонки в металеву кришку $L=3h$, товщина бічних прошарків $k_1=0,25h$, товщина

прошарку на торці $k_2=0,25h$, де $h=1$ см - товщина оболонки. Передбачалося, що механічні властивості елементів з'єднання характеризуються такими даними: модуль пружності – кришки $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, прошарків $E=0,035 \cdot 10^5$ МПа, оболонки $E=0,8 \cdot 05$ МПа, коефіцієнти Пуасона – кришки $\nu=0,3$ прошарків $\nu=0,34$ оболонки $\nu=0,22$.

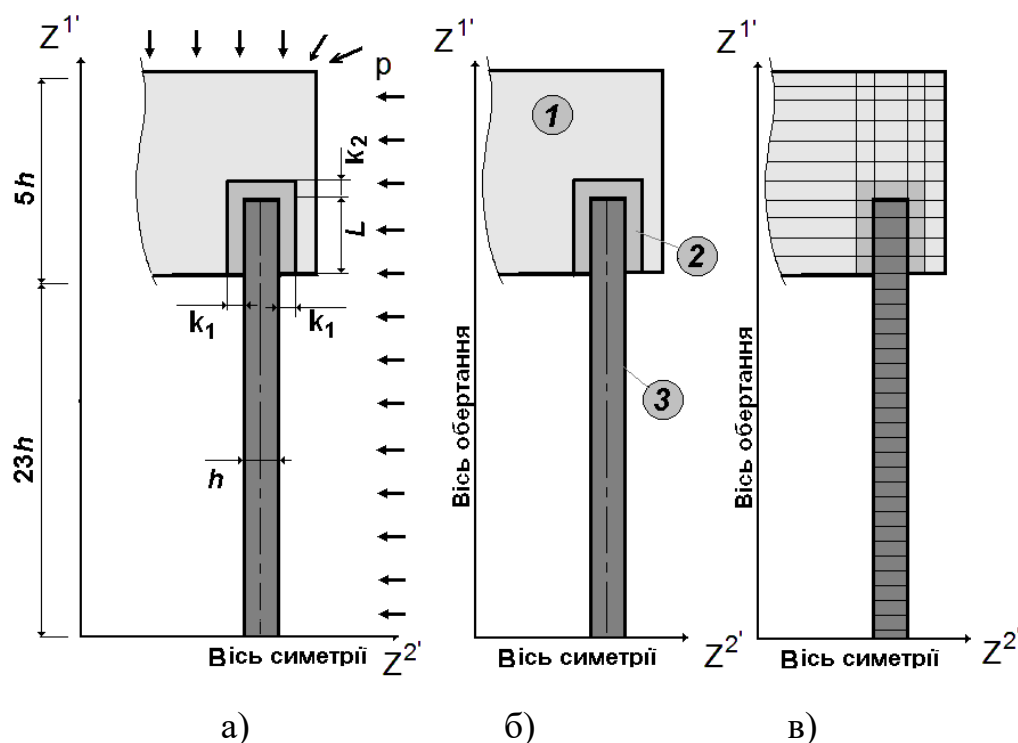


Рис.10.20.

Елементи з'єднання, включаючи матеріал опорного прошарку, володіють різними механічними характеристиками. Розрахунок проводився в припущенні ідеальної пружності всіх складових частин з'єднання і відсутності взаємного зміщення сполучених деталей на поверхнях розділу. Оскільки міцність з'єднання в даному випадку цілком визначається міцністю елемента з крихкого матеріалу, руйнування якого починається зазвичай з поверхні, основну увагу було приділено вивченню напружень на бічних поверхнях скляної циліндричної оболонки.

На першому етапі проведено визначення загального напруженого стану циліндричної оболонки. результати представлені на рис.10.21, де показане розподілення кільцевих σ_θ^3 і осьових σ_z^3 напружень на зовнішній поверхні

оболонки та на внутрішній поверхні σ_{θ}^B , σ_{θ}^B . Їх аналіз показує, що зона розтягуючих напружень локалізується в межах з'єднувального вузла контейнера. Наявність розтягуючих напружень і, відповідно, можливість виникнення та наступного розвитку тріщини в процесі експлуатації об'єкта призводить до необхідності оцінки його несучої здатності з позицій механіки руйнування.

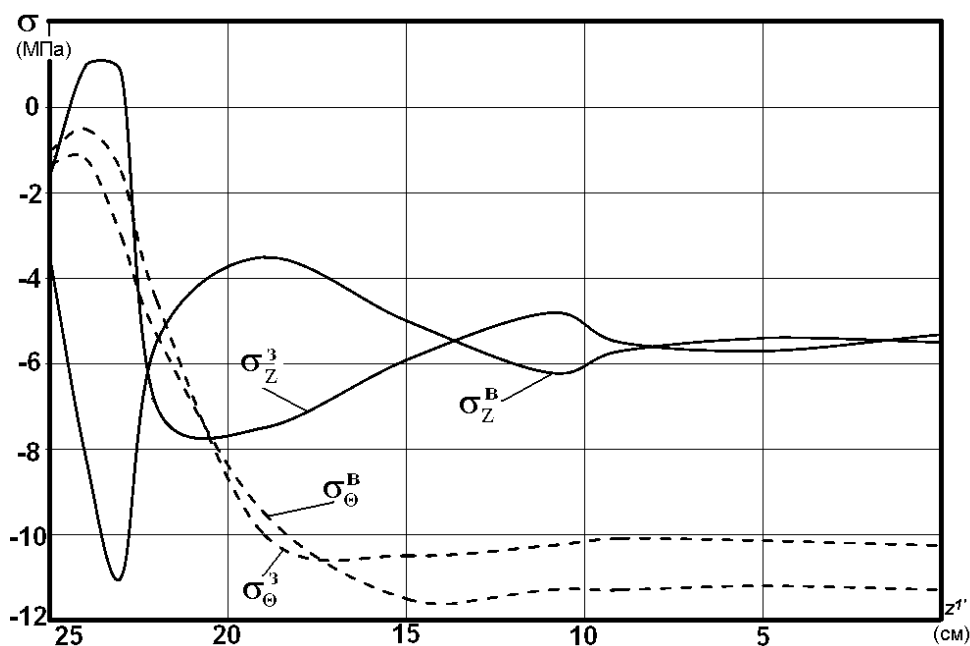


Рис. 10.21.

Початкова тріщина (рис. 10.22,б) розташована на відстані $0,3 h$ від краю заглушки у точці досягнення максимальних розтягуючих напружень, розмір тріщини заданий відповідно до відомих реально існуючих дефектів на поверхні подібних скляних об'єктів. Кут відхилення її від нормалі до зовнішньої поверхні оболонки у бік торця прийнятий таким, що дорівнює 8° і є перпендикулярним напрямку максимальних головних напружень в цій області.

На рис. 10.22,а наведена траєкторія тріщини, обчислена відповідно підходу, викладеному в параграфі 10.1, характерною особливістю якої є її розвиток тріщини вглиб з'єднувального вузла.

Графіки залежності приведених величин КІН $\tilde{K}(l)$ від довжини тріщини при різній інтенсивності зовнішнього навантаження зображені суцільними лініями на рис. 10.22,б.

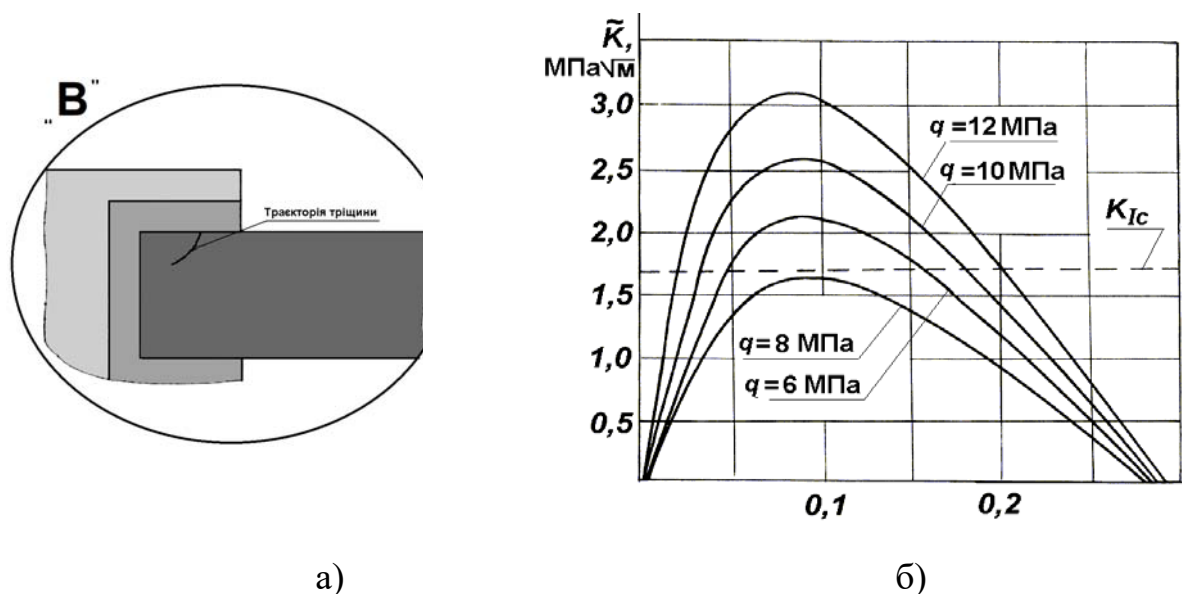


Рис. 10.22.

Пунктирною лінією показане значення критичного коефіцієнта інтенсивності напружень K_{Ic} , що для скла, з якого виготовлений циліндр, дорівнює $1,7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Аналізуючи результати, можна сказати, що навантаження 6 МПа не призведе до розвитку початкової тріщини $l_0 = 0,05 h$. Для більш високих значень зовнішнього тиску критична довжина початкової тріщини буде зменшуватися від $0,05 h$ ($q = 8 \text{ MPa}$) до $0,02 h$ ($q = 12 \text{ MPa}$).

Отже, при інтенсивності зовнішнього тиску, що змінюється в межах до 12 МПа, статичне збільшення тріщини можливо лише до досягнення довжини $l = 0,2 h$, де \tilde{K} знову стає менше ніж K_{Ic} . Траєкторія тріщини при цьому має такий вигляд, що навіть при її подальшому розвитку не повинне відбуватися порушення герметичності з'єднання і катастрофічне руйнування об'єкта. Після досягнення довжини $0,3 h$, тріщина попадає в зону, де значення \tilde{K} знижується до нуля, і подальший її розвиток стає неможливим.

10.6. Визначення ресурсу корпусу стопорного клапана з урахуванням геометричної нелінійності при термосиловому навантаженні

Перед енергетичним машинобудуванням на сьогоднішній час стоїть задача створення нових надійних в експлуатації енергетичних установок та дослідження технічного стану агрегатів, які знаходяться в експлуатації впродовж тривалого часу. Для перших на стадії проектування металевих деталей установок енергетичної промисловості, треба приділяти велику увагу при виготовленні наявності та розвитку тріщиноподібних дефектів, які в процесі експлуатації перетворюються на тріщини. Це призводить до швидкого зносу деталей та стає в подальшому причиною аварій на виробництві. Для агрегатів, які працюють вже багато років основною задачею є визначення величини ресурсу основних деталей.

Аналіз даної проблеми в обох випадках зводиться до дослідження тріщиностійкості об'єкту, яке дає відповідь на питання, чи прикладене до об'єкту навантаження приведе в подальшому до розвитку тріщини, в якому напрямку і чи взагалі внаслідок цього виникнуть катастрофічні руйнування конструкції, або наявність тріщини ніяк не вплине на експлуатаційні можливості деталей.

Для підтвердження вище сказаного було проведено розрахункове дослідження напружено-деформованого стану і умов руйнування корпусу стопорного клапана турбіни на стадії розвитку початкової тріщини з метою оцінки несучої здатності корпусних деталей турбіни при дії стаціонарних і пускових навантажень.

Оскільки на запорі клапана напруження максимальні, то саме це місце є найбільш вірогідним для виникнення і розвитку тріщини.

Для визначення критичної довжини тріщини, наявність якої призведе до лавиноподібного руйнування корпусу клапана, були обчислені КІН K_I і K_{II} вздовж траєкторії тріщини від дії внутрішнього тиску, що виникає в екстремальних умовах. Для окремих точок траєкторії тріщини побудовані деформовані схеми

(рис. 10.23), та наведені ізолінії безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 10.24).

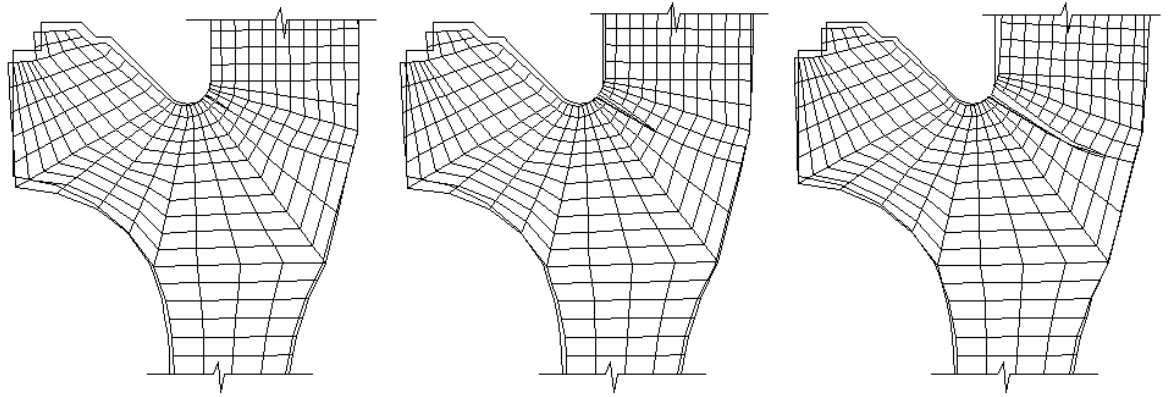


Рис. 10.23.

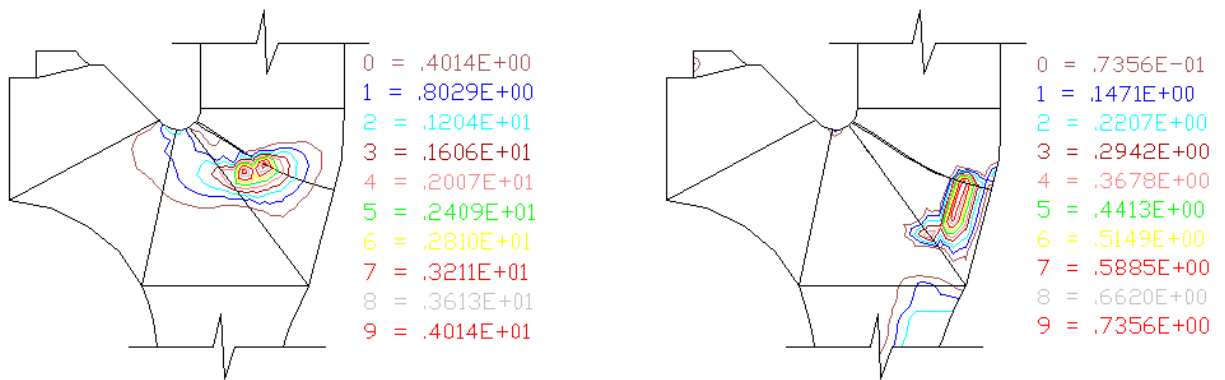


Рис. 10.24.

Для руйнування змішаного типу, при $K_I \neq 0$, $K_{II} \neq 0$ умова руйнування має вигляд :

$$\tilde{K} = K_{Ic} \quad (10.17)$$

де $\tilde{K} = \sqrt{K_I^2 + 1,78K_{II}^2}$ [34, 211].

Із графіка залежності \tilde{K} / K_{Ic} від довжини тріщини ℓ (рис. 10.25) видно, що в інтервалі довжин тріщини $(0.2 \dots 0.6)h$ величина \tilde{K} / K_{Ic} змінюється несуттєво, і лише при наближенні вершини тріщини до зовнішньої поверхні клапана

спостерігається його поступове прискорене збільшення. Також на даному графіку видно, що результати отримані модифікованим методом реакцій нічим не поступаються отриманих в роботі [19]. Катастрофічне руйнування відбудеться при виконанні умови (10.17) по досягненні тріщиною довжини $0,83h$.

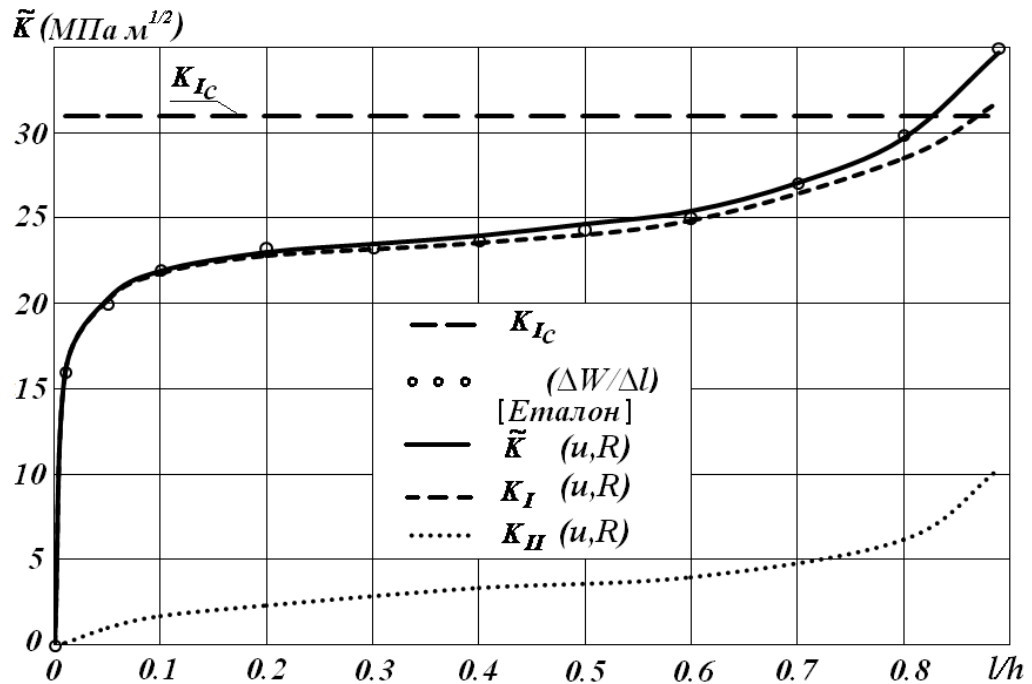


Рис. 10.25.

Обґрунтуванням можливості застосування співвідношень лінійної механіки руйнування до розв'язання даної задачі служить мала величина пластичної зони у вершині тріщини, розмір якої обчислювався за формулою:

$$r_p = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \left(\frac{\tilde{K}}{\sigma_T} \right)^2. \quad (10.18)$$

Відношення $\frac{r_p}{l}$ в діапазоні до $l \leq 0,8h$ не перевищувало $1/500$, що свідчить про квазікрихкий характер руйнування конструкції. Таким чином, тріщина довжиною $l \leq 0,6h$ є припустимою.

Порівняння результату розв'язку задачі в геометрично-лінійній почтаовнці та з урахуванням геометричної нелінійності – величини КІН та розрахункового ресурсу корпусу стопорного клапану парової турбіни при наявності в ньому магістральної тріщини критичної довжини – зведені в таблиці 10.3.

Таблиця 10.3.

Геометрично лінійний розв'язок									
l/h	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85
$l_{(сред)}/h$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
\tilde{K}	21.70	23.00	23.50	24.00	24.70	25.43	28.10	210.70	
$\Delta N \cdot 10^5$	1.96	1.57	1.44	1.33	1.19	1.07	0.837	0.589	
$\Sigma(N \cdot 10^5)$	0	1.96	3.53	4.97	6.31	8.50	8.57	10.40	10.99

Таблиця 10.3.(продовження)

Геометрично нелінійний розв'язок									
l/h	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85
$l_{(сред)}/h$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
\tilde{K}	21.03	22.29	22.77	23.25	23.93	24.63	26.18	28.70	
$\Delta N \cdot 10^5$	2.21	1.77	1.63	1.50	1.35	1.21	0.955	0.672	
$\Sigma(N \cdot 10^5)$	0	2.21	3.98	5.61	8.11	8.46	10.67	10.60	11.30

Врахування формозмінення показало, що зменшення коефіцієнтів інтенсивності на 2-3% в межах критичної довжини тріщини призводить до збільшення ресурсу більш ніж на 12%.

Однак, як показано вище і описано в розділі 6, в зоні віддалення від внутрішньої поверхні коробки на $0,4h$, з'являються розтягуючі температурні напруження (рис.10.26). Тому для тріщини довжиною більше $0,4h$ були обчислені КІН \tilde{K}^t і від температурного навантаження. Сумарна крива залежності \tilde{K}^n від l говорить про значне збільшення КІН.

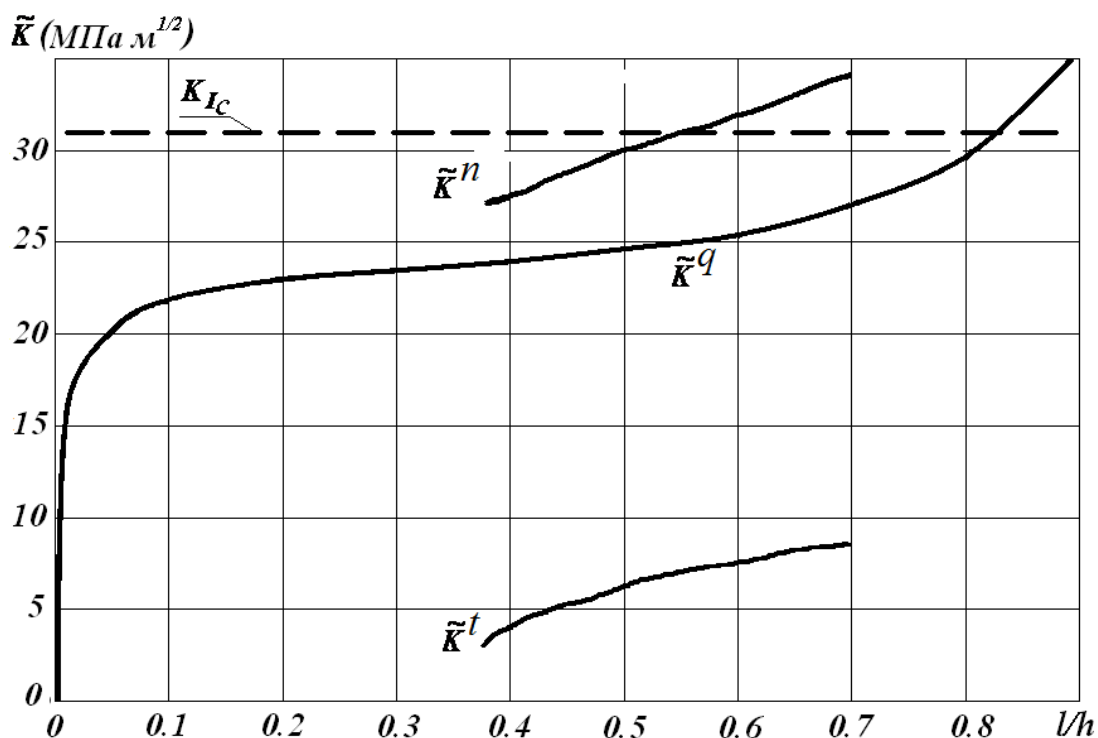


Рис. 10.26.

Отже, можна зробити висновок про необхідність урахування впливу температури при моделюванні росту тріщини. Так, критична довжина тріщини в цьому випадку буде рівна $0,57h$, в той час, коли при дії тільки тиску катастрофічне руйнування пройде при досягненні тріщиною довжини $0,83h$.

10.7. Дослідження впливу геометричної нелінійності на деформування та величини J-інтеграла компактного зразку

Для дослідження впливу геометричної нелінійності на параметри напружено-деформованого стану та величину J-інтеграла розглянуто компактний зразок результати розрахунку якого без урахування геометрично нелінійного деформування наведені в монографії Е.М. Морозова, Г.П. Нікішкова [154]. Розрахункова схема рис. 10.27 ($W = 100$ мм, $W_1 = 1,25 W$, $H = 0,6W$, $H_1 = 0,325W$, $D = 0,25W$, L – довжина тріщини, $L/W = 0,5$).

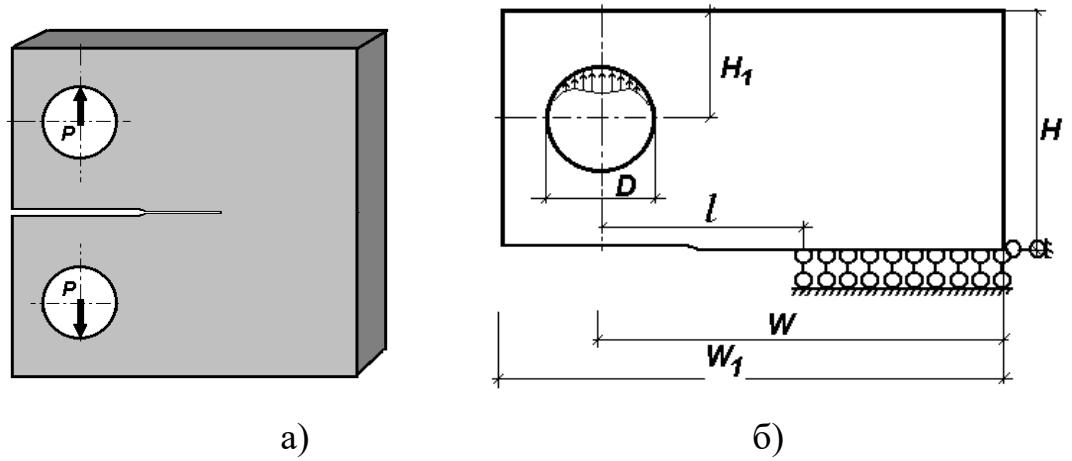


Рис. 10.27.

Розрахунок виконаний при розподіленні прикладеного зусилля P за синусоїдальним законом, яке змінюється при плоско деформованому стані від 0 до 9000 кг, а при плоско напруженому стані від 0 до 7000 кг. Матеріал зразка – сталь 12Х2МФА. Пластичне деформування матеріалу із достатнім ступенем точності апроксимується залежністю:

$$\sigma_i = \sigma_T \left(1 + 6.45 \varepsilon_p^{0.388}\right), \quad (10.19)$$

Напруження текучості, при якому появились перші пластичні деформації, дорівнюють $\sigma_T = 637$ МПа [154].

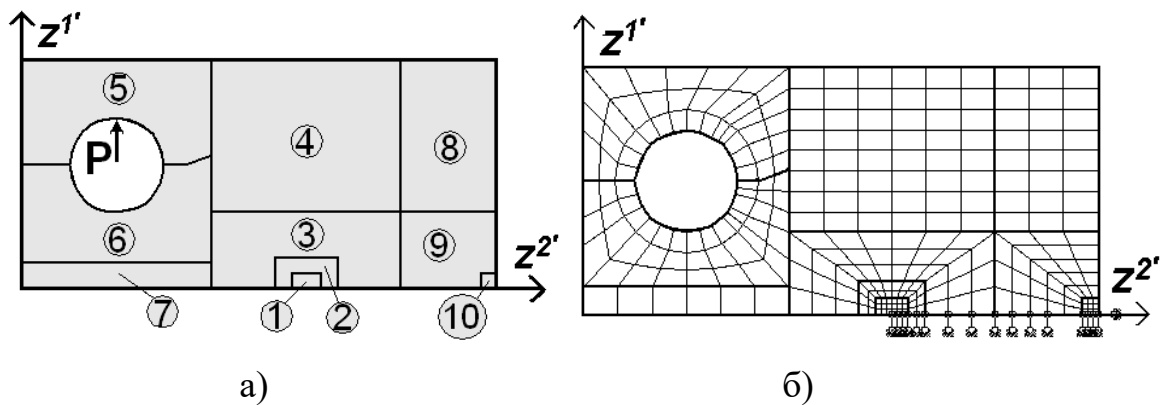


Рис. 10.28

Дискретна скінченоелементна модель компактного зразку будувалася з використанням квазірегулярної схеми за допомогою якої сітка була згущена в місцях виникнення найбільших напружень. Структура сітки аналогічна наведеній в роботі [154] і показана на рис. 10.28.

На рис. 10.29 наведена залежність J-інтеграла від величини навантаження при пружно-пластичному деформуванні, яка збігається із наведеною в роботі [154], як для плоско деформованого стану (рис. 10.29,а) так і плоско напруженого стану (рис. 10.29,б).

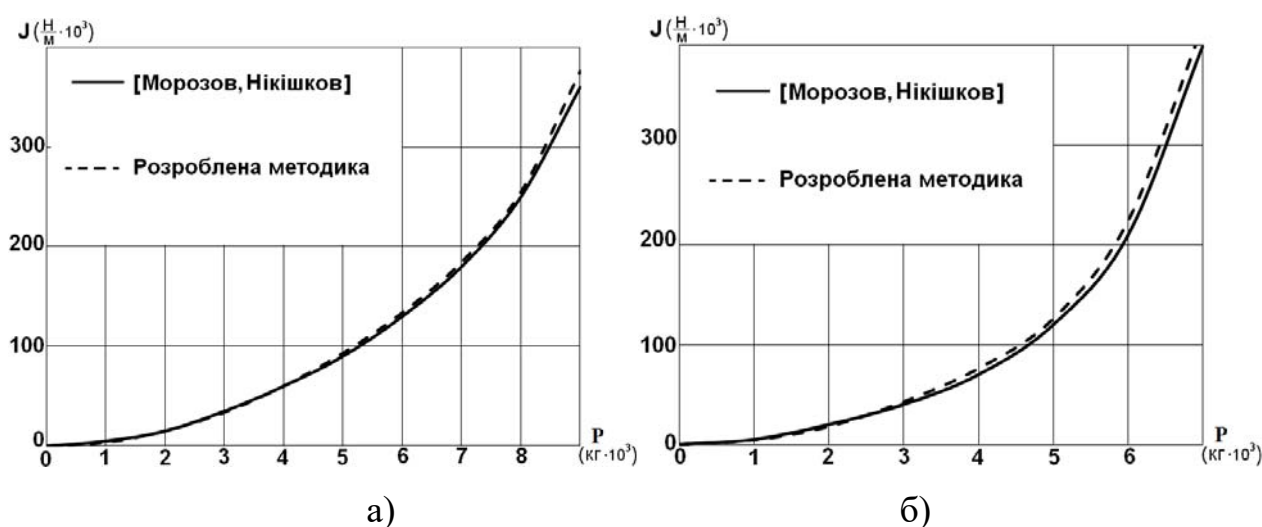


Рис. 10.29.

Наступний етап розрахунку полягав в дослідженні впливу геометричної нелінійності на параметри напружено-деформованого стану компактного зразка. Залежність розвитку деформацій пластичності при збільшенні навантаження для обох постановок зображена на (рис. 10.30,а) з урахуванням і без урахування формозмінення. Розкриття тріщини в компактному зразку під час деформування при $P=9000$ кг зображене на (рис. 10.30,б) при фізично нелінійному розв'язку без та з урахуванням геометричної нелінійності для плоскої деформації (PD) та плоско напруженого стану (PNS).

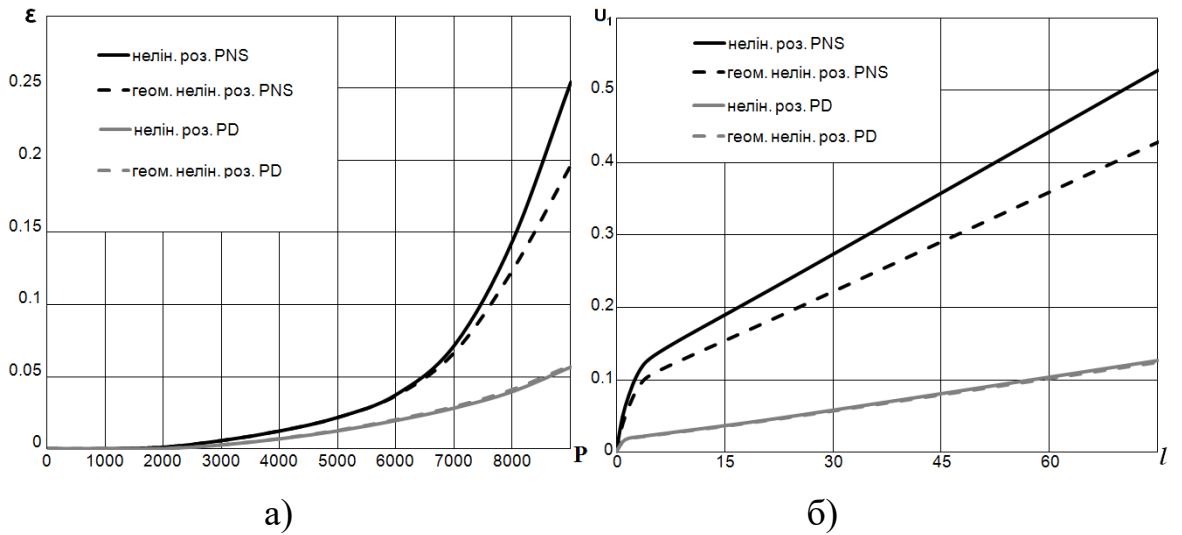


Рис. 10.30.

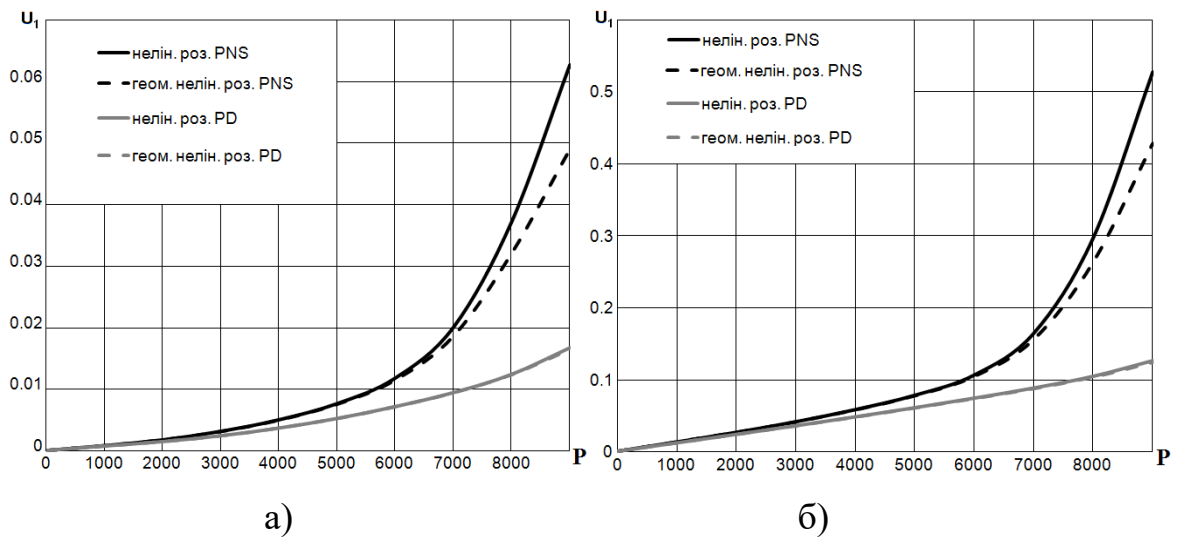


Рис. 10.31.

На рис. 10.31 наведені графіки переміщень для плоскої деформації (PD) та плоско напруженого стану (PNS) з урахуванням і без урахування формозмінення в вузлах дискретної моделі, які знаходяться найближче (перший вузол від закріплення) та якнайдалше (край компактного зразку) від вершини тріщини. Аналіз цих результатів показав, що урахування геометричної нелінійності зменшує значення величин деформацій та переміщень.

На рис. 10.32 зображені графіки значень J -інтеграла в залежності від інтенсивності навантаження P з урахуванням і без урахування формозмінення у випадку плоскої деформації (PD) (рис. 10.32,а) і плоско напруженого стану (PNS) (рис. 10.32,б) спостерігається розбіжність максимальних значень J -інтеграла в

межах 9% для плоско деформованого стану, та в півтора рази для плоско-напруженого стану.

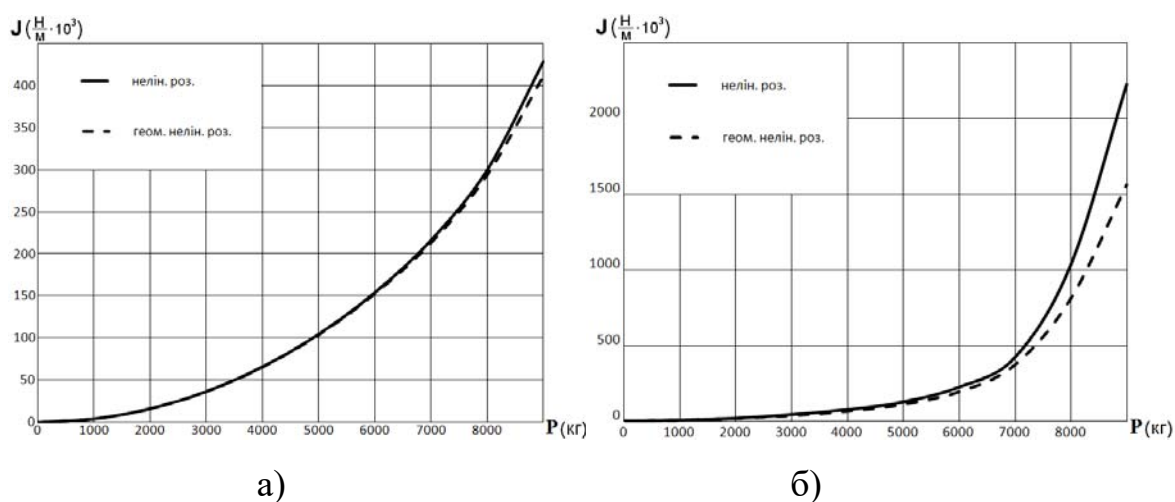


Рис. 10.32

Це свідчить про суттєвий вплив геометричної нелінійності, як і на загальну картину напружено-деформованого стану так і на максимальні значення J -інтеграла.

Таким чином, можна зробити висновок, що коректне визначення J -інтеграла компактного зразка необхідно виконувати в фізично і геометрично нелінійній постановці.

В даному розділі отримані розв'язки нових прикладних задач будівельної механіки про вплив формозмінення на величини ресурсу і тріщиностійкості конструктивних елементів машинобудівної промисловості і в експериментальних зразках для визначення параметрів тріщиностійкості.

Виявлено, що незважаючи на відносно незначні зміни параметрів пружно-деформованого стану в межах 2-3% величина ресурсу збільшилася на 12% для стопорного клапана порівняно з геометрично лінійним розрахунком, що має суттєве значення для визначення терміну експлуатації цих об'єктів. Розрахунок компактного зразка при плоско деформованому та плоско напруженому станах показав необхідність урахування геометричної нелінійності для коректного отримання значень характеристик руйнування.

ВИСНОВКИ

Основні результати, отримані в дисертаційній роботі полягають в наступному:

1. Вперше створено ефективний універсальний чисельний підхід до комплексного розв'язання лінійних, фізично і геометрично нелінійних задач при дослідженні процесів деформування, втрати стійкості, закритичної поведінки, континуального і дискретного руйнування, контактної взаємодії та нестационарної теплопровідності і їх взаємовпливів на поведінку тонкостінних, масивних і комбінованих тіл обертання складної структури, які знаходяться під дією довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень.

2. На основі рівнянь вісесиметричної задачі теорії пружності при використанні статичних гіпотез теорії тонких оболонок і середньої товщини та з урахуванням нелінійного розподілу напружень шляхом розвитку МССЕ отримані нові розрахункові співвідношення просторових, оболонкових, універсальних скінченних елементів загального і модифікованого варіантів для визначення напружено деформованого стану, нестационарних температурних полів, моделювання контактної взаємодії тіл обертання і створена розвинена бібліотека скінченних елементів.

3. Отримані формули для обчислення фізично і геометрично лінеаризованих матриць жорсткості, які в поєднанні з процедурою екстраполяції переміщень, дозволили провести уніфікацію кроково-ітераційних алгоритмів інтегрування по параметрам навантаження, переміщення, часу, прирощення довжини магістральної тріщини для розв'язку лінійних і нелінійних задач деформування, втрати стійкості, закритичної поведінки, суттєвого формозмінення, механіки руйнування і нестационарної теплопровідності.

4. Створена на основі фундаментальних положень нелінійної теорії пружності з урахуванням вимог до індиферентності та енергетичної сполученості

тензорів напружень і деформацій, процедури їх накопичення і нових прийомів покращення обумовленості систем нелінійних рівнянь методика чисельного дослідження еволюції НДС масивних і тонкостінних заготовок в процесах обробки металів тисненням при великих незворотних деформаціях і термосиловому навантаженні.

5. Шляхом використання шару спеціальних СЕ розроблені ефективні алгоритми розв'язку задач взаємодії окремих деформівних тіл між собою з урахуванням тертя на поверхнях контакту, а за рахунок введення допоміжної системи координат реалізовано моделювання контакту оболонок з жорсткими перепонами довільної конфігурації при змінних граничних умовах.

6. Отриманні основні і модифіковані варіанти розрахункових скінченноелементних співвідношень задачі нестационарної теплопровідності і розроблені алгоритми їх розв'язку з урахуванням формозмінення.

7. Розроблені алгоритми чисельного моделювання розповсюдження початкових тріщин, отримання їх траєкторій на основі розвитку модифікованого методу реакцій з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності, обчислення параметрів механіки руйнування по довжені магістральної тріщини і визначення її критичної довжини та розрахункового ресурсу.

8. Виконана реалізація розробленого чисельного підходу у вигляді розвиненого програмного забезпечення, інтегрованого до загального програмного комплексу НДІ БМ КНУБА з використанням концепції багатофрагментної побудови нерегулярних сіткових моделей для оптимізації процесу дискретизації реальних об'єктів складної форми і структури.

9. Проведено аналіз достовірності, збіжності та ефективності розрахункових співвідношень, кроково-ітераційних алгоритмів моделювання еволюційних процесів, методів визначення параметрів руйнування на основі розв'язку значної кількості контрольних прикладів шляхом порівняння базових і модифікованих варіантів з аналітичними, чисельними та експериментальними опублікованими даними.

10. Проведені чисельні дослідження особливостей термовязкопружнопластичного деформування, стійкості, континуального та дискретного руйнування і визначення ресурсу, тріщиностійкості і несучої здатності відповідальних конструктивних елементів, вузлів і деталей, пов'язаних з проектуванням об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом доволно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень.

В цілому, сукупність отриманих в даній дисертаційній роботі результатів являє собою розв'язання актуальної науково-технічної проблеми з розробки на основі розвитку моментної схеми скінчених елементів, алгоритмів математичного моделювання еволюційних процесів та методів визначення параметрів континуального і дискретного руйнування ефективного чисельного підходу до комплексного розв'язання задач деформування, стійкості та тріщиностійкості масивних, тонкостінних і комбінованих тіл обертання складної структури, який має суттєве наукове та прикладне значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Адясова Н.М.* Исследования упругопластического поведения составной осесимметричной конструкции с помощью комбинации конечных элементов различной мерности – В сб. «Метод конечных элементов в строительной механике», Горький, 1975.
2. *Альтенбах Х.* Теория ползучести – актуальные проблемы и приложения / Х. Альтенбах // Прикл. механика – 2003. – 39, № 6. – С. 3–33..
3. *Анизотропия* ползучести и повреждаемости элементов конструкций при циклическом нагружении / Д.В. Бреславский, В.А. Метелев, О.К. Морачковский // Проблемы прочности. – 2015. – №2. – С.21-29.
4. *Александров А. Я.* Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного) / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. – М. : Наука, 1978. – 464 с.
5. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. "Наука", М., 1967.
6. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин / А. Е. Андрейкив – К. : Наук. думка, 1982. – 348 с.
7. *Андрейків О. Є.* Моделювання росту втомних макротріщин із врахуванням історії навантаження / О. Є. Андрейків, О. І. Дарчук, П. С. Кунь // Доп. НАН України. – 2002. – № 12. – С. 26–32.
8. *Андрієвський В.П.* Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, 2014. –Вип.93.– С. 64-72
9. *Андрієвський В. П.* Вплив урахування геометричної нелінійності на величину розрахункового ресурсу хвостовика лопатки ГТУ / В. П. Андрієвський, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА. - 2010. – Вип. 85. – С. 31-50.

10. *Андрієвський В.П.* Дослідження еволюції напружено-деформованого стану і визначення розрахункового ресурсу масивних елементів вісесиметричних конструкцій на основі універсального скінченного елемента / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк, С.В. Мицюк, С.О. Пискунов // Вісник НТУ «ХПІ» Системний аналіз, управління та інформаційні технології, 2018. – №22(1298)– С. 66-72.
11. *Анищенко Г. О.* Обзор решений задач ползучести и разрушения елочных замковых соединений лопаток ГТД / Г. О. Анищенко, О. К. Морачковський // Весник национального технического университета «ХПИ» .Харьков, 2007. - №38. – С. 8-13.
12. *Антоненко Э.В.* Критическое давление и частоты колебаний цилиндрических оболочек с упруго закрепленными в осевом направлении краями. Прикладная механика, 1973. – №8.
13. *Атлури С.* Вычислительные методы в механике разрушения / С. Атлури – М. : Мир, 1990. – 392 с.
14. *Баженов В.А.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану і руйнування елементів конструкцій авіаційних двигунів / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков.: ХАИ. – 2004. – Вып. 2(10) – С.21-17.
15. *Баженов В.А.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, І.І. Солодей та ін. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С. 3–26.
16. *Баженов В.А.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування тіл з тріщинами / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, О.О. Шкриль – Київ: Вид-во “Каравела”, 2017. – 206 с.
17. *Баженов В.А.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, О.С. Сахаров, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і

- теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.92. – 2014. – С. 3-15.
18. *Баженов В.А.* Определение расчетного ресурса хвостовика лопатки газотурбинной установки под действием термосиловой загрузки / В.А. Баженов, А.И. Гуляр, С.О. Пискунов, В.П. Андриевский // Проблемы прочности.– №3. – 2013. – С.105-129.
19. *Баженов В. А.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / В. А. Баженов, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, О. С. Сахаров – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
20. *Баженов В. А.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей.– К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.
21. *Баженов В. А.* Расчет конструкций на тепловые воздействия / В. А. Баженов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков. Изд-во «Машиностроение», М., 1969.
22. *Баженов В. А.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов / Баженов В. А., Гуляр А. И., Пискунов С. О. [и др.]: Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечно-элементной методики решения пространственных задач механики разрушения // Проблемы прочности. – 2011. – Вип. 1. – С. 27-39; Сообщение 2. Методика определения инвариантного J-интеграла в дискретных моделях МКЭ. // Проблемы прочности. - 2011. Вип. 2. – С. 17-32.
23. *Баженов В.А.* Нелінійні задачі механіки багат шарових оболонок / В.А.Баженов, О.С.Сахаров, О.В.Гондляр, С.Л.Мельніков – К.: НДІ Будмеханіки, 1994. – 264 с.
24. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, прочности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.
25. *Бетехтин В. И.* Кинетика накопления микроскопических разрывов сплошности в процессе испытания алюминия на долговечность и ползучесть /

- В. И. Бетехтин, В. Н. Савельев, А. И. Петров // Физика металлов и металловедение. – 1974. – т.38, №4 – С. 834–842.
26. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И. А. Биргер Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич // – М. : Машиностроение, 1979. – 702 с.
27. *Биргер И. А.* Теория пластичности при неизотермическом нагружении / И. А. Биргер, И. В. Демьянушко // Механика твёрдого тела.– 1968. – №6 – С. 70–77.
28. *Блох В. И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.
29. *Бобир М.І.* Пошкоджуваність та руйнування елементів конструкцій / М. І. Бобир, А. П. Грабовський, О. П. Халімон. К. : Наук. думка, 2009. – 392 с.
30. *Божидарник В. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами та тріщинами / В. В. Божидарник, О. В. Максимович О.В.– Луцьк. : ЛДТУ, 2003. – 228 с.
31. *Бойл Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Бойл, Дж. Спенс – М.: Мир, 1976. – 360 с.
32. *Болотин В. В.* Ресурс машин и конструкций / В. В. Болотин– М. : Машиностроение, 1990.– 448 с.
33. *Бородачев Н. М.* О задаче термоупругости в напряжениях / Н. М. Бородачев // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 3. – С. 46–54.
34. *Бреславский Д.В., Метелев В.А., Морачковский О.К.* Анизотропия ползучести и повреждаемости элементов конструкций при циклическом нагружении // Проблемы прочности. – 2015. – №2. – С.21-29.
35. *Бурлаков А. В.* Длительная прочность оболочек / А. В. Бурлаков, Г. И. Львов // Харьков: Вища школа. – 1981. – 104 с.
36. *Быковцев Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
37. *Вавричук В. Г.* Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності в частково необмежених областях на основі інтегральних

- рівнянь / В. Г. Вавричук, Р.С. Хапко // Доповіді НАН України, 2011, №11, С 7-14.
38. *Вайншток В. А.* Расчет весовых функций и J-интегралов для несимметричных задач механики разрушения модифицированным методом виртуального роста трещины / В. А. Вайншток // Пробл. прочности. – 1981. – № 8. – С. 102–104.
39. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М. : Машиностроение, 1976. – 126 с.
40. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М. : Мир, 1987. – 323 с.
41. *Вильдеман В. Э.* Краевые задачи континуальной механики разрушения: Препр. / В. Э. Вильдеман, Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов // РАН, УрО, Ин-т мех. спл. среды. – Пермь, 1992. – 77 с.
42. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. «Наука», М., 1967.
43. *Ворошко П. П.* Смешанные вариационные формулировки задач упругости и их реализация методом конечных элементов / П. П. Ворошко // Проблемы прочности. – 1985. – № 1. – С. 100–105.
44. *Ворошко П.П.* Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных дисков со ступицей / П.П.Ворошко, А.Л. Квитка, О.Н. Савина // Проблемы прочности, 1974, № 11.
45. *Вычислительный комплекс SCAD* / [В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко и др.]. – К. : СКАД СОФТ, 2009. – 656 с.
46. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
47. *Галишин А. З.* Определение осесимметричного геометрически нелинейного термовязкоупругопластического состояния слоистых оболочек на основе теории процессов деформирования малой кривизны / А. З. Галишин// Прикл. механика. – 2003. – т.39, № 7. – С. 114–122.
48. *Галишин А. З.* Осесимметричное термовязкоупругопластическое состояния тонких гибких оболочек с учетом повреждаемости материала / А. З. Галишин// Прикладная механика. – 2008. – т.44, № 2. – С. 49–60.

49. *Гецов Л. Б.* Материалы и прочность деталей газовых турбин / Л. Б. Гецов. – М. : Недра, 1996. – 591 с.
50. *Голуб В. П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости / В. П. Голуб // Прикладная механика. – 2000. – т.36, № 3. – С. 31–66.
51. *Голуб В. П.* Нелинейная ползучесть и длительное вязкое разрушение идеально-упругопластических стержней при растяжении / В. П. Голуб, А. В. Романов, Н. В. Романова // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 4. – С. 120–133.
52. *Голуб В. П.* Циклическая ползучесть материалов и элементов конструкций / В. П. Голуб. – К., 1989 – 20 с.
53. *Горлач Б. А.* Тензор Генки и неупругие конечные деформации / Б. А. Горлач, Н. Н. Орлов-Куйбышев // Деп. в ВИНТИ. – 1982, №2812-82 – 15 с.
54. *Горячев А.П.* Численное исследование статического контакта осесимметрических тел. / А.П. Горячев, А.А. Левин // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Горький, 1981. – С. 15-24.
55. *Гохфельд Д. А.* Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях / Д. А. Гохфельд, О. С. Садаков. – М. : Машиностроение, 1984. – 256 с.
56. *Гребенюк Г.И.* Вариант расчета сферических оболочек на упругом основании методом малого параметра // В сб. «Исслед. по строительным конструкциям и строительной механики». Изд-во Томского университета, Томск, 1976.
57. *Грешнов В. М.* Об одной модели пластичности для задач обработки металлов давлением / В. М. Грешнов // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1021–1029.
58. *Григоренко Я. М., Будаков В. Д., Григоренко О. Я.* Розв’язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.
59. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек. // Прикладная механика, 1974. – № 5.

- 60.Гринченко В.Г., Улитко А.Ф. Смешанная осесимметричная задача теории упругости для цилиндра конечной длины. // Сб. «Соппротивление материалов и теория сооружений», Вып.XV, Киев, «Будівельник», 1971.
- 61.Грубин Н. А. Расчет на прочность елочного замка лопаток турбин / Н. А. Грубин. – М. : Машиностроение, 1970. – 184 с.
- 62.Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь. – К. : «А.С.К.», 2004. – 672 с.
- 63.Гузь А. Н. О некоторых неклассических задачах механики разрушения, учитывающих напряжения вдоль трещин / А. Н. Гузь // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 8. – С. 138–144.
- 64.Гузь А. Н. Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты / А. Н. Гузь, М. Ш. Дышель, В. М. Назаренко // Прикладная механика. – 2004. – т.40, № 12. – С. 18–64.
- 65.Гулати (Gulati S.T.) Влияния упругости опор на изгиб осесимметричной пластинки. Ракетная техника и космонавтика, 1970, №8.
- 66.Гуляр А.И. Реализация метода податливости на основе МКЭ для сеток, не совпадающих с траекторией трещины / А.И. Гуляр, Т.А. Кушниренко, А.С. Сахаров // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1981. – Вып.38. – С.42–46.
- 67.Гуляр О.І. Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк, В.П. Андрієвський, С.В. Мицюк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, Вип.95. – 2015.– С. 11-20.
- 68.Гуляр О.І. Визначення параметрів напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні / Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П., Максим'юк Ю.В. // Вісник НТУ «ХП» Технології та обладнання виробництва / 2015.– №21(1130) –С. 128-135.
- 69.Гуляр О.І. Дослідження нелінійного деформування складених оболонок обертання середньої товщини / Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В. //

Технічні науки та технології : науковий журнал / Чернігів: ЧНТУ, 2018. – №2(12). – С 9-24.

70. Гулярь О.І. Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О.І. Гулярь, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2012. - Вип.89. – С. 43-57.
71. Гулярь О.І. Модифікований варіант метода реакцій в двовимірних задачах механіки руйнування / О.І. Гулярь, О.С. Сахаров, О.О. Шкриль, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2011. – Вип.88. – С.24-36.
72. Гулярь О.І. Особливості розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності і повзучості з урахуванням геометричної нелінійності / О.І. Гулярь, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк, Б.І. Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, 2012. – Вип.90. – С. 73-89.
73. Гулярь А. И. Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования / А. И. Гулярь, А. С. Сахаров, М. С. Чорный // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978 – № 32 – С. 3-10.
74. Гулярь О. І. Визначення J - інтеграла при скінченоелементному розв'язанні задач змішаного руйнування / О. І. Гулярь, О. С. Сахаров, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, 2008. – Вип. 82. – С. 111-125.
75. Гулярь А.И., Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Чорный С.М. Решения трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов.// В.сб.: «Сопротивление материалов и теория сооружений». Вып. XXII. Киев, «Будівельник», 1974.– С.32-46
76. Гулярь О. І. Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкоженості матеріалу / О. І. Гулярь, С. О. Пискунов,

- Ю. В. Максим'юк, Б. І. Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2007. – Вип. 79. – С. 18-42.
77. Демидов С. П. Теория упругости [учебник] / С. П. Демидов. – М. : Высш. шк., 1979. – 432 с.
78. Дзюба А.П., Прокопало Є.Ф., Дзюба П.А. Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами – Дніпропетровськ, Ліра 2014. – 224 с
79. Димніч А. Х. Теплопровідність : [навч. посібник] / А. Х. Димніч, О. А. Троянський – Донецьк, 2003. – 370 с.
80. Друккер Д. Вариационные принципы в математической теории пластичности / Д. Друккер // Механика. – 1959.– №6.
81. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов: Пер. с яп. / Т. Екобори.– К.: Наук. Думка, 1978. – 352 с.
82. Еременко С. Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел / С. Ю. Еременко. – Харьков : Основа, 1991. – 272 с.
83. Еременко С. Ю. Расчет НДС вращающегося диска ГТД с учетом пластичности и ползучести при повышенных температурах / С. Ю. Еременко, И. Г. Ильге // Проблемы прочности. – 1993. –№5. –С. 70–74.
84. Закономерности ползучести и длительной прочности : справочник / [под ред. Шестерикова С. А.] – М. : Машиностроение, 1983. –101 с.
85. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 539 с.
86. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2008. – Т. 2 : Пластичность. – 2008. – 336 с.
87. Иванов В.А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим наполнителем. // Тр. Семинара по теории оболочек (АН СССР, Казанский физико-технический институт), вып. II, 1971.
88. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев – М. : Наука, 1966. – 231 с.
89. Израилев Ю.Л., Лубны-Герцык А.Л., Плотник Е.Р. Методика численного определения коэффициентов концентрации в упругой и упруго-пластической области для тел сложной формы // Машиноведение, «Наука», М., 1974. – № 2.

90. *Иида С.* Скорость распространения трещин в пластинах из сплава 7075-T6 при циклическом растяжении и поперечном сдвиге / *С. Иида, А. Кобаяси* // Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. Д. – 1969. – № 4. – С. 210–214.
91. *Ильгамов М.А.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. / *М.А. Ильгамов, В.А. Иванов, Б.В. Гулин.* – М.: «Наука», 1977.
92. *Ильюшин А. А.* Основы математической теории термовязкоупругости / *А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря.* – М. : Наука, 1970. –281 с.
93. *Ильюшин А. А.* Пластичность / *А. А. Ильюшин.* – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
94. *Ильялов О. Р.* Ползучесть и разрушение цилиндрической оболочки под действиям внутреннего давления / *О. Р. Ильялов* // Тр. семин. каф. теор. мех. ПГТУ по повреждаемости матер., Пермь. 1996. – С. 104-116 – Деп. в ВИНТИ 24.09.96. №2856 - В96.
95. *Исаханов Г. В.* Компьютерное моделирование процес сов формоизменения пространственных оболочек в условиях ползучести. Сообщение 1 / *Г. В. Исаханов, А. И. Гуляр, Е. Е. Майборода* // Проблемы прочности. – 1997. № 4. – С. 52–58.
96. *Исаханов Г. В.* Компьютерное моделирование процес сов формоизменения пространственных оболочек в условиях ползучести. Сообщение 2 / *Г. В. Исаханов, А. И. Гуляр, Е. Е. Майборода* // Проблемы прочности. – 1997. № 5. – С. 69–77.
97. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / *А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев.* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 704 с.
98. *Кадашевич Ю. И.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / *Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов* // ПММ, 1958. – т.22.
99. *Кантор Б.Я.* Нелинейные теории неоднородных пологих оболочек. «Наукова думка», Киев, 1971.
100. *Каракина А.А.* Определения температурного поля при деформации / *А.А. Каракина, В.И. Тарновский, А.В. Иваницкий и др.* // Изв. Вузов. Черная металлургия, 1966. – № 8. – С122-127

101. *Карслоу Г.* Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер; пер. с англ. под ред. проф. А. А. Померанцева. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
102. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1974. – 420 с.
103. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1960. – 456 с.
104. *Качанов Л. М.* Теория ползучести / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1969. – 420 с.
105. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 208 с.
106. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1970. – 204 с.
107. *Коваленко А. Д.* Термоупругость пластин и оболочек / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1971.
108. *Ковальчук Б.І.* Рівняння теорії пластичності для процесів повторно-простого навантаження / Б.І. Ковальчук // Наук. Вісті Нац. техн. ун-ту України “КПІ”. – 2007. – № 5. – С. 91–97.
109. *Колмогоров В. М.* Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения / В. М. Колмогоров, Б. А. Мигалев. – Екатеринбург, 1994. – 105 с.
110. *Кондауров В. И.* Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упруго-пластических сред с конечными деформациями / В. И. Кондауров, В. Н. Кукуджанов // Численные методы в мех. тверд. деформ. тела. – М. – 1984. – С. 100–114.
111. *Коротких Ю. Г.* Математическая модель оценки ресурса материала инженерных объектов в процессе эксплуатации / Ю. Г. Коротких, Г. В. Русецкая, А. В. Золотов // Современ. пробл. прикл. механики. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. техн. ун-та. – 2004. – С. 100–106.
112. *Левитас В. И.* Большие упруго-пластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас. – Киев: Наук. думка, 1987. – 232 с.

113. *Лейбедзон Л. С.* Курс теории упругости / Л. С. Лейбедзон. – Л.–М. : ОГИЗ, 1947. – 465 с.
114. *Лейкин А. С.* Напряженность и выносливость деталей сложной конфигурации / А. С. Лейкин– М.: Машиностроение, 1968. – 372 с.
115. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы: [учебн. пособие] / [Е. Б. Стрелец-Стрелецкий, В. Е. Боговис, Ю. В. Гензерский и др.]. – К. : Факт, 2008. – 164 с..
116. *Ли /Lee E. H./* Анализ осесимметричной осадки и поперечной осадки в условиях плоской деформации сплошных цилиндрических заготовок методом конечных элементов / E. H. Lee, S. Kobayashi // ASME,сер. В, - 1971. №2 – С. 73-84.
117. *Литвин О.М.* Чисельна реалізація методу лінійних інтегро-диференціальних рівнянь для рівняння нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужна // УСИМ, 2012. – № 4. – С.11-24.
118. *Локощенко А. М.* Долговечность цилиндрических оболочек при чистом изгибе в условиях ползучести / А. М. Локощенко, Н. Е. Печенина, С. А. Шестериков // Прикл. механика. – 1989. – т. 25. – № 12. – С. 73–78.
119. *Локощенко А. М.* Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения / А. М. Локощенко, С. А. Шестериков // Прикл. механика и техн. физика. – 1982. – № 1. – С. 160–163.
120. *Лурье А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
121. *Львов Г.И.* Ползучесть и длительная прочность компонентов газовых турбин с учетом неоднородного распределения температур / Г. И. Львов, С. В. Лысенко, Е. Н. Гораш // Проблемы прочности. 2008. — № 5. – С. 37 44.
122. *Львов Г.И.* Прикладные задачи неизотермической теории длительной прочности / Г. И. Львов, С. В. Лысенко, Е. Н. Гораш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2007. – № 11. – С. 71–78.

123. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 599 с.
124. *Лялин В.М.* Численное решение задачи нестационарной теплопроводности для системы «патронник-гильза-порох» методом конечных элементов / В.М. Лялин В.А. Дунаев, Н.А. Тарасова // *Машиностроение и машиноведение Известия ТулГУ. Технические науки.* 2013. Вып. 5. – С.167-174
125. *Мавлютов Р. Р.* Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р. Р. Мавлютов. –М. : Наука, 1981. – 141 с.
126. *Макклиток Ф.* Деформация и разрушение материалов / Ф. Макклиток, А. Аргон– М. : Мир, 1970. –444 с.
127. *Максим'юк Ю.В.* Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник* – К.:КНУБА, 2014. – Вип.93.– С. 148-156.
128. *Максим'юк Ю.В.* Визначення тріщиностійкості вісесиметричних тіл з урахуванням формозмінення / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник* –К.:КНУБА, 2018. –Вип.100.
129. *Максим'юк Ю.В.* Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник* –К.:КНУБА, 2017. – Вип.99. – С. 151-159.
130. *Максим'юк Ю.В.* Математичне моделювання процесів розвитку магістральних тріщин в тілах обертання складної структури з урахуванням формозмінення / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник* –К.:КНУБА, 2018. – Вип.101.
131. *Максим'юк Ю.В.* Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл / Ю.В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник* –К.:КНУБА, 2016. –Вип.97. –С. 186-193.

132. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченного елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2015. – Вип.94. – С. 244-251.
133. Максим'юк Ю.В. Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, 2015. –Вип.96. – С. 148-157.
134. Максимюк В. А. Решение нелинейных задач теории оболочек сеточными методами / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко// Прикл. механика. – 2009. – 45, № 1. – С. 41–70.
135. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 398 с.
136. Малинин Н. Н. Расчеты на ползучесть машиностроительных конструкций / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1981. –221 с.
137. Малинин Н.Н. Проблема ползучести в обработке металлов / Н.Н. Малинин // – Изв. Вузов. Машиностроение, 1982, №5. – С.112-122.
138. Малинин Н. Н. Решение задач горячего формоизменения методом конечных элементов / Н. Н. Малинин, К. И. Романов // Изв. Вузов Машиностроения – 1977. № 8. – С. 127-131.
139. Масловская А.Г., Сивунов А.В. Применение метода конечных элементов для моделирования эволюционных процессов теплопроводности в облученных электронными пучками полярных диэлектриках // Компьютерные исследования и моделирование 2012 – Т. 4. – № 4. – С. 767–780.
140. Маркол. Определение больших прогибов упругопластических оболочек вращения // Ракетная техника и космонавтика, 1970. – №9.
141. Мелещенко А.Г. Конечноэлементный анализ явлений в плоском контакте упругих шероховатых тел под действиям нормальных и касательных нагрузок / А.Г. Мелещенко // Рук. Деп. ВИНТИ 1977, №2881-77 Деп. – С. 17.

142. *Мельников В. В.* Температурные напряжения в упругой сфере, содержащей конические вырезы / В. В. Мельников // Прикл. механика и техн. физика. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 161–164.
143. *Мерзляков В. А.* Термовязкоупругопластическое неосесимметричное деформирование оболочек вращения / В. А. Мерзляков, Ю. Н. Шевченко // Прикладная механика. – 2001. – 37, № 12. – С. 3–36.
144. *Мерзляков В. А.* Термоупругопластическое деформирование некруговых цилиндрических оболочек / В. А. Мерзляков // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 8. – С. 77–90.
145. *Мерзляков В. А.* Упругопластическое деформирование оболочек вращения при неосесимметричном нагружении (обзор) / В. А. Мерзляков, Ю. Н. Шевченко // Прикладная механика. – 1999. – 35, № 5. – С. 3–39.
146. *Методика определения накопления повреждений* в металлических конструкционных материалах при сложном упругопластическом нагружении / Н. И. Бобырь, А. П. Грабовский, А. В. Тимошенко, А. П. Халимон // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 128–137.
147. *Мизес Р.* Механика твердых тел в пластическом деформированном состоянии / Р. Мизес // Теория пластичности. – М. : 1948. – С. 57–69.
148. *Михеев М. А.* Основы теплопередачи / М. А. Михеев. – М.–Л. : Государств. энергет. издат., 1949. – 397 с.
149. *Морачковский О.К.* Влияние закрепления края на ресурс повреждающейся вследствие ползучести тонкой сферической крышки вакуумной камеры / О.К. Морачковский, Ю.В. Ромашов // Проблемы прочности, 2011. – № 3. – С. 83-92.
150. *Можаровский Н. С.* Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения : В 2 ч. / Н. С. Можаровский. – К. : Выща шк., 1991 – 287 с.
151. *Можаровский Н. С.* Математическая модель накопления повреждений и критерий предельного состояния металлов и сплавов при активном

- пластическом деформировании в условиях пропорционального нагружения / Н. С. Можаровский // Проблемы прочности. – 1997. – №1. – С. 49–59
152. *Можаровский Н. С.* Упрочнение и накопление повреждений в конструкционных материалах при сложном нагружении / Н. С. Можаровский, Н. И. Бобырь, О. Н. Мукоида // Известия ВУЗов. Машиностроение. – М.: Машиностроение, 1989. – т.11. – С. 10–15.
153. *Морачковский О. К.* Исследование ползучести стержней и оболочек на базе МКЭ и сдвиговой теории / О. К. Морачковский, А. А. Замула // Вестник НТУ “ХПИ”. Динамика и прочность машин. – 2002. – Т. 2, № 10. – С. 86–90.
154. *Морозов Е. М.* Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М. : Наука, 2007. – 256 с.
155. *Морозов Е. М.* Механика разрушения твердых тел / Е. М. Морозов, В. М. Пестриков. – СПб. : Профессия. – 2002. – 300 с.
156. *Морозов Е. М.* Некоторые закономерности в теории трещин / Е. М. Морозов, Я. Б. Фридман // – В сб.: Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях. № 2. – М.: Атомиздат, 1966. – С. 216-253.
157. *Ползучесть* диафрагмы паровой турбины при переменных режимах нагружения / Н.Г. Шульженко, А.В. Асаенок, Б.Ф. Зайцев, Н.Н. Гришин, А.Н. Губский // Проблемы прочности. – 2016. – №6. – С.5-12.
158. *Москвитин В. В.* Пластичность при переменных нагружениях / В. В. Москвитин. – М. : Изд-во. Моск. ун-т., 1965. – 263 с.
159. *Мураками С.* Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности / С. Мураками, Ю. Н. Радаев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С. 93–110.
160. *Мучник Г. Ф.* Методы теории теплообмена. Теплопроводность Ч. I. / Г. Ф. Мучник, И. Б. Рубашов. – М. : Высш. шк., 1970. – 287 с.
161. *Муштары Х. М.* Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР. Мех. и Машин. 1959. – № 2.
162. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел : в 2 т. / А. Надаи. – М. : Изд-во. иностр. лит., 1954–Т. 1. – 647 с.

163. *Накамура Я.* Анализ упруго – пластической деформации листовых металлов при глубокой вытяжке через матрицу путем рассмотрения обтекания листовым металлом профелей и пуасона / Я. Накамура, Т. Татэнами, К. Сайто // *Soosey to kako, J. Jap. Soc. Technol. Plast*, 1978. – 19. № 213. – С 890-896.
164. *Наместникова И. В.* Векторное представление параметра поврежденности / И. В. Наместникова, С. А. Шестериков // *Деформация и разрушение твердых тел.* – М. : Машиностроение, 1985.– С. 43–52.
165. *Никишков Г. П.* Коэффициент интенсивности напряжений у кольцевых трещин в толстостенных трубах при растяжении / Г. П. Никишков, Е. М. Морозов // *Пробл. прочности.* – 1976.– №6. – С. 44–48.
166. *Никишков Г. П.* Метод виртуального роста трещины для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} / Г. П. Никишков, В. А. Вайншток // *Пробл. прочности.* – 1980. – № 6.– С. 26–30.
167. *Новацкий В.* Теория упругости / В. Новацкий; пер. с польск. Б. Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
168. *Нотт Дж. Ф.* Основы механики разрушения / Дж. Ф. Нотт– М. : Металлургия, 1978. – 256 с.
169. *Определение* в уточненной постановке напряженного состояния ортотропных тороидальных оболочек / Я. М. Григоренко, Ю. А. Авраменко // *Прикл. механика*, 2013. – Т. 49, № 4. – С. 99-114.
170. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. / В.А. Пальмов. – М.: Наука, 1976, – 328с.
171. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1991. – 416 с.
172. *Папкович П. Ф.* Теория упругости / П. Ф. Папкович. – Л.–М. : Гос. изд. обор. пром., 1939. – 640 с.
173. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин – В кн.: *Прикладные вопросы вязкости разрушения.* – М.: Мир, 1968. – С. 64–142.

174. *Партон В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 504 с.
175. *Паутов А.А.* Метод фиктивных жесткостей в численном решении контактных задач. / А.А. Паутов, О.И. Солуянов О.И. // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Горький, 1978. – №9. – С. 49-54.
176. *Писаренко Г. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. –К. : Наук. думка, 1981. – 492 с.
177. *Пискунов С.О.* Алгоритм розв'язання геометрично нелінійної задачі в'язкопружнопластичного деформування двовимірних тіл. / С.О. Пискунов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА , 2009. – Вип.83. – С. 44-62.
178. *Пискунов С.О.* Постановка двовимірних задач деформування і континуального руйнування в неоднорідному температурному полі / С.О. Пискунов, В.В. Валер // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, 2016. – Вип. 97. – С. 191 – 201.
179. *Пискунов С.О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк, А.Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник –К.:КНУБА, Вип.91 .– 2013.– С. 59-75.
180. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности : учеб. пособие / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
181. *Подстригач Я. С.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, В. И. Громовык, В. Л. Лозбень. – К. : Наук. думка, 1977. – 159 с.
182. *Поздеев А. А.* Большие упруго-пластические деформации / А. А. Поздеев, П. В. Трусков, Ю. И. Няшин – М. : Наука, 1986. – 232 с.

183. *Понятовский В. В.* Уравнения теории анизотропных пластинок. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 4, Изд. ЛГУ, 1965.
184. *Понятовский В. В.* Уточненная теория трансверсально изотропных пластин. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 6, изд. ЛГУ, 1967.
185. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* / А.М. Локощенко М.: Физматлит.– 2016. – 504 с.
186. *Прочность рабочих колес турбомашин* / И.А. Козлов, В.Н. Городецкий и др. «Наукова думка», Киев, 1972.
187. *Работнов Ю. Н.* Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1987. – 80 с.
188. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 732 с.
189. *Работягов Д. Д.* Механика материалов при больших деформациях / Д. Д. Работягов– Кишинев : Штиница, 1975. – 168 с.
190. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения/ Дж. Райс // В кн.: Разрушение. Т. 2. – М. : Мир, 1975. – С. 205–335.
191. *Романов К. И.* Исследование методом конечных элементов осесимметричной горячей осадки / К. И. Романов // – Машиноведение, 1978. № 5. – С. 79-86.
192. *Романов К. И.* Оценка точности решения технологических задач теории ползучести / К. И. Романов // Расчеты на прочность. –М.: Машиностроение, 1986.– т.27.– С. 135–140.
193. *Романов К. И.* Ползучесть и разрушения цилиндрической оболочки при больших деформациях / К. И. Романов // Машиноведение – 1982, № 2, – С. 78-82.
194. *Романов К. И.* Экспериментальное исследование горячей осадки / К. И. Романов // Изв. вузов Машиностроение – 1977. № 6. – С. 147-151.
195. *Рубцов Ю. К.* О численно-аналитическом решении плоских задач термоупругости / Ю. К. Рубцов, Е. Н. Борисов // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 12. – С. 122–126.

196. *Руденко Е. К.* Ползучесть неосесимметрично нагруженных тел вращения / Руденко Е. К. – Х. : Ин-т пробл. машиностр. АН УССР, 1990. – 48 с. – (Препринт / Ин-т пробл. машиностр. АН УССР).
197. *Русаков А. В.* Расчетно-экспериментальная методика обеспечения надежности элементов конструкций летательных аппаратов с учетом условий эксплуатации / А. В. Русаков, Ю. Л. Тарасов // Вестн. Самар. Гос. Техн. Ун-та., сер. физ.-мат. науки – 2000. – № 9. – С. 56-77.
198. *Русинко К. Н.* Теория пластичности и неустановившейся ползучести / К. Н. Русинко. – Л. : Вища школа, 1981. – 148 с.
199. *Саврук М. П.* О расчете статической траектории распространения трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив // Проблемы прочности. – 1982. – №11. – С. 19–23.
200. *Саврук М. П.* Траектория распространения трещины в бесконечной плоскости при несимметричном нагружении сосредоточенными силами / М. П. Саврук, П. Н. Осив // Физ.-хим. механика материалов.– 1985. – № 2. – С. 94–96.
201. *Савченко В. Г.* Пространственные задачи термовязкопластичности / В. Г. Савченко, Ю. Н. Шевченко // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 11. – С. 3–38.
202. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
203. *Сахаров А.С.* Моментная схема метода конечных элементов для учета жестких смещений твердого тела // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Київ, Будівельник. – 1974.
204. *Седов А.И.* Механика сплошной среды. – Москва: Наука, 1976, т.1. – 535 с.
205. *Седов А.И.* Механика сплошной среды. – Москва: Наука, 1976, т.2. – 575 с
206. *Семенюк Н. П., Жукова Н. Б.* Устойчивость и закритическое поведение волнообразных цилиндрических панелей при внешнем давлении / // Прикладная механика. - 2013. - Т. 49, № 6. - С. 86-99.

207. *Сиратори М.* Вычислительная механика разрушения [пер. с японск.] / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. – М. : Мир, 1986. – 334 с.
208. *Скубачевский Г. С.* Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей / Г. С. Скубачевский. – М.: Машиностроение, 1981. – 552 с.
209. *Склепус С.Н.* Численно-аналитический метод исследования характеристик ползучести и длительной прочности многослойной оболочки // Проблемы прочности. – 2017. – №2. – С.123-131
210. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
211. *Соппротивление материалов деформированию и разрушению: в 2ч. /* Под.ред. А.Т.Трощенко.– К.: Наук. думка, 1994. –ч.2. –С. 412–433.
212. *Сухинин В.П.* Напряженно-деформированное состояние хвостовых соединений высоконагруженных лопаток паровых турбин / В.П. Сухинин, Т.Н.Фурсова // Вестник национального технического университета «ХПИ». - 2010. - №3. - С. 25–29.
213. *Сухинин В.П.* Расчет нагрузочных и деформационных характеристик елочных хвостовых соединений рабочих лопаток паровых турбин / В.П. Сухинин // Проблемы машиностроения. – Харьков: 2005. – т.8, №1. –С. 38-46.
214. *Тайра С.* Теория высокотемпературной прочности материалов [пер. с японск.] / С. Тайра, Р. Отани. –М.: Металлургия, 1986. –220 с.
215. *Теребушко О.И.* Устойчивость подкрепленных и анизотропных оболочек и пластинок. 1969, М., «Наука», 1970.
216. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 575 с.
217. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский – Кригер. – М.: Наука, 1966. – 456 с.
218. *Трач В. М., Бондарський О. Г., Хоружий М. М.* Використання уточненої теорії типу Тимошенко до побудови системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання / В. М. Трач, О. Г. Бондарський, М. М. Хоружий

- // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2013. – Вип. 27.
219. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости* / [Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.]; под редакцией В. Д. Купрадзе. – М. : Наука, 1976. – 664 с.
220. *Трощенко В.Т.* Методика исследования трещиностойкости материалов образцов с угловой трещиной при циклическом нагружении / В. Т. Трощенко, Б. А. Грязнов, Л. А. Заслоцкая [и др.] // Пробл. прочн. – 1998. – №4. – С. 116-125.
221. *Трусов П. В.* О построении образца процесса нагружения и метода корректирующего анализа при исследовании больших пластических деформаций / П. В. Трусов // Пермь, 1984. – 23 с. – Рукопис деп. в ВИНТИ, 1984, №5939-84 Деп.
222. *Трусов П. В.* Постановка и алгоритм решения технологических задач упругопластичности при больших деформациях / П. В. Трусов // механика деформированного твердого тела Тула: Изд. Тульского политех. инст., 1983, С. 135-142
223. *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго-пластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидротехнике. – М. : Мир, 1967. – С. 212–263.
224. *Унксов Е. П.* Теория пластических деформаций металлов / Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. П. Колмогоров [и др.] – М. : Машиностроение, 1983. – 598 с.
225. *Феодосьев В.И.* Об одном новом способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем / В.И. Феодосьев// ПММ, 1963. –№2.
226. *Хархурим И. Я.* Специальный конечный элемент с трещиной для решения задач линейной механики разрушения / И. Я. Хархурим // В кн.: Метод конечных элементов в строительной механике. – Горький : ГГУ, 1975. – С. 31–40.
227. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.

228. *Хомасуридзе Н. Г.* Об одном классе трехмерных граничных задач термоупругости / Н. Г. Хомасуридзе // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 9. – С. 137–144.
229. *Цыбенко А. С.* исследование напряженно – деформированного состояния в процессах осесимметричного холодного прессования / А. С. Цыбенко, Е. В. Штефан, А. И. Быков // Проблемы прочности. – 1985. № 2. – С. 69–72.
230. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов – М. : Наука, 1974. – 640 с.
231. *Чернопазов С.А.* Об одном подходе к решению контактных упруго-пластических задач / С.А. Чернопазов // «Краевые задачи», Пермь, 1986, С. 122-130.
232. *Черный С. М.* Расчетно-экспериментальное исследование осадки цилиндрических образцов / С. М. Черный, А. С. Цыбенко, Е. В. Штефан, А. И. Быков // Проблемы прочности. – 1983–. № 8. – С. 98–103.
233. *Чернышенко И. С.* Физически и геометрически нелинейное деформирование конических оболочек эллиптическим отверстием / И. С. Чернышенко, Е. А. Сторожук, С. Б. Харенко // Прикл. механика. – 2008. – т.44, № 2. – С. 68–85.
234. *Чирков А. Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций / А. Ю. Чирков. – К. : Ин-т проблем прочности НАНУ, 2003. – 250 с.
235. *Шабров Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1968. – 212 с.
236. *Шевченко Ю. Н.* Деформационная теория термовязкоупругопластического деформирования ортотропного тела, учитывающая историю нагружения / Ю. Н. Шевченко // Проблемы прочности. – 2000. – № 5. – С. 74–84.
237. *Шевченко Ю. Н.* Исследование термовязкоупруго-пластических процессов деформирования элементов конструкций / Ю. Н. Шевченко // Прикладная механика. – 1999. – 35, № 9. – С. 3–12.

238. *Шевченко Ю. Н.* Определяющие уравнения для описания упругопластических процессов деформирования элементов тела по траекториям малой кривизны с учетом вида напряженного состояния материала / Ю. Н. Шевченко, Р. Г. Терехов, Н. Н. Тормахов // Прикладная механика. – 2006. – 42, № 4. – С. 62–72.
239. *Шевченко Ю.Н.* Пространственные задачи термовязкопластичности: фокус на украинские исследования (обзор). / Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко // Прикладная механика -2016. - Т.52. -№3.- С. 3-70.
240. *Шевченко Ю. Н.* Термовязкопластичность / Ю. Н. Шевченко, В. Г. Савченко. – К. : Наук. думка, 1987. – 264 с
241. *Шевченко Ю. Н.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю. Н. Шевченко, М. Е. Бабешко, Р. Г. Терехов. – К. : Наук. думка, 1992. – 327 с.
242. *Шевченко Ю. Н.* Решение плоских и осесимметричных задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести / Ю. Н. Шевченко, В. Н. Мазур // Прикладная механика. – 1986. – № 8. – С. 3–14
243. *Шестериков С. А.* Исследование повреждаемости материала при ползучести при помощи измерения электросопротивления / С. А. Шестериков, А. М. Локощенко // Деформирование и разрушение твердых тел. – М. : МГУ, Институт механики, 1992. – С. 4–12.
244. *Шульга М. О.* Про варіаційний вивід одної змішаної системи рівнянь теорії пружності / М. О. Шульга // Доповіді НАНУ. – 2009. – № 10. – С. 76–79.
245. *Эрдоган Ф.* О распространении трещин в пластинках под действием нагрузки в плоскости и поперечного сдвига / Ф. Эрдоган, Дж. Си // Труды амер. об-ва инж.-мех. Сер. Д. – 1963. – Т. 85. – № 4. – С. 122–126.
246. *Ясній П. В.* Пластично деформовані матеріали: втомі і тріщинотривкість / П. В. Ясній – Львів : Світ, 1998. – 292 с.
247. *Anedrson T. L.* Fracture mechanics / T. L. Anedrson – CRC press Inc., 2000. – 794 p.

248. *Bazhenov V.A.* A Modified Method for Evaluating the Invariant J-Integral in Finite-Element Models of Prismatic Bodies / V.A. Bazhenov , A.S. Sakharov, Y.V. Maksimyuk, A.A. Shkryl' // International Applied Mechanics, 52(2), 2016, pp. 140-146.
249. *Carpenter W.* Comparison of several path independent integrals including plasticity effects / W. Carpenter, D. Read, R. Dodds // International Journal of Fracture. – 1986. – Vol. 31. – P. 303-323.
250. *Chen G. G.* The role of plastic strains in creep crack growth / G. G. Chen. T. R. Hsu // Eng. Fracture Mechanics. – 1991. – Vol. 39. – № 3. – P. 493–506.
251. *Chen Y.Z.* Closed form solutions of T-stress in plate elasticity crack problems. // Int. J. Solids and Str. 2000. – Vol. 37. – № 11. – P. 1629-1637.
252. *Chow C. L.* An anisotropic model of damage mechanic based on the endochronic theory of plasticity / C. L. Chow, X. F. Chen // Int. J. Fracture. – 1992. – Vol. 55, № 2. – P. 115–130.
253. *Chow C. L.* On crack surface displacement approaches of finite element analysis in evaluating stress intensity factors / C. L. Chow, K. I. Lan // Int. J. Fract., 1976. – Vol. 12. – № 3 – P. 488-490.
254. *De Lorenzi H.* Energy release rate calculations by the finite element method / H. De Lorenzi // Eng. Fract. Mech. – 1985. – V. 21. – № 1. – P. 129-143.
255. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8. – № 2. – P. 100-104.
256. *Elguedj T.* Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics / T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2006. – Vol. 195. – P. 501–515.
257. *Firmature R.* Elastic-plastic analysis of off-center cracks in cylindrical structures / R. Firmature, S. Rahman // Eng. Fract. Mech. – 2000. – Vol. 66. – № 1. – P. 15–39.
258. *Galishin, A.Z., Shevchenko, Yu.N.* Axisymmetric physically nonlinear state of orthotropic shells // International Applied Mechanics, 2013.

259. *Galishin, A.Z., Shevchenko, Yu.N.* Determining the axisymmetric elastoplastic state of thin shells with allowance for the third invariant of the stress deviator // International Applied Mechanics, 2011
260. *Ghanbari Ghazijahani T.* Locally imperfect conical shells under uniform external pressure / T. Ghanbari Ghazijahani, H. Showkati // Проблемы прочности. - 2013. - № 3. - С. 157-168.
261. *Giner E.* Error estimation for the finite element evaluation of G_I and G_{II} in mixed-mode linear elastic fracture mechanics / E. Giner, F. J. Fuenmayor, L. Baeza, J.E. Taranson // Finite Elements in Analysis and Design. – v. 41. –2005. – P. 1079-1104.
262. *Giner E.* An implementation of the stiffness derivative method as a discrete analytical sensitivity analysis and its application to mixed mode in LEFM / E. Giner, F. J. Fuenmayor, A. J. Besa // Engineering Fracture Mechanics. – V. 68 (18). – 2002. – P. 2051-2071.
263. *Goodman A. M.* The creep design of thin pressure vessel end closures / A. M. Goodman // 3rd International Conf. on structural mechanics in reactor technology, London, 1975. – (Berlin, 1975).–P.2-5
264. *Griffith A.* The theory of rupture / A. Griffith // Proc. First. Int. Congr. Appl. Mech. – Delft. – 1924. – P. 55-63.
265. *Guydish I. I.* Optimisation of the finite element mesh for the solution of fracture problems / I. I. Guydish, I. F. Fleming // Eng. Fract. Mech. – 1978. – Vol. 10. – № 1. – P. 31–42.
266. *Hellen T. K.* The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading / T. K. Hellen, W. S. Blackburn // Int. J. Fract., 1975. – 11. – № 4. – P. 605–617.
267. *Irwin G.* Fracturing and fracture dynamics / G. Irwin, J. Kies // Welding J. Res. Suppl. – Feb. 1952.
268. *Ishikawa A.* A finite element analysis of stress intensity factors for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension / A. A Ishikawa // Int. J. Fract. – 1980. – 15. – № 5. – P. 243–246.

269. *Jansson S.* Damage, crack growth and rupture in creep / S. Jansson. – Goteborg : Chalmers Univ. Techn. Div. Solid. Mech., 1985. – 16 p.
270. *Jerram K.* Discussion paper by Smith and Alavi. // Int. Conf. Pressure Vessel Tech., Part III, ASH, Piscus. – 1970. – № 4.– p.25–32.
271. *Jin Z.* Crack growth resistance behavior of a functionally graded material: computational studies / Z. Jin, R. Dodds // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – V.71. – P.1651–1672.
272. *Kawai M.* Constitutive model for coupled inelasticity and damage / M. Kawai // Nikon kikai gakkai rombunsu A. = Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. – 1995. – Vol. 61, № 592. – P. 2684 – 2692.
273. *Kim Yun-Jae.* Elastic–plastic fracture mechanics method for finite internal axial surface cracks in cylinders / Yun-Jae Kim, J. Kim, Y. Park, Young-Jin Kim // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – V. 71. – P. 925–94.
274. *Kulkarni D.* The effect of specimen thickness on the experimental and finite element characterization of CTOD in extra deep drawn steel sheets / D. Kulkarni, R. Prakash, P. Talan // Sadhana. – 2004. – Vol. 29. – Part 4. – P. 365–380.
275. *Lee E. H.* Stress anisotropic hardening in finite deformation plasticity / E. H. Lee, R. L. Mallett // Trans. ASME: g. Appl. Mech. – 1983. – V.50. – P.554-560.
276. *Li F.* A comparison of methods for calculating energy release rates / F. Li, C. Shih, A. Needleman // Eng. Fract. Mech. – 1985. – V.21. – P. 405-421.
277. *Md Azree Othuman Mydin.* Modeling of transient heat transfer in foamed concrete slab. - Journal of Engineering Science and Technology Vol. 8, No. 3 (2013) 326 – 343.
278. *Morozov E. M.* Limit analysis for structures with flaws / E. M. Morozov.– Eng. Fract. Mech. – 1974. – V. 8. – № 3. – P. 297-306.
279. *Murakami S.* Finite element analysis of the creep damage process, based on anisotropic creep damage theory / S. Murakami, M. Kawai, H. Rong // Nikon kikai gakkai rombunsu A. = Trans. ap. Soc. Mech. Eng. A. – 1987. – Vol. 53, № 488. – P. 795–801.

280. *Murakami T.* Three-dimensional J-integral calculations of part-through surface crack problems / T. Murakami, T. Sato // *Computers & Structures*. - 1983. - V. 17. - № 5, 6. -P. 731-736.
281. *Nahta R.* Domain integrals for axisymmetric interface problems / R. Nahta, B. Moran // *Int J Solids Struct*. – 1993. – V. 30. – P. 2027–2040.
282. *Nikishkov G.* An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture / G. Nikishkov, S. Atluri // *Eng. Fract. Mech.* – 1987. – V. 26. – N. 6. – P. 851-867.
283. *Odkvist F. K.* Mathematical theory of creep and creep rupture / F. K. Odkvist // Clarindon Press, 2nd ed. 1974.– 420 p.
284. *Orowan E.* Proceedings on the Symposium on Fatigue and Fracture of Metals (Mitt) / E. Orowan.– New York: Wiley, 1950. – P. 139-167.
285. *Otevrel I.* The simulated creep damage model and its application / I. Otevrel // *Acta techn. CSAV*. – 1993. - Vol. 38, № 3. – P. 305–330.
286. *Park Y.* Investigation on the interaction effect of two parallel axial through-wall cracks existing in steam generator tube / Y. Park, M. Song, J. Lee // *Nuclear Engineering and Design*. – 2002. – V. 214. – P. 13–23.
287. *Pyskunov S.O.* Finite Element Analysis of Influence of Non-homogenous Temperature Field on Designed Lifetime of Spatial Structural Elements under Creep Conditions / S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksimyuk, V.V. Valer // *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences* 1(1), 2016. –P.170–176.
288. *Qian X.* Mode mixity for tubular K-joints with weld toe cracks / X. Qian, R. Dodds, Y. Choo // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2006. – V. 73. – P. 1321–1342.
289. *Reissner E.* On bending of elastic plates. *Quart. Appl. Math.* V.5, 1947, N1.
290. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks / J. Rice // *J. Appl. Mech.* – 1968. - P. 379-386.
291. *Rusin A.* Trwalosc wirnikow turbin w ujeciu kontynualnej mechaniki zniszczenia / A. Rusin // *Zecz.nauk Energ.* – 1995. – №123. – P. 63–75.

292. *Schindler H.* An engineering concept to account for crack-tip constraints / H. Schindler // *Facta Univ. Ser. Mech., Autom. Contr. And Rob Univ. Nis.* – 2003. – 3. – № 13. – P. 613–622.
293. *Sidoroff F.* Incremental constitutive equation for large strain elasto – plasticity / F. Sidoroff // *Int. J.Eng. Sci.* – 1982. 20, № 1. – P. 19-26.
294. *Sneddon I. N.* The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid / I. N. Sneddon // *Proc. Roy. Soc.* – 1946. – A 187. – P. 229–260.
295. *Tang A.* Determination of material constants in creep continuum damage constitutive equation / A. Tang, T. H. Hyde, W. Sun // *Strain.* – 1998. – Vol. 34, № 3. – P. 83–90.
296. *Torabi H.* Buckling analysis of steel semi-spherical shells with square cutout under axial compression / H. Torabi, M. Shariati // *Проблемы прочности* - 2014. - № 4. - С. 109-122.
297. *Tracey D. M.* Discussion of “On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics”. Part 1. / D. M. Tracey // *Intern. J. Numer. Meth. Eng.* – 1977. – Vol. 11 – № 2. – P. 401–407.
298. *Walters M.* Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions / M. Walters, G. Paulino, R. Dodds // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2005. – V. 72. – P. 1635–1663.
299. *Wells A. A.* Application of fracture mechanics at and beyond general yielding / A. A. Wells // - *Brit. Weld. J.* – 1963.– V. 10.– N 11.– P. 563-570.
300. *Yang Z.* Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique / Z. Yang, J. Chen, G. Holt // *Computers and Structures.* – 2001. – V. 79. – P. 2705-2715.
301. *Yuan H.* On the J-integral concept for elastic-plastic crack extension / H. Yuan, W. Brocks // *Nuclear Engineering and Design.* – 1991. – V. 131. – P. 157-173.

ДОДАТОК

Довідки про впровадження результатів дисертаційної роботи



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

Повітрофлотський пр. 31, м. Київ - 37, 03037, тел. (044)241-55-80, факс (044) 248-32-65
E-mail: knuba_admin@ukr.net, Web: [http:// www.knuba.edu.ua](http://www.knuba.edu.ua), код ЄДРПОУ 02070909

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Максим'юка Ю.В. на тему «Метод скінченних елементів у задачах геометрично та фізично нелінійного деформування, стійкості і руйнування тіл складної структури при термосиловому навантаженні» у навчальному процесі Київського національного університету будівництва і архітектури

Результати дисертаційної роботи Максим'юка Ю.В. на тему «Метод скінченних елементів у задачах геометрично та фізично нелінійного деформування, стійкості і руйнування тіл складної структури при термосиловому навантаженні», використані у навчальному процесі на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури при виконанні наступних магістерських робіт: «Визначення напружено стану тонкостінного резервуару для зберігання нафтопродуктів» (2013 р.), «Аналіз динамічних характеристик неоднорідної конструкції опорних частин конічних танкерів» (2014 р.), «Визначення напружено-деформованого стану сталюого вертикального резервуару з поверхневою напівеліптичною тріщиною» (2015 р.), «Визначення напружено-деформованого стану колектора пароперегрівача ТЕС» (2016 р.), «Дослідження несучої здатності циліндричної панелі перекриття» (2017 р.), «Визначення тріщиностійкості захисної оболонки реактора при термосиловому навантаженні» (2018 р.).

Науковий внесок Максим'юка Ю.В. полягає у створенні на основі MSCЕ програмного забезпечення для розв'язання задач геометрично та фізично нелінійного деформування, стійкості і руйнування тіл складної форми і структури при термосиловому навантаженні.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Максим'юка Ю.В. на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук.

Проректор з наукової роботи
та міжнародних зв'язків КНУБА,
д.т.н., проф.

В.О.Плоский



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ
НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

03037, м.Київ, Повітрофлотський пр., 31

Телефон: (044) 271-75-61

Факс: (044) 276-02-43

№ _____

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Максим'юка Ю.В.
на тему «Метод скінченних елементів у задачах геометрично та фізично
нелінійного деформування, стійкості і руйнування тіл складної структури
при термосиловому навантаженні» у наукових дослідженнях
Науково-дослідного інституту будівельної механіки
Київського національного університету будівництва і архітектури

Результати дисертаційної роботи Максим'юка Ю.В. на тему «Метод скінченних елементів у задачах геометрично та фізично нелінійного деформування, стійкості і руйнування тіл складної структури при термосиловому навантаженні» використані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (НДІБМ КНУБА) при виконанні наступних науково-дослідних робіт: 2ДБ-2010 «Розробка теоретичних основ і методики чисельного моделювання напружено-деформованого стану і визначення ресурсу відповідальних об'єктів машинобудування з урахуванням геометрично-нелінійного деформування» (2010-2012 рр., № держ. реєстрації 0110U002280); 1ДБ-2013 «Створення теорії і методик дослідження тріщиностійкості просторових тіл методом скінченних елементів з урахуванням геометрично нелінійного деформування» (2013-2015 рр., № держ. реєстрації 0113U002288); 5ДБ-2015 «Створення теорії і методів дослідження невстановлених температурних полів та пружнопластичного деформування просторових тіл» (2015-2017 рр., № держ. реєстрації 0115U000714); 1ДБ-2016

«Дослідження формозмінення і стійкості масивних, тонкостінних та комбінованих вісесиметричних конструкцій при термосиловому навантаженні» (2016-2018 рр., № держ. реєстрації 0116U000839); 1ДБ-2019 «Створення комп'ютерних технологій дослідження несучої здатності просторових тіл складної форми з тріщинами на основі енергетичних критеріїв руйнування» (2019-2021 рр., № держ. реєстрації 0119U004841).

Науковий внесок Максим'юка Ю.В. полягає в створенні ефективного чисельного підходу розв'язання лінійних, фізично і геометрично нелінійних задач деформування, стійкості, континуального і дискретного руйнування, контактної взаємодії та нестаціонарної теплопровідності тонкостінних, масивних і комбінованих тіл обертання складної структури. Реалізація підходу виконана на основі моментної схеми скінчених елементів за рахунок створення розвиненої бібліотеки скінчених елементів, уніфікації крокових алгоритмів розв'язку еволюційних задач і створення ефективного математичного апарату та програмного забезпечення для визначення ресурсу, тріщиностійкості і несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки, які знаходяться під впливом довільно розподілених в просторі та часі силових, кінематичних і температурних навантажень

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Максим'юка Ю.В. на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук.

Заступник директора
НДІБМ КНУБА,
д.т.н., проф.

П.П.Лізунов

«Підпис заступника директора НДІБМ КНУБА,
д.т.н., проф. П.П. Лізунова засвідчую»

Вчений секретар КНУБА
канд. техн. наук, доцент

О.С. Петренко